UNIVERSITY OF HAWAII LIBRARY

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP TÜBINGEN

E. SCHMIDT BERLIN

I. SCHUR BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN

LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

R. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

27. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1928

QA1
M88
v.27

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

27. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1928

66 53061

QA1
M88
v.27

Inhaltsverzeichnis

Seite

Alexits, G., Zwei Sätze über Fourier-Koeffizienten 65
Baer, R., Über ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre 532
Baer, R., Bemerkungen zu der Erwiderung von Herrn P. Finsler 543
Banach, St., Sur certains ensembles de fonctions conduisant aux équations partielles du second ordre 68
Besicovitch, A. S., On Kakeya's problem and a similar one 312
Blaschke, W., Bestimmung der Flächen, deren D-Linien gleichzeitig Böschungslinien sind 150
Blaschke, W., Eine Verallgemeinerung der Theorie der konfokalen F_2 653
Bochner, S., Konvergenzsätze für Fourierreihen grenzperiodischer Funktionen . 187
Ernst-Abbe-Gedächtnispreis für Mathematik und Physik 640
v. Egerváry, E., und O. Szász, Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome 641
Feigl, G., Über einige Eigenschaften der einfachen stetigen Kurven. Teil I . . 161
Feller, W., Über algebraisch rektifizierbare transzendente Kurven 481
Field, P., Note on equivalent transformations 453
Finsler, P., Erwiderung auf die vorstehende Note des Herrn R. Baer 540
Haack, W., Eine Kennzeichnung der Flächen konstanten Krümmungsmaßes . . 134
Hammerstein, A., Über Entwicklungen gegebener Funktionen nach Eigenfunktionen von Randwertaufgaben 269
Hardy, G. H., und J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals. I. 565
Jarník, V., Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden 154
Jolles, St., Die Involutionen auf einer linearen Zahlenkongruenz 427
Kamke, E., Über die Clairautsche Differentialgleichung 623
Kellogg, O. D., On bounded polynomials in several variables 55
Knopp, K., Komplexe Zahlen und konvexe Polyeder 146
Lichtenstein, L., Über einen Einwand gegen das Newtonsche Attraktionsgesetz. Ein Problem der Dynamik vollkommen inkohärenter, gravitierender Medien 607
Littlewood, J. E., und G. H. Hardy, Some properties of fractional integrals. I. 565
v. Neumann, J., Die Axiomatisierung der Mengenlehre 669
Okada, Y., Über die Annäherung analytischer Funktionen. II. 212
Perron, O., Über Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungssysteme im roellen Gebiet 549
Rademacher, H., Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper. III. Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summen von totalpositiven Primzahlen in einem beliebigen Zahlkörper 321
Riesz, M., Sur les fonctions conjuguées 218
Rothe, E., Über einige Analogien zwischen linearen partiellen und linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen 76

Seite

Sachs, L., Anwendung der Weierstraßschen Methode zur Umkehrung der elliptischen Integrale auf die Bestimmung konjugierter Punkte im Sinne der Variationsrechnung 496
Saxer, W., Über die Verteilung der Nullstellen und Pole von rationalen Funktionen konvergenter Folgen 518
Schnee, W., Über die Regularität von Funktionen reellen Arguments 456
Schönhardt, E., Über konvexe Polygone in der Ebene der komplexen Zahlen . 138
Sperner, E., Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge 544
Szász, O., und E. v. Egerváry, Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome 641
Tamarkin, J., Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions 1
Tricomi, Fr., Equazioni integrali contenenti il valor principale di un integrale doppio 87
Walfisz, A., Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Dritte Abhandlung 245
Walfisz, A., Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln 469
Zwirner, K., Zur Riemannschen Geometrie. II. Bestimmung der krummlinigen Koordinaten, bei denen sich die geodätischen Diagonalen in jedem Koordinatenviereck halbieren 463

Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions.

By

J. Tamarkin in Hanover, N. H. (U. S. A.).

This paper reproduces a paper which was published in 1917 under the same title[1]), with considerable abbreviations and generalizations. A detailed discussion of some questions which are explained here but briefly, as well as extended references, may be found in the above mentioned paper.

§ 1.

Asymptotic expressions of solutions of differential equations containing a parameter.

1. We begin with a discussion of the system of n differential equations

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x, \varrho)\, y_k, \tag{I}$$

whose coefficients are functions of a real variable x in the interval $a \leqq x \leqq b$ and of a complex parameter ϱ. Suppose the functions $a_{ik}(x, \varrho)$ admit of expansions

$$a_{ik}(x, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho^{\varkappa-\nu}\, a_{ik}^{(\varkappa-\nu)}(x) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

for $|\varrho|$ sufficiently large, i. e. for

$$|\varrho| \geqq R_0, \tag{2}$$

R_0 being a given positive constant.

If the functions $a_{ik}^{(\varkappa-\nu)}(x)$ possess derivatives of all orders in (a, b) and if the "characteristic equation"

[1]) Petrograd 1917 (in Russian).

$$(3) \qquad \Phi(\theta) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}^{(\varkappa)}(x) - \theta & a_{12}^{(\varkappa)}(x) \dots a_{1n}^{(\varkappa)}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}^{(\varkappa)}(x) & a_{n2}^{(\varkappa)}(x) \dots a_{nn}^{(\varkappa)}(x) - \theta \end{vmatrix} = 0$$

has simple roots

$$(4) \qquad \varphi_1^{(\varkappa)}(x), \dots, \varphi_n^{(\varkappa)}(x)$$

for every value of x, then a matrix of formal solutions of (I) can be found of the form

$$(5) \qquad e^{\int \omega_j(x,\varrho)\,dx} \sum_{\nu=0}^{\infty} y_{ij}^{(\nu)}(x)\,\varrho^{-\nu},$$

where

$$\omega_j(x,\varrho) = \varrho^{\varkappa}\varphi_j^{(\varkappa)}(x) + \dots + \varrho\,\varphi_j^{(1)}(x)$$

and the coefficients

$$\varphi_j^{(\nu)}(x), \qquad y_{ij}^{(\nu)}(x)$$

are determined by immediate substitution of (5) in the system (I). The series (5) are divergent in the general case, but they can be used for approximate representation of certain solutions of (I), as it is shown by the following theorem:

Theorem 1. *Suppose the coefficients* $a_{ik}(x,\varrho)$ *of the system* (I) *to satisfy the following conditions*:

1°. *Series* (1) *are convergent on the region* (2) *and the functions*

$$a_{ik}^{(\varkappa-\nu)}(x) \qquad (i,k = 1, 2, \dots, n;\ \nu = 0, 1, 2, \dots)$$

are continuous and uniformly bounded on (a, b).

2°. *If* m *denotes a given positive integer, and integers* s *and* r *are determined by the condition*

$$m = s\varkappa + r + 1 \qquad (0 \leqq r \leqq \varkappa - 1),$$

it is assumed that the functions

$$\frac{d^{s+1}a_{ik}^{(\varkappa)}(x)}{dx^{s+1}}, \dots, \frac{d^{s+1}a_{ik}^{(\varkappa-r)}(x)}{dx^{s+1}}$$

$$\frac{d^{s}a_{ik}^{(\varkappa-r-1)}(x)}{dx^{s}}, \dots, \frac{d^{s}a_{ik}^{(-r)}(x)}{dx^{s}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{ik}^{(-m+\varkappa)}(x), \dots, a_{ik}^{(-m+1)}(x)$$

possess continuous derivatives of the first order on (a, b).

3°. *The roots* (4) *of the characteristic equation* (3) *are distinct for every value of* x *in* (a, b).

4°. *There exists such an infinite part* $(\mathfrak{D})$ *of the region* $|\varrho| \geqq R_0$, *in which the inequalities*

(6) $$\Re\,\omega_1(x,\varrho) \leqq \Re\,\omega_2(x,\varrho) \leqq \ldots \leqq \Re\,\omega_n(x,\varrho)$$

are satisfied for every value of x *in* (a,b).

Then there exists a matrix of solutions of the system (I), *of the form*

(7) $$y_{ij}^{(m)}(x,\varrho) = e^{\int_a^x \omega_j(x,\varrho)\,dx}\left\{\sum_{\nu=0}^{m-1} y_{ij}^{(\nu)}(x)\,\varrho^{-\nu} + \frac{E(x,\varrho)}{\varrho^m}\right\},$$

where $E(x,\varrho)$ *are bounded and continuous functions of* x *in* (a,b) *and of* ϱ *in* $(\mathfrak{D})$.[2])

The theorem 1 was proved in the paper[1]) using a generalization of the classic Dini's method[3]).

2. In the most important case, when the system (I) is equivalent to a single differential equation of order n, and $\varkappa = 1$, we obtain:

Theorem 2. *Suppose the coefficients of the differential equation*

(II) $$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x,\varrho)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n(x,\varrho)y = 0$$

to satisfy the following conditions:

1°. *The functions* $P_i(x,\varrho)$ *can be expanded in descending powers of* ϱ *on the region* (2):

(8) $$P_i(x,\varrho) \equiv \varrho^i \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(x)\varrho^{-j} \equiv \varrho^i p_i(x,\varrho) \qquad (i = 1,2,\ldots,n),$$

the coefficients $p_{ij}(x)$ *being continuous and uniformly bounded on* (a,b).

2°. *The functions*

$$p_{i0}(x) \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

possess continuous derivatives of the second order, the functions

$$p_{i1}(x) \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

possess continuous derivatives of the first order on (a,b).

3°. *The characteristic equation*

(9) $$\Phi(\theta) \equiv \theta^n + p_{10}(x)\theta^{n-1} + \ldots + p_{n-10}(x)\theta + p_{n0}(x) = 0$$

has roots $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *which are distinct for all values of* x *in* (a,b).

---

[2]) We shall use the symbol $E(\varrho,\ldots)$ in order to denote functions of ϱ and of other variables, bounded on $(\mathfrak{D})$ or, more generally, bounded for large values of $|\varrho|$.

[1]) Chapters I and II.

[3]) The particular case of a system with coefficients linear in ϱ was discussed also by G. D. Birkhoff and R. E. Langer, The boundary problems and developements etc. Proc. of Am. Ac. of Arts and Sc. 58 (1923), n° 2. The theorem holds true when the series (1) are not convergent, but only asymptotic in $(\mathfrak{D})$, and when the inequalities (6) are replaced by more general ones: $\Re\,\omega_1 \leqq \Re\,(\omega_2+\alpha) \leqq \ldots \leqq \Re\,(\omega_n+(n-1)\alpha)$, where α is a constant. In the case, when the functions $a_{ik}^{(\nu)}$ have derivatives of all orders on (a,b) the matrix (7) can be chosen as to be independent of m. Cfr. our paper (in collaboration with A. Besicovich), Math. Zeitschr. 21 (1924), pp. 119—125.

4°. *There exists such an infinite part* $(\mathfrak{D})$ *of the region* (2) *on which*

$$\Re(\varrho\varphi_1) \leqq \Re(\varrho\varphi_2) \leqq \ldots \leqq \Re(\varrho\varphi_n) \tag{10}$$

for every value of x *in* (a, b).

Then there exists a fundamental system of solutions of (II), *which on* $(\mathfrak{D})$ *can be represented by*

$$y_\lambda(x, \varrho) = e^{\varrho\int_a^x \varphi_\lambda(x)\,dx}\left\{\eta_\lambda(x) + \frac{E_\lambda(x, \varrho)}{\varrho}\right\}, \tag{11}$$

where the functions

$$\eta_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{\Phi'(\varphi_\lambda)}}\, e^{-\int_a^x \frac{\Phi_1(\varphi_\lambda)}{\Phi'(\varphi_\lambda)}dx} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

$$\Phi'(\theta) \equiv \frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}; \quad \Phi_1(\theta) \equiv p_{11}(x)\theta^{n-1} + \ldots + p_{n-11}(x)\theta + p_{n1}(x)$$

possess continuous derivatives of the second order, and the functions $E_\lambda(x, \varrho)$ *are continuous and bounded.*

The formulas (11) *can be differentiated* $(n-1)$ *times with respect to* x, *conserving each time the highest term in* ϱ *only, so that*

$$\frac{d^s y_\lambda(x, \varrho)}{dx^s} = e^{\varrho\int_a^x \varphi_\lambda(x)\,dx}\,\varrho^s[\varphi_\lambda(x)]^s\left\{\eta_\lambda(x) + \frac{E}{\varrho}\right\}^{4}) \quad (s = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{13}$$

3. A detailed discussion shows that *if the condition* 2° *of Theorem* 2 *is replaced by a more restrictive one:*

2_1°. *The functions*

$$\frac{d^2 p_{i0}(x)}{dx^2}, \quad \frac{dp_{i1}(x)}{dx}, \quad p_{i2}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

are continuous and of bounded variation on (a, b), *and the arguments of all the differences*

$$\varphi_i(x) - \varphi_j(x) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

satisfy Dirichlet condition on (a, b), *then*

$$y_\lambda(x, \varrho) = e^{\varrho\int_a^x \varphi_\lambda(x)\,dx}\left\{\eta_\lambda(x) + \frac{\zeta_\lambda(x)}{\varrho} + \frac{E(x, \varrho)}{\varrho^2}\right\} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{14}$$

and the functions

$$\frac{d^2\eta_\lambda(x)}{dx^2}, \quad \frac{d\zeta_\lambda(x)}{dx} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

are continuous and of bounded variation on (a, b).[1])

[4]) An analogous theorem was proved by G. D. Birkhoff, On the asymptotic character of solutions of certain linear diff. equat., Trans. Am. Math. Soc. 9 (1908).

[1]) pp. 75—79.

4. If the conditions of Theorems 1 and 2 are not satisfied, the discussion of the asymptotic character of solutions of (I) and (II) presents considerable difficulties, and even the formal character of the series (5) may change. For instance, if the characteristic equation has multiple roots [of the same multiplicity throughout the whole interval (a, b)], then instead of formal series (5) we obtain series, which contain, besides integral, also fractional powers of ϱ.

In the special case of an equation of the second order

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \varrho p_1(x, \varrho)\frac{dy}{dx} + \varrho^2 p_2(x, \varrho)y = 0,$$

$$p_1(x, \varrho) = \sum_{j=0}^{\infty} \varrho^{-j} p_{1j}(x), \qquad p_2(x, \varrho) = \sum_{j=0}^{\infty} \varrho^{-j} p_{2j}(x),$$

suppose that the characteristic equation has a multiple root $\varphi(x) = -\frac{1}{2}p_{10}(x)$ for all values of x in (a, b), so that

$$p_{10}(x)^2 - 4p_{20}(x) \equiv 0 \quad \text{on} \quad (a, b).$$

Then it can be proved that *either*:

$$\psi(x) \equiv -\frac{1}{2}\frac{dp_{10}(x)}{dx} - \frac{1}{2}p_{10}(x)\,p_{11}(x) + p_{21}(x) \equiv 0,$$

in which case the equation has two solutions of the form

$$e^{\varrho \int_a^x \varphi(x)\,dx} \sum_{\nu=0}^{\infty} y_\lambda^{(\nu)}(x)\,\varrho^{-\nu} \qquad (\lambda = 1, 2),$$

the infinite series being *convergent* on (2), *or*: $\psi(x) \neq 0$, in which case the equation has two *formal* solutions

$$y_\lambda(x, \varrho) = e^{\varrho \int_a^x \varphi(x)\,dx \pm \sqrt{\varrho} \int_a^x \sqrt{\psi(x)}\,dx} \sum_{\nu=0}^{\infty} y_\lambda^{(\nu)}(x)\,\varrho^{-\frac{\nu}{2}},$$

where the sign $(+)$ corresponds to $\lambda = 1$, the sign $(-)$ corresponds to $\lambda = 2$.

It is easy to prove the asymptotic character of these formal series.

§ 2.

The Green's function in general.

5. The "boundary problem (L)" consists in the determination of a function $y(x)$, which satisfies the differential equation

(I) $$L(y) \equiv y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y = f(x)$$

and n supplementary conditions

(II) $$L_i(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} \int_a^b y^{(k-1)}(t)\,d\alpha_{ik}(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

We suppose that

1°. *The functions*

$$P_1(x), \ldots, P_n(x) \tag{1}$$

are continuous on the interval (a, b) *and the functions*

$$\alpha_{ik}(x) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

are of bounded variation, the integrals being taken in the sense of Stieltjes.

2°. *The linear operators*

$$L_1(y),\ L_2(y),\ \ldots,\ L_n(y)$$

are linearly independent.

If we replace the operators (II) by any n linearly independent linear combinations with constant coefficients, we obtain a problem which is equivalent to the problem (L), and we shall make no distinction between all these problems.

If the function $f(x)$ is not equal to zero identically on (a, b), the problem is *non-homogeneous*; in the contrary case the problem is called *homogeneous.*

If the homogeneous problem admits of at least one solution, which is not identically zero on (a, b), such a problem is called *compatible*; if only $y \equiv 0$ can satisfy the homogeneous problem (L), it is *incompatible.*

Denoting by

$$t_{ik}^{(\nu)} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

the points of discontinuity of the functions $\alpha_{ik}(t)$, the end-points a, b, inclusive, we can write the operators $L_i(y)$ in the form:

$$L_i(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{ik}^{(\nu)}\, y^{(k-1)}(t_{ik}^{(\nu)}) + \sum_{k=1}^{n} \int_a^b y^{(k-1)}(t)\, d\beta_{ik}(t) \tag{4}$$

where the constants $\beta_{ik}^{(\nu)}$ are determined by the jumps of the functions $\alpha_{ik}(t)$, and the functions $\beta_{ik}(t)$ are continuous and of bounded variation. Finally, integrating by parts, we reduce $L_i(y)$ to the form:

$$L_i(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{ik}^{(\nu)}\, y^{(k-1)}(t_{ik}^{(\nu)}) + \int_a^b y^{(n-1)}(t)\, d\gamma_i(t) \tag{5}$$

where $\gamma_{ik}^{(\nu)}$ are constants and $\gamma_i(t)$ are continuous functions of bounded variation on (a, b).[5])

[5]) A special case of the operators (II), where the number of the points of discontinuity was finite and the functions $\beta_{ik}(t)$ were absolutely continuous on (a, b), was discussed in my paper [1]). A more special case, where all $\beta_{ik}(t) \equiv 0$, was considered in two papers by Ch. E. Wilder, Trans. Am. Math. Soc. **18** (1917), pp. 415–442, and **19** (1918), pp. 157–186.

6. Definition. *The Green's function of the problem* (L) *is a function* $G(x, t)$ *of two variables* x, t, *which is determined and continuous with respect to each variable on* (a, b), *except for*

$$t = t_{ik}^{(\nu)} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

and for

$$x = t, \quad \text{when} \quad n = 1,$$

and which enables to represent the solution of the non-homogeneous problem (L) *in the form of a definite integral*

$$y(x) = \int_a^b G(x, t)\, f(t)\, dt \tag{6}$$

for an arbitrary choice of the function $f(x)$.

The existence and the properties of the Green's function have been discussed by many authors in special cases. It is not difficult to make this discussion in our general case. Denote by

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x) \tag{7}$$

a fundamental system of solutions of the homogeneous differential equation:

$$L(y) = 0, \tag{8}$$

and let

$$\delta(x) = \begin{vmatrix} u_1^{(n-1)}(x) \ldots u_n^{(n-1)}(x) \\ u_1^{(n-2)}(x) \ldots u_n^{(n-2)}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1(x) \quad \ldots u_n(x) \end{vmatrix} = \delta(a)\, e^{-\int_a^x P_1(t)\, dt}, \tag{9}$$

$$g(x, t) = \pm \frac{1}{2\delta(t)} \begin{vmatrix} u_1(x) \quad \ldots u_n(x) \\ u_1^{(n-2)}(t) \ldots u_n^{(n-2)}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1(t) \quad \ldots u_n(t) \end{vmatrix}, \qquad \begin{matrix} + \text{ if } x > t, \\ - \text{ if } x < t, \end{matrix} \tag{10}$$

$$u_{ik} = L_i(u_k) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

$$\Delta = |u_{ik}|. \tag{12}$$

7. Theorem 3. *Only two cases are possible: either*

1°. *The determinant* Δ *is equal to zero, in which case the homogeneous problem* (L) *is compatible, the Green's function does not exist and the non-homogeneous problem* (L) *is impossible for an arbitrary function* $f(x)$. *Or*

2°. *The determinant* $\Delta \neq 0$, *in which case the homogeneous problem* (L) *is incompatible, the Green's function exists and is determined uniquely (at the points of continuity) by the formula*

$$(13)\qquad G(x,t)=\frac{(-1)^n}{\Delta}\begin{vmatrix} u_1(x) & \dots & u_n(x) & g(x,t) \\ u_{11} & \dots & u_{1n} & L_1(g)_x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} & L_n(g)_x \end{vmatrix},$$

where the subscript x indicates, that the operation L_i is performed on $g(x,t)$ as on a function of x. The non-homogeneous problem (L) for an arbitrary choice of $f(x)$ has a unique solution

$$(6)\qquad y(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)\,dt.$$

In order to prove this theorem we write the general solution of the non-homogeneous equation (I) in the form

$$(14)\qquad y(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x)+u_0(x),$$

where c_i are constants and

$$(15)\qquad u_0(x)=\int_a^b g(x,t)f(t)\,dt$$

is a particular solution of (I). Substitution in (II) gives a system of equations for c_i:

$$(16)\qquad \sum_{k=1}^{n} u_{ik}c_k=-L_i(u_0)\qquad (i=1,2,\dots,n).$$

If the determinant Δ of this system is different from zero, we can determine c_i uniquely. Substituting the values of c_i in (14) and using the relation

$$L_i\Big[\int_a^b f(t)\,g(x,t)\,dt\Big]=\int_a^b f(t)\,L_i(g)_x\,dt,$$ [6])

we obtain formulas (6) and (13). Using the fact that $f(x)$ is arbitrary, we easily obtain the proof of the statement 2° of Theorem 3. The statement 1° can be proved, by considering the case $f(x)\equiv 0$, and the corresponding homogeneous system:

$$(17)\qquad \sum_{k=1}^{n} u_{ik}c_k=0;\qquad \Delta=|u_{ik}|=0.$$

---

[6]) This relation is a corollary of the following lemma: If $\alpha(\lambda)$ is of bounded variation on $\lambda_1\leqq\lambda\leqq\lambda_2$, $f(s)$ is an integrable function on $a\leqq s\leqq b$, and $\omega(s,\lambda)$ is bounded on the rectangle $\lambda_1\leqq\lambda\leqq\lambda_2$, $a\leqq s\leqq b$ and continuous with respect to λ for almost all values of s, then $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\alpha(\lambda)\int_a^b f(s)\,\omega(s,\lambda)\,ds=\int_a^b f(s)\,ds\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\omega(s,\lambda)\,d\alpha(\lambda)$. This lemma can be proved like an analogous (but non equivalent) lemma of T. Carleman, Sur les équations integrales singulières, Uppsala Universitets Årsskr. 1923, n° 3, p. 8.

8. Theorem 4. *If the conditions* 1° *and* 2° *of* 5 *are satisfied, the Green's function* $G(x,t)$, *as function of* x, *has the following properties*:

1°. $G(x,t)$ *is determined for all values of* $t \neq t_{ik}^{(\nu)}$. *It is determined for* $t=a$, $t=b$ *also, if we agree to replace the terms*:

$$\left.\frac{\partial^{n-1}g(x,a)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=a}, \qquad \left.\frac{\partial^{n-1}g(x,b)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=b}$$

in the expressions of the operators $L_i(g)_x$, *respectively by*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{\partial^{n-1}g(x,a)}{\partial x^{n-1}}, \qquad \lim_{x\to b-0}\frac{\partial^{n-1}g(x,b)}{\partial x^{n-1}}.$$ [7])

2°. *For all non-singular values of* t *the function* $G(x,t)$ *is continuous* $(n\geqq 2)$ *and has continuous derivatives up to the order* $(n-2)$ *inclusive, with respect to* x. *The derivatives of orders* $(n-1)$ *and* n *are continuous for* $x \neq t$. *When* $x=t$, *the limits*

$$\lim_{x\to t+0}\frac{\partial^{n-1}G(x,t)}{\partial x^{n-1}}, \qquad \lim_{x\to t-0}\frac{\partial^{n-1}G(x,t)}{\partial x^{n-1}} \tag{18}$$

exist, and their difference is:

$$\lim_{x\to t+0}\frac{\partial^{n-1}G(x,t)}{\partial x^{n-1}} - \lim_{x\to t-0}\frac{\partial^{n-1}G(x,t)}{\partial x^{n-1}} = 1. \tag{19}$$

3°. *For all non-singular values of* t *and for* $x \neq t$ *the function* $G(x,t)$ *satisfies the equations*:

$$L(G)_x = 0, \qquad L_i(G)_x = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{20}$$

4°. *The Green's function* $G(x,t)$ *is invariant with respect to all linear transformations* (*with constant coefficients and non-vanishing determinant*) *of the fundamental system of solutions* (7) *and of the operators* (II).

5°. *If the Green's function* $G(x,t)$ *exists, and* $F(x)$ *is an arbitrary function, which has an absolutely continuous derivative of the order* $(n-1)$ *on* (a,b) *and satisfies the conditions*

$$L_i(F) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{21}$$

the function $F(x)$ *can be represented in the form of a definite integral*:

$$F(x) = \int_a^b G(x,t)\,L(F)_t\,dt. \tag{22}$$

---

[7]) Thus the Green's function remains undetermined only for the values $t = t_{ik}^{(\nu)}$ *interior* to the interval (a,b). We shall call these values of t singular, and all others as non-singular.

The statements 1°—4° follow immediately from 7 and 6. The statement 5° follows from the definition of the Green's function $G(x, t)$, because the function $F(x)$ is a solution of the non-homogeneous problem (L), where

$$f(x) = L(F).$$

9. A more detailed study of the properties of the Green's function is based upon the notion of the adjoint problem, which was introduced in the general case by G. D. Birkhoff[8]). Suppose that

1°. *The functions*

$$P_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

possess continuous derivatives up to the order $(n - i)$ *inclusive.*

2°. *The operators* (II) *contain no terms corresponding to singular values of* t *and no integrals, so that*

$$L_i(y) \equiv A_i(y) + B_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{23}$$

where

$$A_i(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, y^{(k-1)}(a), \qquad B_i(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, y^{(k-1)}(b) \tag{24}$$

and a_{ik}, b_{ik} *are given constants.*

Integration by parts gives the so called „*Green's identity*“:

$$\int_a^b \{v L(u) - u L'(v)\}\, dx = Q_L(u, v), \tag{25}$$

where

$$L'(y) \equiv (-1)^n y^{(n)} + (-1)^{(n-1)} (P_1 y)^{(n-1)} + \ldots + P_n y \tag{26}$$

is the operator, adjoint[9]) to the operator $L(y)$, and

$$Q_L(u, v) \equiv \sum_{i=1}^{n} u^{(i-1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j (P_{n-i-j} v)^{(j)} \Big|_a^b \qquad (P_0 \equiv 1) \tag{27}$$

is a bilinear form in two sets of arguments

$$u(a), u'(a), \ldots, u^{(n-1)}(a),\ u(b), u'(b), \ldots, u^{(n-1)}(b), \tag{28}$$

$$v(a), v'(a), \ldots, v^{(n-1)}(a),\ v(b), v'(b), \ldots, v^{(n-1)}(b). \tag{29}$$

The identity (25) gives us at once

$$Q_{L'}(u, v) \equiv - Q_L(v, u). \tag{30}$$

Definition. *The problem* (L'):

$$L'(y) = f(x);\quad L_i'(y) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{31}$$

---

[8]) Boundary value and expansion problems etc. Trans. Am. Math. Soc. 9 (1908), p. 375.

[9]) Frobenius, Crelle's Journ. 85 (1878).

is adjoint to the problem (L), *if the operators* $L_i'(y)$ *are of the form*:

$$L_i'(y) \equiv A_i'(y) + B_i'(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{32}$$

$$A_i'(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik}' y^{(k-1)}(a); \quad B_i(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} b_{ik}' y^{(k-1)}(b), \tag{33}$$

and are such that the bilinear form $Q_L(u, v)$ *is zero for every pair of functions* $u(x)$, $v(x)$, *whose derivatives of the order* $(n-1)$ *are absolutely continuous on* (a, b), *and which satisfy the conditions*

$$L_i(u) = 0; \quad L_i'(v) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{34}$$

In order to obtain the operators $L_i'(y)$ of the adjoint problem (L'), we have only to introduce n forms

$$L_{n+i}(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{35}$$

in $2n$ variables (28) which, taken together with the forms

$$L_i(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

constitute a complete system of $2n$ linearly independent linear forms in $2n$ variables. Setting:

$$U_i = L_i(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

we can write $Q_L(u, v)$ in the form:

$$Q_L(u, v) \equiv \sum_{i=1}^{2n} U_i L_{2n-i+1}(v) \equiv \sum_{i=1}^{n} \{L_i(u) L_{n+i}'(v) + L_{n+i}(u) L_i'(v)\}. \tag{36}$$

The forms

$$L_i'(v) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n) \tag{37}$$

in $2n$ variables (29) constitute a complete system of $2n$ linearly independent forms, and the n first of them:

$$L_i'(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{38}$$

represent the n linear operators of the adjoint problem (L') in question.

The adjoint problem (L') is uniquely determined (in the sense of **5**), because every linear transformation of the forms (35) with non vanishing determinant merely replaces the forms (38) by linear combinations of them, which are linearly independent.

10. Theorem 5. *Under the conditions of* **5** *and* **9** *the adjoint problem* (L') *exists and is uniquely determined, and we have moreover*:

1°. *The problem adjoint to* (L') *coincides with the problem* (L).

2°. *The homogeneous problems* (L) *and* (L') *are compatible or incompatible simultaneously and they both have the same number of linearly independent solutions.*

3°. *If the homogeneous problem* (L) *is compatible, the non-homogeneous problem* (L) *has a solution, when and only when the function* $f(x)$ *satisfies the condition*:

$$\int_a^b f(x)\, v(x)\, dx = 0, \tag{39}$$

where $v(x)$ *denotes any solution of the homogeneous problem* (L').

4°. *If the Green's function* $G(x,t)$ *of the problem* (L) *exists, then the Green's function* $G'(x,t)$ *of the problem* (L') *exists also, and these two functions are connected by the relation*:

$$G'(x,t) \equiv (-1)^n G(t,x) \text{ [10]}. \tag{40}$$

The problem (L) is *selfadjoint*, if the adjoint problem (L') coincides with (L). In this case the operators $L(y)$ and $L'(y)$ are identical and the operators $L_i'(y)$ are linear combinations of the operators $L_i(y)$ and vice versa. In what follows, if we say that the adjoint problem (L') exists, we suppose implicitly that the conditions of 5 and 9 are satisfied.

11. The adjoint problem was defined only under the assumptions 1° and 2° of 9. The assumption 1° is, of course, essential for the existence of the adjoint problem, but the assumption 2° is not essential, and in spite of the fact that the adjoint problem in the sense of Birkhoff can not exist, if the operators $L_i(y)$ contain singular values of t or integrals[1]), the notion of the adjoint problem can be generalized as to be adapted to the most general case of the operators $L_i(y)$, and even to the case where, instead of a single equation of the order n, we have to deal with a system of n equations of the first order. This generalization is discussed in a paper which is to be published elsewhere.

Here we may state only the

Addition to Theorem 4. *If the conditions* 1°—2° *of* 5. *and* 1° *of* 9. *are satisfied, the Green's function* $G(x,t)$, *as function of* t, *possesses at all non-singular points a continuous derivative of the* $(n-2)^{th}$ *order, the derivatives of the* $(n-1)^{th}$ *and* n^{th} *orders being continuous, except for* $t = x$ (*and singular points*).

This follows easily from (13), if we observe that, in our case, the adjoint equation $L'(z) = 0$ admits of a fundamental system of solutions

$$z_i(t) = \frac{Y_i(t)}{\delta(t)} \qquad (i = 1, 2 \ldots n),$$

---

[10]) Cfr. Bôcher, Application and generalization of the adjoint systems, Trans. Am. Math. Soc. **14** (1913); Birkhoff[8]); Westfall, Zur Theorie der Integralgleichungen, Göttingen 1905.

[1]) pp. 108—111.

where $Y_i(t)$ denotes the cofactor of the element $u_i^{(n-1)}(t)$ in the determinant $\delta(t)$. The expression (10) for the function $g(x,t)$, then, can be rewritten as follows

$$g(x,t) = \pm \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} u_i(x) z_i(t), \qquad \begin{matrix} + & \text{if} & x > t, \\ - & \text{if} & x < t. \end{matrix}$$

After that, our assertion becomes almost obvious.

§ 3.

The structure of the principal parts of the Green's function at its poles.

12. In this section we suppose that the coefficients of the operators $L(y)$ and $L_i(y)$ of the problem (L) depend on a complex parameter ϱ, and that they are analytic on a closed region $(\mathfrak{D}_0)$ of ϱ-plane. The region $(\mathfrak{D}_0)$ may coincide with the whole ϱ-plane, in which case the above mentioned coefficients are entire transcendental functions or polynomials in ϱ [11]).

We suppose also that the conditions 1° and 2° of 5 are satisfied for all values of ϱ.

All the functions considered in the § 2, except the function $f(x)$, are now functions of ϱ, which fact will be indicated by a slight modification in the notation of § 2. For instance, we shall write:

$$P_i(x,\varrho), \quad u_i(x,\varrho), \quad L(y,\varrho) \quad \text{etc.}$$

instead of

$$P_i(x), \quad u_i(x), \quad L(y) \quad \text{etc.}$$

Under these conditions the functions

$$u_i(x,\varrho), \quad \delta(x,\varrho), \quad g(x,t,\varrho), \quad u_{ik}(\varrho), \quad \Delta(\varrho)$$

are analytic in ϱ, and the Green's function

$$G(x,t,\varrho)$$

is meromorphic in ϱ, except for two possible cases:

1°. $\Delta(\varrho) \equiv 0$, when the Green's function does not exist for any value of ϱ, and the homogeneous problem (L) is always compatible.

2°. $\Delta(\varrho)$ has no roots at all, the homogeneous problem (L) is always incompatible, and the Green's function always exists and is analytic in ϱ.

In all other cases the Green's function has poles in ϱ, which are called *characteristic values* of the problem (L). The Green's function does not exist for such values of ϱ, the non-homogeneous problem is

[11]) In what follows it is assumed that ϱ always remains in $(\mathfrak{D}_0)$.

impossible for an arbitrary $f(x)$, and the homogeneous problem has solutions which are not identically zero. These solutions are called *fundamental functions* of the problem (L), corresponding to the characteristic value of ϱ in question.

13. If ϱ_0 denotes a characteristic value, we have:

$$(1) \qquad G(x,t,\varrho)=\frac{\Gamma_m(x,t)}{(\varrho-\varrho_0)^m}+\ldots+\frac{\Gamma_1(x,t)}{\varrho-\varrho_0}+\Gamma(x,t,\varrho)$$

where $\Gamma(x,t,\varrho)$ is analytic in the vicinity of $\varrho=\varrho_0$. The rational function of ϱ:

$$(2) \qquad G^{(0)}(x,t,\varrho)=\frac{\Gamma_m(x,t)}{(\varrho-\varrho_0)^m}+\ldots+\frac{\Gamma_1(x,t)}{\varrho-\varrho_0}$$

is called the *principal part* of $G(x,t,\varrho)$ for $\varrho=\varrho_0$.

We have obviously:

$$\Delta(\varrho_0)=0,$$

and we denote by

$$(3) \qquad (\varrho-\varrho_0)^{e_1},\ \ldots,\ (\varrho-\varrho_0)^{e_\mu},\ \ldots,(\varrho-\varrho_0)^{e_n}$$
$$(e_1\geqq e_2\geqq\ldots\geqq e_\mu>e_{\mu+1}=\ldots=e_n=0)$$

the elementary divisors of the matrix

$$(4) \qquad (u_{ik}(\varrho)),$$

corresponding to the factor $(\varrho-\varrho_0)$.

If we replace the functions $u_i(x,\varrho)$ and the operators $L_i(y)$ by suitably chosen linear combinations, we always can reduce the matrix (4) to the canonical form

$$(5) \qquad u_{ik}(\varrho)=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad k\neq i,\\ (\varrho-\varrho_0)^{e_i} & \text{if} \quad k=i.\end{cases}$$

Since the problem (L) and the Green's function $G(x,t,\varrho)$ remain invariant under all these transformations, we can assume without loss of generality, that the fundamental system

$$(6) \qquad u_i(x,\varrho)$$

and the operators $L_i(y)$ are chosen so as to reduce (4) to the canonical form (5)[12].

$$(7) \qquad c_i(\varrho-\varrho_0)^{e_i}=-L_i\left\{\int_a^b g(x,t,\varrho)f(t)\,dt\right\} \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

---

[12]) It is worth noting, that the choice of these linear combinations depends on ϱ_0, and that the transformed system (6) might be modified, when we go over to another characteristic value.

which gives the expression for the Green's function:

$$(8) \qquad G(x, t, \varrho) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i(x, \varrho) L_i\{g(x, t, \varrho)\}_x}{(\varrho - \varrho_0)^{e_i}} + g(x, t, \varrho).$$

On setting in (7)

$$f(x) \equiv 0, \qquad \varrho = \varrho_0,$$

we see at once that the homogeneous problem (L) has μ linearly independent solutions:

$$(9) \qquad u_1(x, \varrho_0), \ldots, u_\mu(x, \varrho),$$

when $\varrho = \varrho_0$, and that every fundamental function of the problem (L) corresponding to the characteristic value ϱ_0 must be a linear combination of the functions (9).

We can also prove that the μ first fractions of the sum in (8) are reduced to lowest terms, so that the numerators and the denominators of each of them have no common factors in $(\varrho - \varrho_0)$. For this purpose it is enough to show that

$$L_i\{g(x, t, \varrho_0)\}_x \not\equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

It is evident that

$$u_i(x, \varrho_0) \not\equiv 0.$$

Now, supposing that

$$L_i\{g(x, t, \varrho_0)\}_x \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

and using the equalities

$$L_i\{u_k(x, \varrho)\}|_{\varrho=\varrho_0} = u_{ik}(\varrho_0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu,\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$L_i\{u_0(x, \varrho)\}|_{\varrho=\varrho_0} = 0,$$

we see that the general solution of $L(y, \varrho_0) = f(x)$ satisfies the conditions

$$L_i(y) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

for an arbitrary $f(x)$, which is impossible.

14. Theorem 6. *If the conditions* 1°, 2° *of* 5 *are satisfied and, in the neighbourhood of any root* $\varrho = \varrho_0$ *of the equation* $\Delta(\varrho) = 0$, *the matrix*

$$(4) \qquad (u_{ik}(\varrho))$$

has elementary divisors

$$(3) \quad (\varrho - \varrho_0)^{e_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ e_1 \geqq e_2 \geqq \ldots \geqq e_\mu > e_{\mu+1} = \ldots = e_n = 0),$$

then

1°. *The characteristic value* ϱ_0 *is a pole of the Green's function, of the multiplicity* e_1.

2°. *The homogeneous problem* (L) *has* μ *linearly independent solutions for* $\varrho = \varrho_0$ *(fundamental functions).*

3°. *The principal part of the Green's function for* $\varrho = \varrho_0$ *is of the form*:

$$G^{(0)}(x, t, \varrho) = \sum_{s=0}^{e_1-1} \frac{\Gamma_{e_1-s}(x, t)}{(\varrho - \varrho_0)^{e_1-s}},$$

where

$$\Gamma_k(x, t) = \sum_{i,s} \Phi_{is}(x)\, \Psi_{is}^{(k)}(t)$$

and the summation is taken over all values of i *and* s *satisfying the conditions*

$$1 \leqq i \leqq \mu; \quad s + k \leqq e_i.$$

The functions $\Phi_{is}(x)$ (*„principal functions of the problem* (L) *corresponding to* $\varrho = \varrho_0$“) *are well determined functions of* x *and have continuous derivatives of the order* n *on* (a, b). *The functions* $\Psi_{is}^{(k)}(t)$ *are well determined for all non-singular values of* t *in* (a, b).

The functions

$$\Phi_{i0}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{10}$$

represent a complete set of μ *linearly independent fundamental functions of the problem* (L) *for* $\varrho = \varrho_0$.

The set of principal functions coincides with the set of fundamental functions, when and only when all the elementary divisors are simple, that is when $e_1 = e_2 = \ldots = e_\mu = 1$.

4°. *If the matrix* (4) *is reduced to its canonical form* (5), *the conditions*

$$\int_a^b f(t)\, L_i\{g(x, t, \varrho)\}_x|_{\varrho=\varrho_0} dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{11}$$

are necessary and sufficient for the existence of a solution of the non-homogeneous problem (L) *for* $\varrho = \varrho_0$.

5°. *If the adjoint problem* (L') *exists and if the matrix* (4) *is reduced to the canonical form* (5), *the functions*

$$L_i\{g(x, t, \varrho)\}_x|_{\varrho=\varrho_0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{12}$$

represent a complete set of μ *linearly independent solutions of the homogeneous adjoint problem* (L') *for* $\varrho = \varrho_0$ [1]).

15. The case when the adjoint problem exists and $e_1 = 1$ presents a particular interest. In this case we have

$$G^{(0)}(x, t, \varrho) = \frac{1}{\varrho - \varrho_0} \sum_{i=1}^{\mu} \Phi_i(x)\, \Psi_i(t). \tag{13}$$

[1]) pp. 117—124. On the p. 124 there is given an example, in which the Green's function has multiple poles and the principal functions appear simultaneously with the fundamental functions.

The functions

$$\Phi_1(x), \ldots, \Phi_\mu(x) \tag{14}$$

and

$$\Psi_1(x), \ldots, \Psi_\mu(x) \tag{15}$$

are certain special complete sets of fundamental functions of the problems (L) and (L') respectively.

In the applications very often we know a priory two sets of fundamental functions of the problems (L) and (L'), and then the question arises, how is it possible to determine the principal part of the Green's function, using only these known sets and without reducing the matrix (4) to the canonical form, which requires complicated calculations. Let

$$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_\mu(x) \tag{16}$$

and

$$\psi_1(t), \ldots, \psi_\mu(t) \tag{17}$$

be given complete sets of fundamental functions of the problems (L) and (L'). The functions (14) are linear combinations of (16) and the functions (15) are linear combinations of (17); hence we can write

$$G^{(0)}(x, t, \varrho) = \frac{1}{\varrho - \varrho_0} \sum_{i=1}^{\mu} \theta_i(x)\psi_i(t), \tag{18}$$

where

$$\theta_i(x) = \sum_{k=1}^{\mu} c_{ik}\varphi_k(x). \tag{19}$$

It remains only to compute the matrix of the constants c_{ik}. Using the properties of the Green's function and the equations:

$$L'(\psi_j, \varrho_0) = 0; \quad L_i'(\psi_j, \varrho_0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, \mu)$$

and integrating by parts, we easily obtain:

$$\psi_j(t) = \int_a^b \{G(x, t, \varrho)\, L'(\psi_j, \varrho) - \psi_j(x)\, L(G, \varrho)_x\}\, dx + Q_L(G, \psi_j)$$

$$= \int_a^b G(x, t, \varrho)\{L'(\psi_j, \varrho) - L'(\psi_j, \varrho_0)\}\, dx + Q_L(G, \psi_j)_x.$$

The expression (36) 9 of the bilinear form $Q_L(u, v)$ gives us now:

$$\psi_j(t) = \int_a^b G(x, t, \varrho)\{L'(\psi_j, \varrho) - L'(\psi_j, \varrho_0)\}\, dx$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} L_{n+s}(G, \varrho)\{L_s'(\psi_j, \varrho) - L_s'(\psi_j, \varrho_0)\}.$$

If we substitute here

$$G(x, t, \varrho) = G^{(0)}(x, t, \varrho) + \Gamma(x, t, \varrho),$$

where $G^{(0)}(x, t, \varrho)$ is determined by (13) and $\Gamma(x, t, \varrho)$ is analytic in ϱ in the neighbourhood of $\varrho = \varrho_0$, we obtain, as $\varrho \to \varrho_0$:

$$\psi_j(t) = \sum_{i=1}^{\mu} \psi_i(t) \int_a^b \theta_i(x) \frac{\partial}{\partial \varrho} L'(\psi_j, \varrho)|_{\varrho=\varrho_0} dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{\mu} \psi_i(t) \sum_{s=1}^{n} L_{n+s}(\theta_i, \varrho_0) \frac{\partial}{\partial \varrho} L_s'(\psi_j, \varrho)|_{\varrho=\varrho_0} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Now, $\theta_i(x)$ are given by (19) and $\psi_j(t)$ are linearly independent, so that finally we obtain a system of μ^2 equations for the determination of the matrix (c_{ik}):

$$(20) \qquad \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \left\{ \int_a^b \varphi_k(x) \frac{\partial}{\partial \varrho} L'(\psi_j, \varrho)|_{\varrho=\varrho_0} dx \right\}$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} L_{n+s}(\varphi_k, \varrho_0) \frac{\partial}{\partial \varrho} L_s'(\psi_j, \varrho)|_{\varrho=\varrho_0} = \delta_{ij}\ ^{13}) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, \mu).$$

This system, which admits of a unique solution for c_{ik}, is simplified if the operators $L_i(y)$ and the bilinear form $Q_L(u, v)$ are independent of ϱ. In this case the operators $L_i'(y)$ do not depend on ϱ either, and we get instead of (20):

$$(21) \qquad \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \int_a^b \varphi_k(x) \frac{\partial}{\partial \varrho} L'(\psi_j, \varrho)|_{\varrho=\varrho_0} dx = \delta_{ij}.$$

Suppose finally that

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y + \varrho^n y.$$

The system (21) reduces then to

$$\sum_{k=1}^{\mu} c_{ik} \int_a^b n \varrho_0^{n-1} \varphi_k(x) \psi_j(x) dx = \delta_{ij}.$$

Without loss of generality we may suppose that the sets (16) and (17) are biorthogonal and normal, which yields:

$$(22) \qquad G^{(0)}(x, t, \varrho) = \frac{1}{n \varrho_0^{n-1} (\varrho - \varrho_0)} \sum_{i=1}^{\mu} \varphi_i(x) \psi_i(t).$$

---

[13]) δ_{ij} denotes, as usually, Kronecker's symbol: $\delta_{ij} = 0$ if $i \neq j$ and $\delta_{ii} = 1$.

16. In some cases it is possible to prove that all the poles of the Green's function are simple and real. Take for instance the self-adjoint problem (L) of the form:

$$(23) \qquad L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y + \lambda q(x)\, y$$
$$\equiv L^{(0)}(y) + \lambda q(x)\, y,$$
$$L_i(y) \equiv L_i^{(0)}(y) + \lambda L_i^{(1)}(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

where λ is written instead of ϱ^n, and the operators $L^{(0)}(y)$, $L_i^{(0)}(y)$, $L_i^{(1)}(y)$ do not contain λ.

In addition to the conditions 1° and 2° of 9 we suppose that

The matrix of the coefficients of the forms $L_i(y)$ contains at least one non-vanishing determinant of the order n, whose elements do not depend on λ.

In this case it is easy to show[1]) that

$$(24) \qquad Q_L(u, v) \equiv \sum_{i=1}^{n} \{L_i(u)\, M_i(v) - L_i(v)\, M_i(u)\},$$

where

$$(25) \qquad M_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

are linearly independent forms in $2n$ variables

$$(26) \qquad y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a), \quad y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b),$$

whose coefficients do not depend on λ, and which, taken together with the forms $L_i^{(0)}(y)$, constitute a complete system of $2n$ linearly independent forms. Since $Q_L(u, v)$ does not depend on λ, we have for $\lambda = 0$:

$$(27) \qquad Q_L(u, v) \equiv \sum_{i=1}^{n} \{L_i^{(0)}(u)\, M_i(v) - L_i^{(0)}(v)\, M_i(u)\}.$$

Hence

$$\sum_{i=1}^{n} \{L_i^{(1)}(u)\, M_i(v) - L_i^{(1)}(v)\, M_i(u)\} \equiv 0$$

and the bilinear form

$$(28) \qquad T(u, v) \equiv \sum_{i=1}^{n} L_i^{(1)}(u)\, M_i(v)$$

is symmetric.

Using all these facts the following theorem can be proved:

Theorem 7. *Suppose that the problem (L), whose operators are given by (1) and (2), is self-adjoint and satisfies the conditions of* **16**. *Suppose also that the coefficients of the operators $L(y)$, $L_i(y)$ are real. The Green's function $G(x, t, \lambda)$ has only simple and real poles (in λ), if*

[1]) pp. 133—134.

1°. *The function $q(x)$ is of constant sign on (a, b) and is different from zero almost everywhere on (a, b).*

2°. *The quadratic form*

$$T(y) \equiv T(y, y) \equiv \sum_{i=1}^{n} L_i^{(1)}(y)\, M_i(y) \tag{29}$$

is semidefinite and has the sign opposite to that of $q(x)$.

Introducing some supplementary conditions it is even possible to get rid of any restriction concerning the sign of $q(x)$.

The method of proof used[1]) is in essential a generalization of Stekloff's methods[14]).

The formulas of 15 can be considerably simplified in the case of Theorem 7. Suppose

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\mu(x)$$

be the given set of fundamental functions of the problem (L) corresponding to $\varrho = \varrho_0$. We always can "orthogonalize" them according to the conditions:

$$\int_a^b q(x)\, \varphi_k(x)\, \varphi_j(x)\, dx - T(\varphi_k, \varphi_j) = \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{30}$$

and then we obtain easily:

$$G^{(0)}(x, t, \varrho) = \frac{1}{n\varrho_0^{n-1}(\varrho - \varrho_0)} \sum_{i=1}^{\mu} \varphi_i(x)\, \varphi_i(t). \tag{31}$$

§ 4.

Existence and asymptotic expression of the characteristic values.

17. This section is devoted to the discussion of the existence and approximate representation of the poles of the Green's function. We assume now that the operator $L(y)$ of the problem (L) is of the form

$$L(y) \equiv L(y, \varrho) \equiv y^{(n)} + P_1(x, \varrho)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x, \varrho)\, y, \tag{1}$$

$$P_i(x, \varrho) \equiv \varrho^i p_i(x, \varrho) \equiv \varrho^i \sum_{j=0}^{i} \varrho^{-j} p_{ij}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

We shall first discuss the case in which the operators $L_i(y)$ contain neither singular values of t, nor integrals, and are polynomials in ϱ:

$$L_i(y) \equiv L_i(y, \varrho) \equiv \sum_{s=0}^{n} \varrho^s L_i^{(s)}(y), \tag{3}$$

where $L_i^{(s)}(y)$ do not depend on ϱ:

---

[1]) pp. 131—141.

[14]) Sur l'existence des fonctions fondamentales, Atti d. R. Acc. dei Lincei (5ª), 8 (1910), pp. 166—167.

$$L_i^{(s)}(y) \equiv A_i^{(s)}(y) + B_i^{(s)}(y);$$

(4)
$$A_i^{(s)}(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(s)} y^{(k-1)}(a); \qquad B_i^{(s)}(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^{(s)} y^{(k-1)}(b)$$

and $a_{ik}^{(s)}$, $b_{ik}^{(s)}$ are given constants. We shall write also

$$L_i(y) \equiv A_i(y, \varrho) + B_i(y, \varrho);$$

(5)
$$A_i(y, \varrho) \equiv \sum_{s=0}^{n} \varrho^s A_i^{(s)}(y); \qquad B_i(y, \varrho) \equiv \sum_{s=0}^{n} \varrho^s B_i^{(s)}(y).$$

As to the functions $p_{ij}(x)$, we suppose:

1°. *The functions*

(6)
$$\frac{d^2 p_{i0}(x)}{dx^2}, \quad \frac{dp_{i1}(x)}{dx}, \quad p_{ij}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 2, \ldots, n)$$

are continuous on (a, b).

2°. *The characteristic equation*

$$\Phi(\theta) \equiv \theta^n + p_{10}(x)\theta^{n-1} + \ldots + p_{n-10}(x)\theta + p_{n0}(x) = 0$$

has only simple roots

(7)
$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x).$$

3°. *The roots* (7) *of the characteristic equation are different from zero and their arguments as well as those of their differences are constant.*

It is easy to prove that the suppositions 1°–3° imply that either:

4_1°. *The functions* (7) *are of the form*

$$\varphi_i(x) = \pi_i q(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

where π_i *are constants which are distinct and different from zero, and* $q(x)$ *is a positive function which possesses a second derivative continuous on* (a, b) *and which has a lower bound* q_0 *different from zero:*

$$q(x) \geqq q_0 > 0.$$

Or: 4_2°. *The functions* (7) *are of the form:*

$$\varphi_i(x) = \pm \pi_0 q_i(x)$$

where π_0 *is a constant different from zero and* $q_i(x)$ *are positive and distinct for all values of* x *in* (a, b) *and have the same properties of continuity as* $q(x)$.

Both cases may be unified in one notation:

(8)
$$\varphi_i(x) = \pi_i q_i(x).$$

The suppositions 1°—3° restrict considerably the nature of the functions $p_{i0}(x)$.[15]) So, for instance, in the case 4_1° we must have

$$p_{i0}(x) = C_i\{q(x)\}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

where C_i are constants such that π_i are the roots of the equation

$$\Phi_0(\xi) \equiv \xi^n - C_1\xi^{n-1} + \ldots + (-1)^n C_n = 0.$$

The conditions of Theorem 2 are satisfied under the conditions 1°—3°, and the region $(\mathfrak{D})$ of Theorem 2 coincides with one of the sectors

(9) $$(\mathfrak{S}_1), (\mathfrak{S}_2), \ldots, (\mathfrak{S}_N),$$

which are made by the straight lines

(10) $$\Re(\varrho\varphi_i) = \Re(\varrho\varphi_k) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq k).$$

18. Theorem 2 ensures the existence of a fundamental system of solutions

(11) $$y_{ij}(x, \varrho) = e^{\varrho\int_a^x \varphi_i(x)\,dx}\left\{\eta_i(x) + \frac{E}{\varrho}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

on every sector $(\mathfrak{S}_j)$[16]) (cfr. 2).

At the same time we can use the fundamental system

(12) $$u_i(x, \varrho) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

of §§ 2, 3, which, in our case, is determined on the whole ϱ-plane. This system can be chosen in various ways, for instance we can impose the conditions:

$$\left.\frac{d^{s-1}u_i}{dx^{s-1}}\right|_{x=a} = \delta_{is} \qquad (i, s = 1, 2, \ldots, n).$$

The Green's function $G(x, t, \varrho)$ may be expressed in terms of either of the systems (11) and (12). We denote by $\Delta_j(\varrho)$ the determinant which we obtain from $\Delta(\varrho)$, if the functions (12) are replaced by (11) in the formula (12) **6** for $\Delta(\varrho)$.

We find:

(13) $$\Delta(\varrho) = [C]\varrho^{-\frac{n(n-1)}{2}}\Delta_j(\varrho),$$[17])

where $C \neq 0$ is a numerical constant which does not depend on ϱ.

---

[15]) The restriction concerning the arguments of the functions (7) is essential for the expansion problem only. Most of the results of this section can be proved supposing only that the arguments of all the differences of (7) are constant. Cfr. [1]) Ch. IV.

[16]) In what follows the term "sector $(\mathfrak{S}_j)$" shall be understood to mean "the part of this sector which is outside the circle $|\varrho| \leqq R_0$".

[17]) We use here a notation due to G. D. Birkhoff: $[\alpha]$ denotes an expression of the form $\alpha + \frac{E}{\varrho}$, where E is bounded for large values of $|\varrho|$.

It is not difficult to obtain an expression for $\Delta_j(\varrho)$. We set

$$w_k = \int_a^b \varphi_k(x)\,dx \tag{14}$$

and denote by $l_i^{(s)}$ the number which is determined as follows: suppose we have

$$a_{il}^{(s)} = b_{il}^{(s)} = 0 \quad \text{when} \quad l > l_i^{(s)},$$

and at least one of the numbers

$$a_{il}^{(s)}, \quad b_{il}^{(s)} \qquad (l = l_i^{(s)})$$

is different from zero. If all the cofficients $a_{il}^{(s)}$, $b_{il}^{(s)}$ are equal to zero $(l = 1, 2, \ldots, n)$ we set $l_i^{(s)} = 0$.

Now we define the number l_i as the maximum term of the sequence

$$l_i^{(s)} + s - 1 \qquad (s = 0, 1, \ldots n) \tag{15}$$

in which only terms with $l_i^{(s)} > 0$ are taken into account.

It is easy to show that

$$u_{ik}' = L_i(y_{kj}) = \varrho^{l_i}\{[A_{ik}] + e^{\varrho w_k}[B_{ik}]\}, \tag{16}$$

where

$$\begin{cases} A_{ik} = \eta_k(a) \sum\limits_{(s)} a_{i\,l_i^{(s)}}^{(s)} \varphi_k(a)^{l_i^{(s)}-1}, \\ B_{ik} = \eta_k(b) \sum\limits_{(s)} b_{i\,l_i^{(s)}}^{(s)} \varphi_k(b)^{l_i^{(s)}-1} \end{cases} \tag{17}$$

and the summation is made over all values of s for which

$$l_i^{(s)} + s - 1 = l_i.$$

Replacing u_{ik} by u_{ik}' in the expression (12) 6 for $\Delta(\varrho)$, we get:

$$\Delta_j(\varrho) = \varrho^l \begin{vmatrix} [A_{11}] + e^{\varrho w_1}[B_{11}], & \ldots, & [A_{1n}] + e^{\varrho w_n}[B_{1n}] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [A_{n1}] + e^{\varrho w_1}[B_{n1}], & \ldots, & [A_{nn}] + e^{\varrho w_n}[B_{nn}] \end{vmatrix}, \tag{18}$$

where

$$l = l_1 + l_2 + \ldots + l_n, \tag{19}$$

and (13) gives then:

$$\Delta(\varrho) = C\varrho^{l - \frac{n(n-1)}{2}} \Delta^{(0)}(\varrho), \tag{20}$$

$$\Delta^{(0)}(\varrho) = \begin{vmatrix} [A_{11}] + e^{\varrho w_1}[B_{11}], & \ldots, & [A_{1n}] + e^{\varrho w_n}[B_{1n}] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [A_{n1}] + e^{\varrho w_1}[B_{n1}], & \ldots, & [A_{nn}] + e^{\varrho w_n}[B_{nn}] \end{vmatrix}. \tag{21}$$

It ought to be noted that the formula (18) is valid only on the

sector $(\mathfrak{S}_j)$, but the formulas (20) and (21) are valid on the whole ϱ-plane.

19. It remains now to discuss the roots of the equation:

$$\Delta^{(0)}(\varrho) = 0. \tag{22}$$

Each of the equations

$$\mathfrak{Re}\, \varrho w_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{23}$$

determines two rays $(0 \to \infty)$ on the ϱ-plane, so that the equations (23) together determine 2μ $(\leqq 2n)$ *distinct* rays. We shall denote these rays by

$$d_1, d_2, \ldots, d_{2\mu}, \tag{24}$$

and by $\left(\alpha_j + \frac{\pi}{2}\right)$ the argument of the ray d_j. We suppose then that the rays are ordered so that

$$0 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2\mu} < 2\pi.$$

Let

$$d_1', d_2', \ldots, d_{2\mu}' \tag{25}$$

be a second set of rays which are different from (24) and arbitrary, subject only to the condition that the sequence

$$d_1' d_1 d_2' d_2 \ldots d_{2\mu}' d_{2\mu} d_1' \tag{26}$$

progresses in the counter-clockwise sense.

The rays (26) divide the whole ϱ-plane into 2μ sectors

$$(\mathfrak{T}_1), (\mathfrak{T}_2), \ldots, (\mathfrak{T}_{2\mu}). \tag{27}$$

Consider one of these sectors, say $(\mathfrak{T}_j)$, and let

$$w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, \ldots, w_{\nu_j}^{(j)}$$

be those numbers of the set

$$w_1, w_2, \ldots, w_n \tag{28}$$

which lie on the rays perpendicular to d_j and $d_{j+\mu}$.[18]) Now, if we set

$$w_k^{(j)} = \lambda_k^{(j)} e^{\alpha_j \sqrt{-1}} \tag{29}$$

it is always possible to arrange the numbers (28) so that

$$\lambda_1^{(j)} < \lambda_2^{(j)} < \ldots < \lambda_{\tau_j}^{(j)} < 0 < \lambda_{\tau_j+1}^{(j)} < \ldots < \lambda_{\nu_j}^{(j)}. \tag{30}$$

If all the numbers $\lambda_k^{(j)}$ are > 0, we set $\tau_j = 0$; if all the numbers $\lambda_k^{(j)}$ are < 0, we set $\tau_j = \nu_j$, and we must modify the inequalities (30)

[18]) If k is an integer different from $1, 2, \ldots, 2u$, the symbol d_k denotes the ray d_j where j is the positive residuum of $k \bmod 2\mu$. The rays d_j, $d_{j+\mu}$ constitute the entire straight line through the origin.

accordingly. The remaining numbers of the set (28) can be divided into two groups (w') and (w''), which are characterized by the conditions:

$$\text{(31)} \qquad \mathfrak{Re}(\varrho w') \to -\infty; \quad \mathfrak{Re}(\varrho w'') \to +\infty,$$

as $|\varrho| \to \infty$ on $(\mathfrak{T}_j)$.

20. The substitution

$$\varrho e^{-\alpha_j \sqrt{-1}} = \zeta = \xi + \eta \sqrt{-1}$$

transforms the ray d_j to the positive part of the imaginary ζ-axis, and the sector $(\mathfrak{T}_j)$ to a sector $(\mathfrak{T})$ of the ζ-plane containing the positive part of the imaginary ζ-axis. We have on this sector $(\mathfrak{T})$:

$$\text{(32)} \qquad \Delta^{(0)}(\varrho) = e^{\Sigma \varrho w''} \mathsf{H}_j(\zeta),$$

where

$$\text{(33)} \qquad \mathsf{H}_j(\zeta) = [M_1^{(j)}]\, e^{m_1^{(j)} \zeta} + \ldots + [M_{\sigma_j}^{(j)}]\, e^{m_{\sigma_j}^{(j)} \zeta}.$$

We denote here by

$$m_1^{(j)} < m_2^{(j)} < \ldots < m_{\sigma_j}^{(j)}$$

the real exponents and by

$$M_1^{(j)}, \ldots, M_{\sigma_j}^{(j)}$$

certain constants which may be easily expressed in terms of the exponents $\lambda_k^{(j)}$ and of the constants A_{ik}, B_{ik} respectively. We note only:

$$\text{(34)} \qquad \begin{cases} m_1^{(j)} = \begin{cases} \lambda_1^{(j)} + \ldots + \lambda_{\tau_j}^{(j)}, & \text{if } \tau_j > 0, \\ 0, & \text{if } \tau_j = 0. \end{cases} \\ m_{\sigma_j}^{(j)} = \begin{cases} \lambda_{\tau_j+1}^{(j)} + \ldots + \lambda_{\nu_j}^{(j)}, & \text{if } \tau_j < \nu_j, \\ 0, & \text{if } \tau_j = \nu_j \end{cases} \end{cases}$$

$$M_1^{(j)} = \begin{vmatrix} A_{11} A_{12} \ldots A_{1\varkappa_j} B_{1\varkappa_j+1} \ldots B_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1} A_{n2} \ldots A_{n\varkappa_j} B_{n\varkappa_j+1} \ldots B_{nn} \end{vmatrix}, \qquad M_{\sigma_j}^{(j)} = \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1\tau_j} B_{1\tau_j+1} \ldots B_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1} \ldots A_{n\tau_j} B_{n\tau_j+1} \ldots B_{nn} \end{vmatrix}$$

where the index $\varkappa_j$ is determined as follows: if some of the quantities $\mathfrak{Re}\, \varrho w_i$ remain always < 0 on $(\mathfrak{T}_j)$, then $\varkappa_j$ is the greatest value of the index i for which $\mathfrak{Re}\, \varrho w_i < 0$ on $(\mathfrak{T}_j)$. Otherwise $\varkappa_j = 0$. It is obvious that $\varkappa_j \leqq \tau_j$.

21. Theorem 8. *Suppose the conditions* 1°—3° *of* 17 *to be satisfied and all the constants*

$$M_1^{(j)}, \quad M_{\sigma_j}^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2\mu)$$

to be different from zero. In this case the problem (L) *has infinitely many characteristic values, which can be distributed into* 2μ *groups.*

The values of the j^{th} group lie in a strip (D_j) of finite width, parallel to the ray d_j and including this ray. Denoting the numbers of the j^{th} group by

$$\varrho_1^{(j)}, \varrho_2^{(j)}, \ldots, \varrho_k^{(j)}, \ldots \qquad (|\varrho_1^{(j)}| \leqq |\varrho_2^{(j)}| \leqq \ldots)$$

we have

$$|\varrho_k^{(j)}| = \frac{2k\pi}{m_{\sigma_j}^{(j)} - m_1^{(j)}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right\}. \quad [19] \tag{35}$$

We omit the index j in (33) for the sake of brevity, so that

$$\mathsf{H}_j(\zeta) \equiv \mathsf{H}(\zeta) \equiv [M_1] e^{m_1\zeta} + \ldots + M_\sigma] e^{m_\sigma \zeta}, \tag{36}$$

$$M_1 \neq 0; \quad M_\sigma \neq 0; \quad m_1 < m_2 < \ldots < m_\sigma.$$

In order to prove Theorem 8 it is enough to show that: 1°. All the roots of the equation

$$\mathsf{H}(\zeta) = 0 \tag{37}$$

which are in the sector $(\mathfrak{T})$ can be included in a strip (D) of finite width, parallel to the imaginary ζ-axis and including the positive part of it.

2°. If these roots are denoted by

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k, \ldots \quad (|\zeta_1| \leqq |\zeta_2| \leqq \ldots)$$

we have

$$|\zeta_k| = \frac{2k\pi}{m_\sigma - m_1} \left\{1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right\}. \tag{38}$$

22. The proof is based upon the following important

Lemma. *Given a function*

$$F(z, x_1, \ldots, x_n) \tag{39}$$

continuous in $x_1, \ldots, x_n$ on a finite closed region $(\mathfrak{D}_x)$ of n-dimensional space and analytic in z on a finite closed region $(\mathfrak{D}_z)$ of the complex z-plane, and such that for every fixed point $(x_1, \ldots, x_n)$ in $(\mathfrak{D}_x)$ the equation

$$F(z, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

has no more than N distinct roots, N being independent of the position

---

[19]) This fact was proved independently and by different methods by Ch. E. Wilder and by the Author [5] pp. 419–433; [1] pp. 160–176]. Our proof is reproduced in a note which is going to appear in the Journal of the London Mathematical Society. We use here Wilder's proof because of its greater simplicity and because of its applicability to more general cases. In 1920 analogous results were obtained subsequently by G. Pólya, Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen etc., Münch. Ber. 1920. Cfr. also the Thesis of E. Schwengler, Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen etc., Zürich 1925.

of this point in $(\mathfrak{D}_x)$. *If for any point in* $(\mathfrak{D}_x)$ z *is at a distance greater than* δ *from zeros of* (39) *and from the boundary of* $(\mathfrak{D}_z)$, *then*

$$|F(z, x_1, \ldots, x_n)| \geqq F_0 > 0,$$

where F_0 *is a positive constant which depends only on* δ, *but does not depend on the position of the point* $(x_1, \ldots, x_n)$ *in* $(\mathfrak{D}_x)$. [5])

23. Theorem 8 can be proved immediately for the simplified equation

$$Z(\zeta) \equiv M_1 e^{m_1 \zeta} + \ldots + M_\sigma e^{m_\sigma \zeta} = 0. \tag{40}$$

Let $\zeta = \xi + \eta\sqrt{-1}$. Since

$$Z(\zeta) = \begin{cases} M_\sigma e^{m_\sigma \zeta}\left(1 + \sum_{i=1}^{\sigma-1} e^{(m_i - m_\sigma)\zeta}\right), & \text{if } \xi \geqq 0, \\ M_1 e^{m_1 \zeta}\left(1 + \sum_{i=2}^{\sigma} e^{(m_i - m_1)\zeta}\right), & \text{if } \xi \leqq 0, \end{cases} \tag{41}$$

a positive constant h can be determined such that

$$Z(\zeta) \neq 0 \quad \text{for} \quad |\xi| \geqq \frac{h}{2}, \tag{42}$$

which proves that all the roots of the equation (40) are within the strip (D) of the width h between the two straight lines

$$\Re\mathrm{e}\,\zeta = \xi = \pm\frac{h}{2}.$$

Hence we can confine ourselves to the discussion of the values of ζ inside the strip (D). Now it is easy to prove that in every rectangle of (D) of the form

$$|\xi| \leqq \frac{h}{2}, \quad \eta_1 \leqq \eta \leqq \eta_2 \tag{Π_h}$$

the number N of the roots of (40) is contained between the limits

$$\frac{1}{2\pi}(m_\sigma - m_1)(\eta_2 - \eta_1) \pm \sigma. \text{ [20]} \tag{43}$$

The number in question is expressed by the ratio of the increase of the argument of $Z(\zeta)$ to 2π, when ζ describes the contour of (Π_h) counter-clockwise. In other words, if we set

$$Z(\zeta) = Re^{i\Theta} = X + iY,$$

we have

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_{(\Pi_h)} d\Theta = \frac{1}{2\pi}\int_{(\Pi_g)} d\Theta, \tag{44}$$

where g is any constant greater than h.

---

[5]) p. 422.

[20]) We suppose that no roots are on the boundary of (Π_h). Cfr. [1]) 168–170; 297–298; [5]) pp. 420–422.

The expressions (41) show that the parts of the integral $\int_{(\Pi_g)}$ taken over the vertical sides of (Π_g) contribute

$$\frac{1}{2\pi}(m_\sigma - m_1)(\eta_2 - \eta_1) + \varepsilon_g; \quad \varepsilon_g \to 0 \text{ when } g \to \infty.$$

On the other hand, if we write the integral (44) in the form:

$$\frac{1}{2\pi}\int d \arctan \frac{Y}{X},$$

we see at once that each of the horizontal sides contributes in absolute value no more than $\frac{\tilde{\omega}+1}{2}$, where $\tilde{\omega}$ denotes the number of real roots of the equation

$$X(\xi, \eta) = 0$$

the left hand member being considered as a function of ξ alone, for fixed η. This equation is of the type:

$$\sum_{i=1}^{\sigma} A_i e^{\lambda_i \xi} = 0, \tag{45}$$

where A_i and λ_i are real constants. Or, using the complete induction, it is easy to show that the equation (45) has at most $\sigma - 1$ real roots, so that $\tilde{\omega} + 1 \leqq \sigma$. The number N being independent of g, we have

$$\frac{1}{2\pi}(m_\sigma - m_1)(\eta_2 - \eta_1) - \sigma \leqq N \leqq \frac{1}{2\pi}(m_\sigma - m_1) + \sigma, \quad \text{Q. E. D.} \tag{46}$$

24. Now we can prove that, if the interiors of small circles of the radius δ centered at the zeros of $Z(\zeta)$ are excluded from the strip (D), then in the remaining part (D_δ) of the strip:

$$|Z(\zeta)| \geqq Z_\delta > 0, \tag{47}$$

where Z_δ is a positive constant depending only on δ. This fact can be proved by a simple application of the lemma of 22, if we observe that, ζ being in any of rectangles

$$|\xi| \leqq \frac{h}{2}, \quad 2l\pi \leqq \eta < 2(l+1)\pi,$$

the function $Z(\zeta)$ can be brought to the form:

$$Z(\zeta) = \sum_{i=1}^{\sigma} M_i e^{m_i z + x_i \sqrt{-1}} = F(z, x_1, x_2, \ldots, x_\sigma),$$

where z denotes the corresponding point of the rectangle

$$|\xi| \leqq \frac{h}{2}, \quad 0 \leqq \eta < 2\pi \qquad (z = \zeta - 2l\pi)$$

and $x_1, x_2, \ldots, x_\sigma$ are real parameters, whose values are on the interval $(0, 2\pi)$ and which depend only on l.

Returning to our function $\mathsf{H}(\zeta) = [\mathsf{Z}(\zeta)]$, the same reasoning as before shows that all the roots of the equation

$$\mathsf{H}(\zeta) = 0, \tag{48}$$

which are in the sector $(\mathfrak{T})$, lie in the interior of the strip (D) for h sufficiently large. Moreover, if ζ is in (D_δ), we have

$$\mathsf{H}(\zeta) = \mathsf{Z}(\zeta)\left\{1 + \frac{\psi(\zeta)}{\zeta}\right\}, \tag{49}$$

where $\psi(\zeta)$ is bounded on (D_δ). It we take a rectangle (Π_h) whose boundary has no points in common with excluded small circles, and which is so far from the origin, that on its boundary

$$\left|\frac{\psi(\zeta)}{\zeta}\right| < 1,$$

a known theorem asserts that equations (48) and (40) have the same number of roots in this rectangle. The formula (46) thus being proved for the number of roots of (48), a simple geometric consideration proves the evaluation (38) of $|\zeta_k|$. [1])

25. Denote by $(\mathfrak{T}_j^{(\delta)})$ the part of the sector $(\mathfrak{T}_j)$, which remains after the interiors of small circles of radius δ centered at the roots of (48) are excluded from $(\mathfrak{T}_j)$. The ray d_j divides $(\mathfrak{T}_j^{(\delta)})$ into two parts; denote by w the sum of those of the numbers

$$w_1, w_2, \ldots, w_n,$$

which satisfy the condition

$$\Re\, \varrho w_i \geqq 0,$$

when ϱ remains in one of those parts. Using the formulas (32), (33), (36), (41), (49) and the property (47) of the function $Z(\zeta)$, we have

$$|\Delta^{(\omega)}(\varrho)\, e^{-\varrho w}| \geqq N_\delta > 0, \tag{50}$$

where N_δ is a positive constant which depends only on δ.

26. We need to make but slight modifications in the preceding arguments, in order to discuss the more general case of the operators $L_i(y)$: [21])

$$L_i(y) \equiv \sum_{s=0}^{n} \varrho^s L_i^{(s)}(y) \equiv A_i(y, \varrho) + B_i(y, \varrho) + \int_a^b \alpha_i(x, \varrho)\, y^{(n-1)}(x)\, dx \tag{51}$$

where now

$$L_i^{(s)}(y) \equiv A_i^{(s)}(y) + B_i^{(s)}(y) + \int_a^b \alpha_{i_s}(x)\, y^{(n-1)}(x)\, dx.$$

In this case we replace the condition 1° of 17 by a more restrictive one:

---

[1]) pp. 170—171.

[21]) Cfr. (5) of 5.

The functions (6) *are continuous and of bounded variation on* (a, b), *and the functions* $\alpha_{is}(x)$ *possess first derivatives continuous and of bounded variation on* (a, b).

In order to evaluate

$$u'_{ik} = L_i(y_{kj})$$

we can use now (14) 3 and apply the following

Lemma. *If the function* $\psi(z)$ *is of bounded variation on* $(0, Z)$ *and the constant* $c \neq 0$, *then*

$$\int_0^Z \psi(z)\, e^{c\varrho z}\, dz = \frac{E}{\varrho} + e^{\varrho c Z}\frac{E}{\varrho}; \tag{52}$$

if $\psi(z)$ *is merely integrable, then*

$$\int_0^Z \psi(z)\, e^{c\varrho z}\, dz = E + E e^{\varrho c Z}. \tag{53}$$

Using the notations of 18 and integrating by parts, we obtain:

$$\int_a^b \alpha_{is}(x)\, y_{kj}^{(n-1)}(x)\, dx \tag{54}$$
$$= \varrho^{n-2}\{[-\alpha_{is}(a)\eta_k(a)\varphi_k(a)^{n-2}] + e^{\varrho w_k}[\alpha_{is}(b)\eta_k(b)\varphi_k(b)^{n-2}]\}.$$

The number l_i is defined now as the maximum term of the sequence

$$s_i + n - 2, \quad l_i^{(s)} + s - 1 \qquad (s = 0, 1, \ldots, n) \tag{55}$$

where s_i denotes the maximum value of the index s, for which

$$\alpha_{is}(x) \not\equiv 0 \quad \text{on} \quad (a, b)$$

and only terms with $l_i^{(s)} \neq 0$ are taken into account. The constants A_{ik}, B_{ik} must be changed accordingly.

After these modifications Theorem 8 remains true in the more general case (51) of the operators $L_i(y)$. [22])

Theorem 8 remains true for all the problems $(\bar{L})$ with the same functions $p_{i0}(x)$, $p_{i1}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ and the same numbers $l_i^{(s)}$, s_i, A_{ik}, B_{ik}. We can even say that, if δ is any given positive number, arbitrarily small, and circles of radius δ are described around all the characteristic values of the problem (L) then all the characteristic values of the problem $(\bar{L})$ sufficiently large, lie inside these circles, the

[22]) The case where the operators $L_i(y)$ contain singular values of t, instead of integral terms, has been discussed by Wilder [5]). In the same paper a theorem analogous to the theorem 8 has been proved under shlightly more general suppositions concerning the coefficients M. For a detailed discussion of some of the most important special cases see [1]) Ch. IV.

number of the characteristic values of either of the problems (L), $(\bar{L})$ being the same.

§ 5.

Expansion of the Green's function in partial fractions.

27. The results of § 4 enable us to deduce a formula for the expansion of the Green's function in partial fractions.

Theorem 9. *Suppose the conditions of Theorem* 8 (**21, 26**) *to be satisfied and denote by*

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m, \ldots \tag{1}$$

the characteristic values of the problem (L) *ordered so that*

$$|\varrho_1| \leqq |\varrho_2| \leqq \ldots \leqq |\varrho_m| \leqq \ldots .$$

If the interiors of small circles of radius δ *around each of the points* (1) *are excluded from the* ϱ*-plane, then on the remaining part* $(\mathfrak{D}_\delta)$ *of the plane we have*

$$G(x, t, \varrho) \leqq \frac{G_\delta}{|\varrho|^{n-1}}, \tag{2}$$

where G_δ *is a positive constant depending only on* δ.

For all values of ϱ *different from* (1):

$$G(x, t, \varrho) = \sum_{\nu=1}^{\infty} G^{(\nu)}(x, t, \varrho), \tag{3}$$

that is the Green's function is equal to the sum of all its principal parts. If $n \geqq 2$, *the series* (3) *converges uniformly in* x, t *on* (a, b) *and in* ϱ *on* $(\mathfrak{D}_\delta)$. *If* $n = 1$, *the series* (3) *converges uniformly in* ϱ *on* $(\mathfrak{D}_\delta)$ *and in* x, t *on every portion of the region*

$$a \leqq x \leqq b, \quad a \leqq t \leqq b$$

which has no points in common with the lines $x = t, x = a, x = b$.

28. The boundaries of the sectors $(\mathfrak{S})$ and $(\mathfrak{T})$ divide the whole ϱ-plane into sectors $(\mathfrak{R})$, each of them being simultaneously and entirely in one of the sectors $(\mathfrak{S})$ and in one of the sectors $(\mathfrak{T})$. Consider one of these sectors $(\mathfrak{R})$ and denote by $(\mathfrak{R}_\delta)$ the part of $(\mathfrak{R})$ remaining after the small circles of Theorem 9 are excluded. The numbers

$$w_1, w_2, \ldots, w_n \tag{4}$$

can be ordered so that on $(\mathfrak{R})$

$$\mathfrak{Re}\, \varrho w_1 \leqq \mathfrak{Re}\, \varrho w_2 \leqq \ldots \leqq \mathfrak{Re}\, \varrho w_r \leqq 0 \leqq \mathfrak{Re}\, \varrho w_{r+1} \leqq \ldots \leqq \mathfrak{Re}\, \varrho w_n. \tag{5}$$

Then the number w of **25** is equal to

$$w = w_{r+1} + \ldots + w_n. \tag{6}$$

There exists also a fundamental system of solutions of $L(y)=0$, which is of the form [on $(\mathfrak{R})$]:

$$(7)\qquad \begin{cases} y_i(x,\varrho)=e^{\varrho\int_a^x \varphi_i(x)\,dx}[\eta_i(x)], \\ \dfrac{d^s y_i(x,\varrho)}{dx^s}=e^{\varrho\int_a^x \varphi_i(x)\,dx}\varrho^s\varphi_i(x)^s[\eta_i(x)] \end{cases}$$
$$(i=1,2,\ldots,n;\ s=1,2,\ldots,n-1).$$

We shall use this system instead of the system $u_i(x,\varrho)$ of § 3, in order to express the Green's function, and we shall conserve other notations of § 3. We have:

$$(8)\qquad G(x,t,\varrho)=(-1)^n\frac{\Delta(x,t,\varrho)}{\Delta(\varrho)},$$

where

$$(9)\qquad \Delta(x,t,\varrho)=\begin{vmatrix} y_1(x,\varrho),\ldots, y_n(x,\varrho), & g(x,t,\varrho) \\ u_{11}(\varrho), \quad \ldots, u_{1n}(\varrho), & L_1(g)_x \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ u_{n1}(\varrho), \quad \ldots, u_{nn}(\varrho), & L_n(g)_x \end{vmatrix}.$$

The function $g(x,t,\varrho)$, by virtue of (10) 6, can be written in the form:

$$(10)\qquad g(x,t,\varrho)=\pm\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}y_k(x,\varrho)\,z_k(t,\varrho)\qquad \begin{pmatrix}+\text{ if } x>t\\ -\text{ if } x<t\end{pmatrix},$$

where

$$(11)\qquad z_k(t,\varrho)=\frac{Y_k(t,\varrho)}{\delta(t,\varrho)}$$

and $Y_k(t,\varrho)$ denotes the cofactor of the element $y_k^{(n-1)}(t,\varrho)$ in the determinant $\delta(t,\varrho)$. It is easy to show that

$$(12)\qquad z_k(t,\varrho)=e^{-\varrho\int_a^t \varphi_k(x)\,dx}\frac{[\psi_k(t)]}{\varrho^{n-1}}\qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

where

$$(13)\qquad \psi_k(t)=\frac{1}{\eta_k(t)\,\Phi'(\varphi_k(t))}.$$

Adding to the last column of $\Delta(x,t,\varrho)$ the

$$1^{\text{st}},\ 2^{\text{nd}},\ \ldots,\ \tau^{\text{th}},\ (\tau+1)^{\text{th}},\ \ldots,\ n^{\text{th}}$$

columns multiplied respectively by

$$\frac{1}{2}z_1(t,\varrho),\ \frac{1}{2}z_2(t,\varrho),\ \ldots,\ \frac{1}{2}z_\tau(t,\varrho),\ -\frac{1}{2}z_{\tau+1}(t,\varrho),\ \ldots,\ -\frac{1}{2}z_n(t,\varrho),\ ^{8})$$

---

[8]) p. 392.

we obtain

$$\Delta(x,t,\varrho)=\begin{vmatrix} y_1(x,\varrho),\ \ldots,\ y_n(x,\varrho),\ g_0(x,t,\varrho)\\ u_{11}(\varrho),\ \ldots,\ u_{1n}(\varrho),\ g_1(t,\varrho)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_{n1}(\varrho),\ \ldots,\ u_{nn}(\varrho),\ g_n(t,\varrho)\end{vmatrix}, \tag{14}$$

where

$$g_0(x,t,\varrho)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\tau} y_k(x,\varrho)\,z_k(t,\varrho) & \text{if } x>t,\\ -\sum\limits_{k=\tau+1}^{n} y_k(x,\varrho)\,z_k(t,\varrho) & \text{if } x<t.\end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} g_i(t,\varrho)=L_i(g)_x+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\tau}u_{ik}(\varrho)z_k(t,\varrho)-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=\tau+1}^{n}u_{ik}(\varrho)z_k(t,\varrho)\\ \quad=-\sum\limits_{k=\tau+1}^{n}A_i(y_k,\varrho)\,z_k(t,\varrho)+\sum\limits_{k=1}^{\tau}B_i(y_k,\varrho)\,z_k(t,\varrho)\\ \quad-\sum\limits_{k=\tau+1}^{n}z_k(t,\varrho)\int\limits_a^t\alpha_i(x,\varrho)\,y_k^{(n-1)}(x,\varrho)\,d\varrho\\ \quad+\sum\limits_{k=1}^{\tau}z_k(t,\varrho)\int\limits_t^b\alpha_i(x,\varrho)\,y_k^{(n-1)}(x,\varrho)\,dx.\end{cases} \tag{16}$$

The functions

$$e^{\varrho\int\limits_t^x\varphi_k(x)\,dx}\quad(k=1,2,\ldots,\tau;\ x\geqq t),\qquad e^{\varrho\int\limits_t^x\varphi_k(x)\,dx}\quad(k=\tau+1,\ldots,n;\ x\geqq t)$$

being bounded on $(\Re)$, the preceding formulas show that:

$$g_0(x,t,\varrho)=\frac{E}{\varrho^{n-1}}, \tag{17}$$

$$g_i(t,\varrho)=\varrho^{l_i}\frac{E}{\varrho^{n-1}}\qquad(i=1,2,\ldots,n), \tag{18}$$

$$\Delta(x,t,\varrho)=\varrho^{l-n+1}e^{\varrho w}E. \tag{19}$$

Since the determinant $\Delta(\varrho)$ in this case coincides with $\Delta_j(\varrho)$ of 18, we have

$$\Delta(\varrho)=\varrho^{l}\Delta^{(0)}(\varrho), \tag{20}$$

and finally, using (50) 25:

$$|G(x,t,\varrho)|=\frac{|\Delta(x,t,\varrho)|}{\Delta(\varrho)}\leqq\frac{|E|}{N_\delta|\varrho|^{n-1}},$$

which proves the inequality (2).

Now we can construct a system of closed contours

$$(C_1),\ (C_2),\ \ldots,\ (C_N),\ \ldots$$

such that the length C_N of (C_N) is of the order $O(R_N)$, R_N denoting the shortest distance of (C_N) from the origin, and such that one and only one characteristic value of the problem (L) lies between two consecutive contours (C_N), (C_{N+1}). Such a choice of (C_N) is always possible because of the theorem 8, 21.

Let

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_N$$

be all the distinct poles of the Green's function, within (C_N). On the one hand we have

$$J(x, t, \varrho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(C_N)} \frac{G(x, t, \varrho')}{\varrho' - \varrho} d\varrho' = G(x, t, \varrho) - \sum_{\nu=1}^{N} G^{(\nu)}(x, t, \varrho).$$

On the other hand, if $n \geqq 2$, by virtue of (2) we have

$$|J(x, t, \varrho)| \leqq \frac{G_\delta}{2\pi} \int_{(C_N)} \frac{|d\varrho'|}{|\varrho' - \varrho| \cdot |\varrho'|^{n-1}} \leqq \frac{G_\delta}{2\pi} \frac{C_N}{R_N^n \left(1 - \frac{|\varrho|}{R_N}\right)} \to 0,$$

when $N \to \infty$, uniformly for x, t in (a, b) and ϱ in $(\mathfrak{D}_\delta)$, which proves Theorem 9 in the case $n \geqq 2$.

If $n = 1$, the Green's function $G(x, t, \varrho)$ has a very simple expression and the corresponding statement of Theorem 9 may be easily proved in this case by applying Lemma 1, 38.

29. Theorem 10. *If $F(x)$ is an arbitrary function which has an absolutely continuous derivative of the order $(n-1)$ on (a, b) and satisfies the conditions*:

$$L_i(F) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

for a certain value of ϱ, different from the characteristic values of the problem (L), then

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b L(F, \varrho)_t G^{(\nu)}(x, t, \varrho) dt, \tag{22}$$

this expansion being uniformly convergent on (a, b). The conditions of Theorem 9 are supposed to be satisfied.

The formula (22) follows immediately from the expansion (3) of the Green's function and from the formula [(22), 8]:

$$F(x) = \int_a^b L(F, \varrho)_t G(x, t, \varrho) dt.$$

We shall call (22) the "preliminary form of the expansion of an arbitrary function".

§ 6.

Equiconvergence Theorem.

30. In this section we shall transform the preliminary form of the expansion of an arbitrary function $F(x)$ so as to get rid of most of the restrictions imposed on $F(x)$, and even as to be able to draw some general conclusions concerning the general case of an integrable $F(x)$.

We shall suppose here that *all the conditions of Theorem* 8, 21 *are satisfied, that the operators* $L_i(y)$ *of the problem* (L) *do not contain integrals, and that the functions*

$$p_{ij}(x) \qquad (j = 0, 1, \ldots, i;\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

possess continuous derivatives of the order $(n - i)$, *so that the adjoint problem exists* (9).

Let $\varrho = 0$ be not a characteristic value, and $F(x)$ be an arbitrary function which satisfies the conditions of Theorem 10 (29) for $\varrho = 0$. The function $F(x)$ can be expanded according to Theorem 10 as follows

$$(1) \qquad F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b L_0(F)_t\, G^{(\nu)}(x, t, 0)\, dt; \qquad L_0(y) \equiv L(y)|_{\varrho=0},$$

the series being uniformly convergent on (a, b). Denote by

$$\Sigma_N(F)$$

the sum of the N first terms of the expansion (1). Applying Green's identity (9) we have:

$$\int_a^b G^{(\nu)}(x, t, 0)\, L_0(F)_t\, dt = \int_a^b F(t)\, L_0'(G^{(\nu)})_t\, dt + Q_{L_0}(F, G^{(\nu)})_t,$$

whence

$$(2) \qquad \Sigma_N(F) = \Sigma_N^{(1)}(F) + \Sigma_N^{(2)}(F),$$

where

$$(3) \qquad \Sigma_N^{(1)}(F) = \sum_{\nu=1}^{N} \int_a^b F(t)\, L_0'(G^{(\nu)})_t\, dt,$$

$$(4) \qquad \Sigma_N^{(2)}(F) = \sum_{\nu=0}^{N} Q_{L_0}(F, G^{(\nu)})_t.$$

31. Since

$$(5) \qquad G^{(\nu)}(x, t, \varrho) = \operatorname*{Res}_{\varrho' = \varrho_\nu} \frac{G(x, t, \varrho')}{\varrho - \varrho'},$$

we have:

$$(6)\qquad \begin{cases} \Sigma_N^{(1)}(F) = -\sum_{\nu=1}^{N} \int_a^b F(t)\, L_0'\Big\{ \operatorname*{Res}_{\varrho'=\varrho_\nu} \frac{G(x,t,\varrho')}{\varrho'} \Big\}_t dt \\ \qquad\qquad = -\sum_{\nu=1}^{N} \int_a^b F(t) \operatorname*{Res}_{\varrho'=\varrho_\nu} \frac{1}{\varrho'} L_0'\{G(x,t,\varrho')\}_t dt \\ \qquad\qquad = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(C_N)} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_a^b F(t)\, L_0'\{G(x,t,\varrho)\}_t dt \end{cases}$$

where (C_N) denotes the contour of 28[23]).

The function $G(x,t,\varrho)$, as function of t, satisfies the adjoint problem (L'), and therefore

$$L'\{G(x,t,\varrho),\varrho\}_t = 0,$$

so that in (6) we can replace

$$-L_0'\{G(x,t,\varrho)\}_t \quad \text{by} \quad L'\{G(x,t,\varrho),\varrho\}_t - L_0'\{G(x,t,\varrho)\}_t.$$

Taking into account the definition of the operator $L'(y)$ we obtain easily:

$$(7)\qquad \Sigma_N^{(1)}(F)$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(C_N)} d\varrho \int_a^b F(t) \sum_{m=1}^{n} (-1)^{n-m} \varrho^{m-1} p_{m0}(t) \frac{\partial^{n-m} G(x,t,\varrho)}{\partial t^{n-m}} dt + \sigma_N^{(1)}(F),$$

where $\sigma_N^{(1)}(F)$ denotes the sum of terms of the form:

$$(8)\qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(C_N)} d\varrho \int_a^b \chi(t)\, F(t)\, \varrho^{\varkappa} \frac{\partial^{\mu} G(x,t,\varrho)}{\partial t^{\mu}} dt,$$

$\chi(t)$ being a continuous function and integers $\varkappa$ and μ satisfying the condition:

$$(9)\qquad \mu + \varkappa \leqq n-2.$$

32. In an analogous way we shall transform the sum $\Sigma_N^{(2)}(F)$. Here we have to consider three different cases:

1°. The matrix of the coefficients of the operators $L_i(y)$ contains at least one determinant of the n^{th} order, which is free from the elements of

---

[23]) The integration with respect to ϱ must be taken also over a small circle around the origin, because of the singularity of the integrand at the point $\varrho = 0$. The corresponding term vanishes, however, because of

$$L_0'\{G(x,t,0)\}_t = 0.$$

either of the columns corresponding to $y(a)$, $y(b)$ and which is not identically zero.

2°. All the determinants of 1° are identically zero, but there exists at least one determinant of the n^{th} order which is free from the elements of one of the two columns corresponding to $y(a)$ or to $y(b)$, and which is not identically zero.

3°. Among all the determinants of the n^{th} order of the matrix in question only those are not identically zero which contain both columns corresponding to $y(a)$ and $y(b)$.

Without loss of generality we may suppose that the determinant in question is different from zero for $\varrho = 0$.

33. Suppose we have the case 1°. The formula (36), 9 shows:

$$Q_{L_0}(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \{L_i^{(0)}(u) L_{n+i}^{(0)'}(v) + L_{n+i}^{(0)}(u) L_i^{(0)'}(v)\}, \tag{10}$$

where

$$L_i^{(0)'}(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

are the operators of the adjoint problem (L') for $\varrho = 0$, and where each of two sets of linear forms

$$L_i^{(0)}(y), \quad L_i^{(0)'}(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n)$$

represent a complete set of $2n$ linearly independent forms in $2n$ variables:

$$y(a), \ldots, y^{(n-1)}(a), \quad y(b), \ldots, y^{(n-1)}(b). \tag{11}$$

Suppose that the function $u(x)$ satisfies the conditions:

$$L_i^{(0)}(u) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

We can express n of the $2n$ quantities

$$u(a), \ldots, u^{(n-1)}(a), \quad u(b), \ldots, u^{(n-1)}(b) \tag{13}$$

in terms of the n remaining ones, which may be taken as

$$L_{n+i}^{(0)}(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

and we can set:

$$L_{n+1}^{(0)}(u) \equiv u(a), \quad L_{n+2}^{(0)}(u) \equiv u(b).$$

If we suppose that the function $u(x)$ satisfies the conditions

$$L_{n+i}^{(0)}(u) = 0 \qquad (i = 3, 4, \ldots, n) \tag{14}$$

in addition to the conditions (12), the values $u(a), u(b)$ remain arbitrary and we obtain:

$$Q_{L_0}(u, v) = u(a) L_1^{(0)'}(v) + u(b) L_2^{(0)'}(v),$$

which entirely determines the operators

$$L_1^{(0)'}(v), \quad L_2^{(0)'}(v).$$

The same calculations may be made for any value of ϱ, and so we can define the operators

$$L_1'(v, \varrho), \quad L_2'(v, \varrho)$$

as the coefficients of $u(a), u(b)$ in the expressions of $Q_L(u, v)$, if all the quantities

$$u'(a), \ldots, u^{(n-1)}(a), \quad u'(b), \ldots, u^{(n-1)}(b)$$

are expressed in terms of $u(a)$ and $u(b)$, according to the conditions

$$L_i(u) = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n); \quad L_{n+i}(u) = 0 \ \ (i = 3, 4, \ldots, n).^{24})$$

Suppose now that $F(x)$ satisfies the conditions

$$(15) \quad L_i^{(0)}(F) = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n); \quad L_{n+i}^{(0)}(F) = 0 \ \ (i = 3, 4, \ldots, n).$$

On substituting

$$u(t) = F(t), \quad v(t) = G^{(\nu)}(x, t, 0)$$

in (10) we have:

$$(16) \qquad Q_{L_0}(F, G^{(\nu)})_t = F(a) L_1^{(0)'}(G^{(\nu)})_t + F(b) L_2^{(0)'}(G^{(\nu)})_t.$$

The Green's function $G(x, t, \varrho)$, as function of t, is a solution of the adjoint problem (L'). Hence

$$L_i'(G, \varrho)_t = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

and

$$(17) \qquad L_i^{(0)'}(G^{(\nu)})_t = L_i^{(0)'}\left\{\operatorname*{Res}_{\varrho'=\varrho_\nu} \frac{G(x, t, \varrho')}{-\varrho'}\right\}_t = \operatorname*{Res}_{\varrho'=\varrho_\nu}\left\{\frac{L_i'(G, \varrho')_t - L_i^{(0)'}(G)_t}{\varrho'}\right\}.$$

The function under the sign Res is a linear combination of the function $G(x, t, \varrho')$ and of its first $(n-1)$ derivatives with respect to t, taken at $t = a$, $t = b$, the coefficients being rational functions in ϱ'. Expanding every coefficient in descending powers of ϱ', we shall retain only those terms for which the exponent of ϱ' plus the order of the derivative is at least $(n-2)$. Computing the Res of the sum of these terms we obtain a perfectly defined function of x, which we denote by

$$\Xi_\nu^{(i)}(x) \qquad (i = 1, 2; \ \nu = 1, 2, \ldots).$$

From this definition of $\Xi_\nu^{(i)}(x)$ it is obvious that

$$(18) \qquad \Sigma_N^{(2)}(F) = \sum_{\nu=1}^{N} \{F(a)\, \Xi_\nu^{(1)}(x) + F(b)\, \Xi_\nu^{(2)}(x)\} + \sigma_N^{(2)}(F),$$

---

[24]) The coefficients of the operators are in general rational functions in ϱ, so that it is necessary to suppose that ϱ is different from any root of their denominators.

where $\sigma_N^{(2)}(F)$ is a sum of products of $F(a)$ or $F(b)$ by the terms of the form:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{(C_N)} d\varrho\,\theta_\varkappa(\varrho)\frac{\partial^\mu G(x,t,\varrho)}{\partial t^\mu}\Big|_{t=a \text{ or } t=b}, \tag{19}$$

$\theta_\varkappa(\varrho)$ denoting a function of the order $O(\varrho^\varkappa)$ for large values of $|\varrho|$, and

$$\varkappa+\mu<n-2. \tag{20}$$

34. In the case 2° of 32, if the function $u(x)$ satisfies the conditions (12), only one of the quantities $u(a)$, $u(b)$ can be considered as arbitrary, and this quantity may be taken as equal to $L_{n+1}^{(0)}(u)$.

It is obvious also that, if $F(x)$ satisfies the conditions

$$L_i^{(0)}(F)=0 \quad (i=1,2,\ldots,n); \qquad L_{n+i}^{(0)}(F)=0 \quad (i=2,3,\ldots,n), \tag{21}$$

there must exist a relation of the form:

$$F(b)=a_0F(a) \quad \text{or} \quad F(a)=b_0F(b), \tag{22}$$

a_0, b_0 beeing constant factors, which in special cases may reduce to zero. Instead of (16) now we have respectively

$$Q_{L_0}(F,G^{(\nu)})_t=F(a)L_1^{(0)'}(G^{(\nu)})_t \tag{23}$$

or

$$Q_{L_0}(F,G^{(\nu)})_t=F(b)L_1^{(0)'}(G^{(\nu)})_t \tag{24}$$

Using the operator $L_1^{(0)'}$ we can construct the function $\Xi_\nu(x)$ in the same way as the functions $\Xi_\nu^{(i)}(x)$ have been constructed above using the operators $L_i^{(0)'}$. According as we have the first or the second case of (22) we set:

$$\Xi_\nu^{(1)}(x)=\Xi_\nu(x), \qquad \Xi_\nu^{(2)}(x)=0, \tag{25}$$

or

$$\Xi_\nu^{(1)}(x)=0, \qquad \Xi_\nu^{(2)}(x)=\Xi_\nu(x), \tag{26}$$

and we obtain for $\Sigma_N^{(2)}(F)$ the same expression (18) as in the case 1°.

In the case 3° we set

$$\Xi_\nu^{(1)}(x)\equiv 0, \qquad \Xi_\nu^{(2)}(x)\equiv 0,$$

and the formula (18) remains true, if $F(x)$ satisfies the conditions

$$L_i^{(0)}(F)=0, \qquad L_{n+i}^{(0)}(F)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{27}$$

35. We see finally that for every function $F(x)$ which possesses an absolutely continuous derivative of the $(n-1)^{\text{th}}$ order, and which satisfies the conditions (15) in the case 1°, (21) in the case 2° and (27) in the case 3°, the sum $\Sigma_N(F)$ can be transformed as follows:

$$(28)\quad \begin{cases} \Sigma_N(F) = \sum_{\nu=1}^{N} \int_a^b dt\, F(t) \sum_{m=1}^{n} (-1)^{n-m} p_{m0}(t) \operatorname*{Res}_{\varrho=\varrho_\nu} \varrho^{m-1} \dfrac{\partial^{n-m} G(x,t,\varrho)}{\partial t^{n-m}} \\ \qquad + \sum_{\nu=1}^{N} \{F(a)\, \Xi_\nu^{(1)}(x) + F(b)\, \Xi_\nu^{(2)}(x)\} + \sigma_N^{(1)}(F) + \sigma_N^{(2)}(F). \end{cases}$$

The right hand member of this equality has a definite sense for every integrable function $F(x)$, which takes on definite values at the points a, b. We shall prove moreover that $\sigma_N^{(1)}(F)$ and $\sigma_N^{(2)}(F)$ tend uniformly to zero for every integrable function $F(x)$, so that the whole discussion is reduced to that of the two first terms.

It is important to note that the assumption that $\varrho = 0$ is not a characteristic value of the problem (L), is not essential. If $\varrho = 0$ is a characteristic value, we can start from a certain initial value $\varrho = \varrho_0$ different from any characteristic value, and it is obvious that all the terms of the first sum of the right-hand member of (28) are independent of the particular choice of this initial value of ϱ_0 and the same can be proved concerning the limit of the second sum, as $N \to \infty$.[25])

The following discussion is based upon a detailed study of the asymptotic character of the Green's function $G(x,t,\varrho)$ and of its derivatives for large values of $|\varrho|$.

36. We shall use the notation of **17**, **18**, **28** taking into account that the operators $L_i(y)$ do not contain integrals and that, under the conditions of **30**, the expressions (12) **28** for the functions $z_k(t,\varrho)$ can be differentiated $(n-1)$ times with respect to t.

We have

$$(29)\quad \frac{d^m z_k(t,\varrho)}{dt^m} = \varrho^{m-n+1} e^{-\varrho \int_a^t \varphi_k(x)\,dx} [\psi_{k,m}(t)],$$

where

$$(30)\quad \psi_{k,m}(t) = \frac{(-1)^m \{\varphi_k(t)\}^m}{\eta_k(t)\, \Phi'\{\varphi_k(t)\}}; \qquad \psi_{k,0}(t) = \psi_k(t).$$

We saw in **17** that the conditions $1°-3°$ involve either $4_1°$ or $4_2°$, and in both cases we can write:

$$(31)\quad \varphi_i(x) = \pi_i q_i(x); \qquad q_i(x) \geqq q_0 > 0.$$

For the sake of brevity we set:

$$(32)\quad X_i = \int_a^x q_i(x)\,dx; \quad \xi_i = \int_a^t q_i(x)\,dx; \quad X_{0i} = \int_a^b q_i(x)\,dx;$$

---

[25]) Cfr. **45** below.

$$(33)\qquad g_{0,m}(x,t,\varrho)\equiv g_{0,m}\equiv\frac{\partial^m g_0(x,t,\varrho)}{\partial t^m};\quad g_{0,0}\equiv g_0(x,t,\varrho);$$

$$(34)\qquad g_{i,m}(t,\varrho)\equiv g_{i,m}\equiv\frac{\partial^m g_i(t,\varrho)}{\partial t^m};\quad g_{i,0}\equiv g_i(t,\varrho).$$

Then we have

$$(35)\qquad w_i=\int_a^b\varphi_i(x)\,dx=\pi_i X_{0i},$$

$$(36)\qquad \Re(\varrho\pi_1)\leqq\ldots\leqq\Re(\varrho\pi_\tau)\leqq 0\leqq\Re(\varrho\pi_{\tau+1})\leqq\ldots\leqq\Re(\varrho\pi_n)\text{ on }(\Re),$$

$$(37)\qquad g_{0,m}=\begin{cases}\varrho^{m-n+1}\sum_{k=1}^{\tau}e^{\varrho\pi_k(X_k-\xi_k)}\,\eta_k(x)\,[\psi_{k,m}(t)], & \text{if } x>t,\\ -\varrho^{m-n+1}\sum_{k=\tau+1}^{n}e^{\varrho\pi_k(X_k-\xi_k)}\,\eta_k(x)\,[\psi_{k,m}(t)], & \text{if } x<t.\end{cases}$$

$$(38)\qquad g_{i,m}=\varrho^{l_i+m-n+1}\Big\{-\sum_{k=\tau+1}^{n}e^{-\varrho\pi_k\xi_k}\,[A_{ik}\,\psi_{k,m}(t)]+\sum_{k=1}^{\tau}e^{\varrho\pi_k(X_{0k}-\xi_k)}\,[B_{ik}\,\psi_{k,m}(t)]\Big\}.$$

37. In what follows we shall use the notation:

$$(39)\qquad (-1)^n\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n & \chi\\ u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} & \beta_1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} & \beta_n\end{vmatrix}\equiv\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n;\chi)\equiv\Delta(\alpha_i;\beta_j;\chi).$$

In particular the numerator of the Green's function is:

$$(40)\qquad (-1)^n\Delta(x,t,\varrho)=\Delta\{y_i(x,\varrho);\ g_j(t,\varrho);\ g_0(x,t,\varrho)\},$$

and, more generally,

$$(41)\qquad \frac{\partial^m G(x,t,\varrho)}{\partial t^m}=\frac{\Delta\{y_i;\,g_{j,m};\,g_{0,m}\}}{\Delta(\varrho)}\qquad(m=0,1,\ldots,n-1).$$

We have obviously:

$$(42)\qquad \Delta(\alpha_i;\beta_j;\chi)=\chi\Delta(\varrho)+\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\Delta_{ji}(\varrho)$$

where $\Delta_{ji}(\varrho)$ denotes the cofactor of the element $u_{ji}(\varrho)$ [26]) in the determinant $\Delta(\varrho)$. Now (16) 18 shows:

$$(43)\qquad \Delta_{ji}(\varrho)=\begin{cases}\varrho^{l-l_j}e^{\varrho w}E_{ji}(\varrho) & \text{if } i=1,2,\ldots,\tau,\\ \varrho^{l-l_j}e^{\varrho(w-w_i)}E_{ji}(\varrho) & \text{if } i=\tau+1,\ldots,n,\end{cases}$$

[26]) Here we write $u_{ji}(\varrho)$ instead of $u'_{ji}(\varrho)$ of 18.

$E_{ji}(\varrho)$ depending only on ϱ and being bounded on $(\mathfrak{R})$. Substituting in (41) we have.

$$\frac{\partial^m G(x,t,\varrho)}{\partial t^m} = g_{0,m} + \varrho^{m-n+1} K_m(x,t,\varrho), \tag{44}$$

where $K_m(x,t,\varrho)$ is a bilinear form in the two sets of quantities:

$$e^{\varrho \pi_i X_i} \quad (i=1,2,\ldots,\tau), \qquad e^{-\varrho \pi_i (X_{0i}-X_i)} \quad (i=\tau+1,\ldots,n); \tag{45}$$

$$e^{\varrho \pi_i (X_{0i}-\xi_i)} \quad (i=1,2,\ldots,\tau), \qquad e^{-\varrho \pi_i \xi_i} \quad (i=\tau+1,\ldots,n). \tag{46}$$

Denoting these quantities respectively by

$$\tilde{\omega}_i', \quad \tilde{\omega}_i'' \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{47}$$

we have:

$$K_m(x,t,\varrho) = \sum_{i,k=1}^{n} \Omega_{i,k}^{(m)}(x,t,\varrho)\,\tilde{\omega}_i'\tilde{\omega}_k'', \tag{48}$$

where

$$\Omega_{i,k}^{(m)}(x,t,\varrho) = [\omega_{i,k}^{(m)}(x,t)]\,E_{i,k}^{(m)}(\varrho). \tag{49}$$

Here the functions $E_{i,k}^{(m)}(\varrho)$ depend only on ϱ and remain bounded on $(\mathfrak{R}_\delta)$. The functions $\omega_{i,k}^{(m)}(x,t)$ depend only on x, t and each of them is equal to a sum of products of a function of x by a function of t, both factors having a second derivative continuous on (a,b).

38. Theorem 11. *Under the conditions of* 30 *the integrals*

$$I_N^{(\varkappa,\mu)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(C_N)} d\varrho \int_a^b f(t)\,\varrho^{\varkappa} \frac{\partial^\mu G(x,t,\varrho)}{\partial t^\mu}\,dt \qquad (\varkappa+\mu \leqq n-2) \tag{50}$$

$f(x)$ being an arbitrary integrable function, and the integrals

$$j_N^{(\varkappa,\mu)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(C_N)} \theta_\varkappa(\varrho) \frac{\partial^\mu G(x,t,\varrho)}{\partial t^\mu}\Big/_{t=a \text{ or } t=b}\,dt \qquad (\varkappa+\mu < n-2) \tag{51}$$

where

$$\theta_\varkappa(\varrho) = O(\varrho^\varkappa) \text{ for large } |\varrho|,$$

tend to zero uniformly on (a,b) as $N \to \infty$.

First let us state certain lemmas, which are necessary for further considerations[1]).

Lemma 1. *Let $\varepsilon(\varrho, z, x_1, \ldots, x_m)$ be a function of a complex variable ϱ, of a real variable z, and of a certain number of parameters $x_1, \ldots, x_m$, which is determined on the half-plane*

$$\mathfrak{Re}(c\varrho) \leqq 0 \qquad (c \text{ constant} \neq 0), \tag{52}$$

for all values of z in the interval $(0, Z)$ and for all values of $x_1, \ldots, x_m$

[1]) pp. 216–217.

in a closed region (D). *Let* (Γ_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *be a sequence of circular arcs in* (52) *with centers at the origin and respective radii* R_ν, *where* $R_\nu \to \infty$ *as* $\nu \to \infty$. *Then, if on the arc* (Γ_ν), $\varepsilon(\varrho, z, x_1, \ldots, x_m)$ *is analytic in* ϱ *and tends to zero uniformly in* $\varrho, z, x_1, \ldots, x_m$, *as* $\nu \to \infty$, *the integral*

$$\int_{(\Gamma_\nu)} \varepsilon(\varrho, z, x_1, \ldots, x_m)\, e^{c\varrho z}\, d\varrho \to 0 \quad \text{as} \quad \nu \to \infty,$$

uniformly with respect to $x_1, \ldots, x_m$ *in* (D) *and with respect to* z *in the interior of* $(0, Z)$.[27])

We have on (Γ_ν):

$$|\varepsilon(\varrho, z, x_1, \ldots, x_m)| \leqq \varepsilon_\nu,$$

where ε_ν does not depend on $(\varrho, z, x_1, \ldots, x_m)$ and $\lim \varepsilon_\nu = 0$.

Hence, setting

$$c\varrho = -R_\nu(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

we have

$$\left| \int_{(\Gamma_\nu)} \varepsilon(\varrho, z, x_1, \ldots, x_m)\, e^{c\varrho z}\, d\varrho \right| \leqq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_\nu\, e^{-R_\nu z \cos\varphi}\, R_\nu\, d\varphi \leqq \pi\varepsilon_\nu \frac{1 - e^{-R_\nu z}}{z}$$

which proves Lemma 1.

Lemma 2. *Under the conditions of Lemma* 1, *if* $E(\varrho, z, x_1 \ldots x_m)$ *is uniformly bounded and* $\psi(z)$ *is an arbitrary integrable function, the integral*

$$\int_\alpha^\beta \psi(z)\, dz \int_{(\Gamma_\nu)} E(\varrho, z, x_1 \ldots x_m)\, e^{c\varrho z} \frac{d\varrho}{\varrho} \to 0 \qquad \text{as} \quad \nu \to \infty,$$

uniformly with respect to $x_1, \ldots, x_m$ *and to* α, β *in* $(0, Z)$.

If E_0 denotes the upper bound of $|E(\varrho, z, x_1 \ldots x_m)|$, we have:

$$\left| \int_\alpha^\beta \psi(z)\, dz \int_{(\Gamma_\nu)} E\, e^{c\varrho z} \frac{d\varrho}{\varrho} \right| \leqq E_0 \pi \int_0^Z |\psi(z)| \frac{1 - e^{-R_\nu z}}{R_\nu z}\, dz$$

$$\leqq E_0 \pi \left\{ \frac{1}{R_\nu \delta_\nu} \int_0^Z |\psi(z)|\, dz + \int_0^{\delta_\nu} |\psi(z)|\, dz \right\} \to 0,$$

if δ_ν tends to zero so that

$$R_\nu \delta_\nu \to \infty \quad \text{as} \quad \nu \to \infty.$$

---

[27]) That is uniformly with respect to z on any interval which is in the interior of $(0, Z)$.

Lemma 3. *If $\psi(z)$ is an arbitrary integrable function, the integral*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(z)\, e^{\varrho e^{z}}\, dz \to 0$$

as $|\varrho| \to \infty$ and $\Re(c\varrho) \leqq 0$, the convergence being uniform for all α, β in $(0, Z)$.

This lemma can be easily proved if we approximate the function $\psi(z)$ by a suitable step-function, for which the proof is immediate.

It is important to observe that Lemmas 1 and 2 hold true when arcs of bounded length of the contours (Γ_ν) are slightly deformed, the variation of length being also bounded. It is obvious that the contours (C_ν) of 28 satisfy this condition and they can replace (Γ_ν) in the statements of Lemmas 1 and 2.

Now the first part of Theorem 11 concerning the integral (50) follows from the formulas (44), (37), (48), (49), (50), if we apply Lemma 2 in a suitable way. The statement of Theorem 11 concerning the integral (51) is obvious, since the integrand is of the order $O\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)$.

39. The preceding discussion shows that if $F(x)$ is an arbitrary function which possesses an absolutely continuous $(n-1)^{\text{th}}$ derivative and which satisfies suitable boundary conditions, we always have the expansion

$$(53)\quad \begin{cases} F(x) = \lim\limits_{N \to \infty} \Sigma_N(F) \\ \quad = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_a^b F(t) \sum\limits_{m=1}^{n} (-1)^{n-m}\, p_{m0}(t) \operatorname{Res}\limits_{\varrho=\varrho_\nu} \varrho^{m-1} \frac{\partial^{n-m} G(x,t,\varrho)}{\partial t^{n-m}}\, dt \\ \quad + F(a) \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \Xi_\nu^{(1)}(x) + F(b) \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \Xi_\nu^{(2)}(x). \end{cases}$$

We now shall consider the first term of this expansion separately, and we shall suppose only that $F(x)$ is integrable. Denote

$$(54)\quad \begin{cases} J_N(F) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \displaystyle\int_{(C_N)} d\varrho \int_a^b F(t) \sum_{m=1}^{n} (-1)^{n-m}\, p_{m0}(t)\, \varrho^{m-1} \frac{\partial^{n-m} G(x,t,\varrho)}{\partial t^{n-m}} \\ \quad = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{N} \int_a^b F(t) \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-n}\, p_{m0}(t) \operatorname{Res}_{\varrho=\varrho_\nu} \varrho^{m-1} \frac{\partial^{n-m} G(x,t,\varrho)}{\partial t^{n-m}}\, dt. \end{cases}$$

Theorem 12. *Let $(\bar{L})$ be a problem analogous to the problem (L) with the same functions*

$$p_{i0}(x), \quad p_{i1}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

and with the same numbers $l_i^{(s)}$ and the same coefficients $a_{i l_i^{(s)}}^{(s)}$, $b_{i l_i^{(s)}}^{(s)}$.

Denoting by $\bar{J}_N(F)$ *the integral* $J_N(F)$ *for the problem* $(\bar{L})$, *the difference*

$$J_N(F) - \bar{J}_N(F) \tag{55}$$

tends to zero uniformly on (a, b) *as* $N \to \infty$, *for every integrable function* $F(x)$. *Denoting by* $\bar{\Xi}_\nu^{(i)}(x)$ *the functions corresponding to* $\Xi_\nu^{(i)}(x)$ *for the problem* $(\bar{L})$, *the series*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \{\Xi_\nu^{(i)}(x) - \bar{\Xi}_\nu^{(i)}(x)\} \qquad (i = 1, 2)$$

converge to zero uniformly on (a, b), *if the operators* $L_i^{(0)'}$ *of* **33, 34** *coincide for both problems* (L) *and* $(\bar{L})$[1]).

Under the conditions of Theorem 12, the principal terms in the expressions (44) of

$$\frac{\partial^m G(x, t, \varrho)}{\partial t^m}, \qquad \frac{\partial^m \bar{G}(x, t, \varrho)}{\partial t^m}$$ [28])

are the same, so that the difference (55) can be reduced to a sum of terms, to each of which Lemma 2 is applicable. This proves the first statement of Theorem 12.

The second statement of Theorem 12 will be proved, if we observe that, according to **33, 34** both series

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \{L_i^{(0)'}(G^{(\nu)})_t - \Xi_\nu^{(i)}(x)\}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \{L_i^{(0)'}(\bar{G}^{(\nu)})_t - \bar{\Xi}_\nu^{(i)}(x)\}$$

converge uniformly to zero and that the functions

$$L_i^{(0)'}\left\{\frac{G(x, t, \varrho) - \bar{G}(x, t, \varrho)}{\varrho}\right\}$$

are of the order $O\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)$ on (C_N).

Theorem 12 enables us to compare the expansions of an arbitrary function $F(x)$ for various problems (L) and therefore this theorem may be called *equiconvergence theorem.*

For the special case of Sturm-Liouville's functions an analogous, theorem was proved by W. Stekloff[29]) and by A. Haar[30]). For the equations of the n^{th} order, a theorem which essentially coincides with the equiconvergence theorem (for interior points of (a, b)) was proved first by the Author[31]).

[1]) Ch. V. This result was not explicitly stated but might be derived immediately from the formulas therein given.

[28]) $\bar{G}(x, t, \varrho)$ denotes the Green's function of the problem $(\bar{L})$.

[29]) Sur les expressions asympt. etc., Proc. Charcoff Math. Soc. **10** (1907—1908), pp. 96—97.

[30]) Zur Theorie der orthog. Funktionen-Systeme, Math. Ann. **69** (1912), p. 355.

[31]) Sur quelques points de la theorie des equat. differ. etc., Rend. di Pal. **34** (1912), pp. 345—382.

§ 7.

Expansion Problem.

40. Now we can compare our expansion $J_N(F)$ with the classical Dirichlet's integral of the theory of Fourier's series, or with the analogous integrals. This comparison is furnished by the following

Theorem 13. *Under the conditions of* **30** *there exists a set of constants* $N_1, N_2, \ldots, N_n$ *depending on* N *such that if*

$$(1) \qquad T_N(F) = \frac{1}{\pi} \int_a^b dt\, F(t) \sum_{k=1}^{n} \omega_k(t)\, q_k(t)\, \frac{\sin N_k(X_k - \xi_k)}{X_k - \xi_k},$$

$$(2) \qquad \omega_k(t) = \frac{\{\varphi_k(t)\}^{n-1}}{\Phi'\{\varphi_k(t)\}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

the difference

$$(3) \qquad J_N(F) - T_N(F)$$

tends to zero as $N \to \infty$, *for every integrable function* $F(x)$, *and uniformly on the interior of* (a, b)[32]).

We have

$$J_N(F) = J'_N(F) + J''_N(F),$$

where

$$(4) \quad J'_N(F) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{(\Re)} \int_{(c_N)} d\varrho \int_a^b F(t) \sum_{m=1}^{n} (-1)^{n-m}\, p_{m0}(t)\, \varrho^{m-1} g_{0,n-m}(x,t,\varrho)\, dt,$$

$$(5) \quad \begin{cases} J''_N(F) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \displaystyle\sum_{(\Re)} \int_{(c_N)} \Re(F, x, \varrho)\, d\varrho; \\ \\ \Re(F, x, \varrho) = \displaystyle\int_a^b F(t) \sum_{m=1}^{n} (-1)^{n-m}\, p_{m0}(t) K_{n-m}(x, t, \varrho)\, dt. \end{cases}$$

Here (c_N) denotes the part of (C_N) intercepted by $(\Re)$, and the summation is extended over all the sectors $(\Re)$. Using (48), (49) of **37** and Lemma 3, we see at once that $\Re(x, t, \varrho)$ reduces to a sum of terms of the form

$$\varepsilon(x, \varrho)\, e^{\varrho \pi_i X_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, \tau); \qquad \varepsilon(x, \varrho)\, e^{-\varrho \pi_i (X_{0i} - X_i)} \quad (i = \tau + 1, \ldots, n),$$

where $\varepsilon(x, \varrho) \to 0$ uniformly on (c_N). A suitable application of Lemma 1 proves that the integral $J''_N(F)$ tends to zero uniformly on the interior of (a, b).

---

[32]) It follows immediately from here that the difference (55) **39**, $\to 0$ as $N \to \infty$, uniformly on the interior of (a, b), for any integrable function $F(x)$ and for any pair of problems (L) satisfying the conditions of **30**, provided the functions $p_{i0}(x)$ are the same for both problems.

Now, using the formulas of 36 and remembering that $\varphi_k(x)$ satisfies the characteristic equation, we easily obtain

$$J'_N(F)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{(\mathfrak{R})}\Big\{-\int_a^x dt\cdot F(t)\sum_{k=1}^{\tau}\omega_k(t)\frac{\eta_k(x)}{\eta_k(t)}\int_{(c_N)}e^{\varrho\pi_k(X_k-\xi_k)}[\varphi_k(t)]\,d\varrho$$
$$+\int_x^b dt\cdot F(t)\sum_{k=\tau+1}^{n}\omega_k(t)\frac{\eta_k(x)}{\eta_k(t)}\int_{(c_N)}e^{\varrho\pi_k(X_k-\xi_k)}[\varphi_k(t)]\,d\varrho\Big\}.$$

A simple application of Lemma 2 shows that the omission of the brackets introduces an error which $\to 0$, uniformly on (a, b), so that setting

$$\begin{cases} J_N^{(0)}(F)=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\sum_{(\mathfrak{R})}\Big\{-\int_a^x dt\cdot F(t)\sum_{k=1}^{\tau}\omega_k(t)\frac{\eta_k(x)}{\eta_k(t)}\int_{(c_N)}e^{\varrho\pi_k(X_k-\xi_k)}\varphi_k(t)\,d\varrho \\ \qquad +\displaystyle\int_x^b dt\cdot F(t)\sum_{k=\tau+1}^{n}\omega_k(t)\frac{\eta_k(x)}{\eta_k(t)}\int_{(c_N)}e^{\varrho\pi_k(X_k-\xi_k)}\varphi_k(t)\,d\varrho\Big\}, \end{cases}$$

the difference

$$J'_N(F)-J_N^{(0)}(F)\to 0, \quad \text{uniformly on } (a, b).$$

In (6) the integration with respect to ϱ can be performed immediately, and a simple consideration shows that

$$(7)\qquad J_N^{(0)}(F)=\frac{1}{\pi}\int_a^b F(t)\sum_{k=1}^{n}\omega_k(t)\frac{\eta_k(x)}{\eta_k(t)}\,\frac{\sin r_N|\pi_k|(X_k-\xi_k)}{X_k-\xi_k}\,q_k(t)\,dt,$$

where r_N denotes the distance from the origin to either of two points of intersection of (C_N) with the imaginary ϱ-axis[33]). Now, using well known properties of Fourier's coefficients of an integrable function, we can replace $\frac{\eta_k(x)}{\eta_k(t)}$ by 1, the error thus introduced tending to zero uniformly on (a, b), so that finally

$$J_N(F)-\mathsf{T}_N(F)\to 0 \qquad (N_k=r_N|\pi_k|)$$

uniformly on the interior of (a, b).

41. The integral $\mathsf{T}_N(F)$ replaces the classical integral

$$(8)\qquad S_N(F)=\frac{1}{\pi}\int_a^b F(t)\,\frac{\sin N(x-t)}{x-t}\,dt$$

of the theory of Fourier's series. Taking into account the relation

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(t)=1,$$

[33]) It is tacitly assumed here that these points are equidistant from the origin. Obvious modifications in the arguments of the text suffice to meet the general case.

it is easy to show that if the integral $S_N(F)$ tends to a limit as $N \to \infty$, the integral $\mathsf{T}_N(F)$ tends to the same limit[1]). Analogous conclusions can be drawn concerning the summability of the integral $\mathsf{T}_N(F)$. On the other hand it is possible to show that, ir general, the difference

$$\mathsf{T}_N(F) - S_N(F)$$

does not tend to zero for *every* integrable $F(x)$. This means, that the integral $\mathsf{T}_N(F)$ has its own theory of convergence and of summability, which is not essentially different, however, from that of the ordinary Fourier's series. The various details of this theory will be ommitted here. They have been previously discussed by the Author[1]).

42. With this we leave the case of the interior points of (a, b), and proceed to the discussion of the integral $J_N(F)$ at the end points $x = a$, $x = b$. We suppose that *the function $F(x)$ is of bounded variation in the neigbourhood of $x = a$, $x = b$,* so that there exists a positive number δ, arbitrarily small but fixed, such that $F(x)$ is of bounded variation on both intervals $(a, a+\delta)$, $(b-\delta, b)$.

The results of **40** concerning the integral $J'_N(F)$ hold true at the points $x = a$, $x = b$ also, and since

$$S_N(F)|_{x=a} \to \frac{1}{2} F(a+0); \quad S_N(F)|_{x=b} \to \frac{1}{2} F(b-0),$$

we have

$$(9) \qquad J'_N(F)|_{x=a} \to \frac{1}{2} F(a+0); \quad J'_N(F)|_{x=b} \to \frac{1}{2} F(b-0).$$

It remains only to discuss the integral $J''_N(F)|_{x=a,\,b}$. We denote by

$$J_N^{\alpha,\beta}(F, x)$$

the integral which we obtain from $J''_N(F)$, if we integrate between the limits α and β, instead of between a and b.

Using the previous notation we have obviously

$$(10) \qquad J_N^{\alpha,\beta}(F, x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{(\mathfrak{R})} \int_{(c_R)} \mathfrak{R}_{\alpha,\beta}(F, x, \varrho)\, d\varrho,$$

where

$$(11) \qquad \mathfrak{R}_{\alpha,\beta}(F, x, \varrho) = \int_a^\beta F(t) \sum_{m=1}^{n} (-1)^{n-m} p_{m0}(t)\, K_{n-m}(x, t, \varrho)\, dt.$$

43. The integral (10) enjoys following properties:

1°. *For every integrable function $F(x)$ and for every pair of values of α, β, satisfying the condition*

$$a < \alpha \leqq \beta < b,$$

---

[1]) pp. 234—236.

[1]) Chapter V.

the integral $J_N^{\alpha,\beta}(F,x)$ *tends to zero as* $N\to\infty$, *uniformly with respect to* x *in* (a,b).

2°. *The integral* $J_N^{\alpha,\beta}(1,x)$ *is uniformly bounded for all values of* α,β,x *in* (a,b).

3°. *If* α,β *have any fixed values in the interior of* (a,b), *the expressions*

$$J_N^{a,\alpha}(1,a);\quad J_N^{a,\alpha}(1,b);\quad J_N^{\beta,b}(1,a);\quad J_N^{\beta,b}(1,b) \tag{12}$$

tend to definite limits which are independent of α,β.

The formulas (48), (49) of **37** and Lemma 3 show that (10) reduces to a sum of terms of the form

$$\int_{(c_N)}\varepsilon(x,\varrho)\,e^{c\varrho(b-\beta)}\,d\varrho;\qquad \int_{(c_N)}\varepsilon(x,\varrho)\,e^{c\varrho(\alpha-a)}\,d\varrho,$$

$$\mathfrak{Re}(c\varrho)\leqq 0;\qquad \varepsilon(x,\varrho)\to 0 \text{ uniformly},$$

whereupon the proof of the statement 1° is given by Lemma 1.

The proof of the statement 2° follows if we observe that the integral

$$J_N^{\alpha,\beta}(1,x)=\int_{(C_N')}E\,\frac{d\varrho}{\varrho}$$

is bounded.

In order to prove the statement 3°, let us take for instance

$$J_N^{a,\alpha}(1,a)=\sum_{(\Re)}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{(c_N)}d\varrho\int_0^a\sum_{m=1}^{n}(-1)^{n-m}\,p_{m0}(t)\,K_{n-m}(a,t,\varrho)\,dt.$$

Using the expression (48) **37** for $K_m(x,t,\varrho)$ and integrating by parts, we obtain under the sign $\int d\varrho$ an expression of the form

$$\frac{1}{\varrho}\{\mathsf{A}_{\Re}+\varepsilon(\varrho)\},$$

where $\mathsf{A}_{\Re}$ is a constant which depends on the sector $(\Re)$, and $\varepsilon(\varrho)$ tends to zero uniformly on (c_N).

Hence, denoting by $\theta_{\Re}$ the angle of the sector $(\Re)$, we have:

$$J_N^{a,\alpha}(1,a)=\sum_{(\Re)}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{(c_N)}\frac{d\varrho}{\varrho}\{\mathsf{A}_{\Re}+\varepsilon(\varrho)\}\to\sum_{(\Re)}\mathsf{A}_{\Re}\cdot\theta_{\Re}.$$

The constants $\mathsf{A}_{\Re},\theta_{\Re}$ depend on the sector $(\Re)$ and therefore they depend on the arbitrary choice of the rays d_i' (**19**). Nevertheless the final result $\sum_{(\Re)}\mathsf{A}_{\Re}\theta_{\Re}$ does not involve any arbitrariness, because the order of the numbers $w_1,w_2,\ldots,w_n$ can change only when ϱ crosses one of the rays

$$\mathfrak{Re}(\varrho w_i)=0;\qquad \mathfrak{Re}(\varrho w_i)=\mathfrak{Re}(\varrho w_k), \tag{13}$$

so that the constants $A_{\mathfrak{R}}$ remain the same for all the sectors $(\mathfrak{R})$ which lie between any two consecutive rays of the set (13).

44. Using the results of **43** and a known theorem of Lebesgue[34]) we can be sure, that for every integrable function $F(x)$, which is of bounded variation in the neighbourhood of $x=a$, $x=b$,

$$(14)\qquad \begin{cases} J_N(F)|_{x=a} \to A_a F(a+0) + B_a F(b-0), \\ J_N(F)|_{x=b} \to A_b F(a+0) + B_b F(b-0), \end{cases}$$

where A_a, B_a, A_b, B_b are perfectly determined constants, which do not depend on the function $F(x)$. Moreover, it is easy to show that *if* $\Phi(x)$ *is a continous function of bounded variazion on* (a, b) *and*

$$(15)\qquad \Phi(a)=0, \quad \Phi(b)=0,$$

the integral $J_N(\Phi)$ *converges to* $\Phi(x)$ *uniformly on* (a, b).

Taking into account that

$$J_N(\Phi) = J'_N(\Phi) + J''_N(\Phi)$$

and that the difference

$$J'_N(\Phi) - \mathsf{T}_N(\Phi)$$

tends uniformly to zero and the integral $\mathsf{T}_N(\Phi)$ tends uniformly to $\Phi(x)$, it remains only to prove, that for our function $\Phi(x)$, the integral

$$J''_N(\Phi) = J_N^{a,b}(\Phi, x)$$

tends uniformly to zero. This fact follows immediately from the formula

$$J_N^{a,b}(\Phi, x) = J_N^{a,a+\delta}(\Phi, x) + J_N^{a+\delta, b-\delta}(\Phi, x) + J_N^{b-\delta, b}(\Phi, x),$$

where the middle term tends uniformly to zero for fixed δ, and the extreme terms can be made as small as we please by choosing δ sufficiently small (applying the second law of the mean).

45. Now everything is prepared for the proof of the

Theorem 14. *Let* $F(x)$ *be an arbitrary function integrable on* (a, b), *and denote by*

$$(16)\qquad \begin{cases} \sigma_N(F, x) = \sum_{\nu=1}^{N} \int_a^b F(t) \sum_{m=1}^{n} (-1)^{n-m} p_{m0}(t) \operatorname*{Res}_{\varrho=\varrho_\nu} \varrho^{m-1} \dfrac{\partial^{n-m} G(x, t, \varrho)}{\partial t^{n-m}} d \\ \qquad + \sum_{\nu=1}^{N} \{F(a+0)\, \Xi_\nu^{(1)}(x) + F(b-0)\, \Xi_\nu^{(2)}(x)\}, \end{cases}$$

where the factors $F(a+0)$, $F(b-0)$ *may be replaced by zero in case these two limits do not exist. Then*

---

[34]) Sur les intégrales singulières, Ann. Fac. Toulouse **1** (ser. 3), 1909, pp. 65, 69—70.

1°. *The difference*

$$\sigma_N(F, x) - T_N(F) \to 0 \quad as \quad N \to \infty,$$

uniformly on the interior of (a, b).

2°. *If* $F(x)$ *is of bounded variation in the neighbourhood of* $x = a, b$, *we have*

$$\sigma_N(F, a) \to F(a+0), \qquad \sigma_N(F, b) \to F(b-0), \tag{17}$$

with no further restrictions for $F(x)$ *in the case* 1° *of* 32.

In the case 2° *of* 32 *the equalities* (17) *hold true if* $F(x)$ *satisfies one of the corresponding boundary conditions*

$$\begin{aligned} F(b-0) &= a_0 F(a+0), \\ F(a-0) &= b_0 F(b-0). \end{aligned} \tag{18}$$

In the case 3° *of* 32, (17) *is true if*

$$F(a+0) = 0, \qquad F(b-0) = 0.$$

3°. *The series*

$$\sigma(F, x) = \lim_{N \to \infty} \sigma_N(F, x)$$

converges to $F(x)$ *uniformly on* (a, b) *for every continuous function* $F(x)$ *of bounded variation, satisfying the conditions of the preceding statement* 2°.

The statement 1° is obvious. Denote now by $F_1(x)$ the auxiliary function, which was used in 33—35. The results of 33—35, 38 show immediately that

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \sigma(F_1, x) \\ &= \lim_{N \to \infty} J_N(F_1) + F_1(a) \sum_{\nu=1}^{\infty} \Xi_\nu^{(1)}(x) + F_1(b) \sum_{\nu=1}^{\infty} \Xi_\nu^{(2)}(x). \end{aligned} \tag{19}$$

Putting here $x = a$ or $x = b$, we have in virtue of (14):

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{\infty} \Xi_\nu^{(1)}(a) + A_a = 1; & \sum_{\nu=1}^{\infty} \Xi_\nu^{(2)}(a) + B_a = 0; \\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \Xi_\nu^{(1)}(b) + A_b = 0; & \sum_{\nu=1}^{\infty} \Xi_\nu^{(2)}(b) + B_b = 1. \end{cases} \tag{20}$$

These relations prove the assertion 2° of our theorem. The proof of the assertion 3° follows if we set

$$\Phi(x) = F(x) - F_1(x)$$

and use the results of 44 and the fact that the sum $\sigma_N(\Phi, x)$ reduces to $J_N(\Phi)$, because of $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$, and that the series $\sigma(\Phi, x)$, $(\sigma F_1, x)$ are uniformly convergent.

46. It is interesting to observe that the statement 1° of Theorem 14 holds true if we replace $\sigma_N(F, x)$ by the simpler expression

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{N}\int_a^b F(t)\,p_{n0}(t)\operatorname*{Res}_{\varrho=\varrho_\nu}\varrho^{n-1}G(x,t,\varrho)\\ &=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{(C_N)}\varrho^{n-1}d\varrho\int_a^b F(t)\,p_{n0}(t)\,G(x,t,\varrho)\,dt = I_N(F,x)\ ^{35})\end{aligned}\right.$$

and at the same time replace $\omega_k(x)$ in (1) by

$$\chi_k(x) = -\frac{p_{n0}(x)}{\varphi_k(x)\,\Phi'\{\varphi_k(x)\}} \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

The statements 2° and 3° of Theorem 14, however, do not hold true after this replacement in the general case, unless $F(a+0)=0$, $F(b-0)=0$. If these conditions are not satisfied, the integral $I_N(F, x)$ will not converge uniformly on (a, b), even for $F(x)$ continuous and of bounded variation.

47. Some special cases of the expansion of Theorem 14 deserve to be mentioned separately:

1°. The operators of the problem (L) are of the form:

$$L(y) \equiv L_0(y) + \varrho^n q(x) y; \quad q(x) \geqq q_0 > 0;$$
$$L_i(y) \equiv L_i^{(0)}(y) + \varrho^n L_i^{(1)}(y) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

and all the conditions of **16** are satisfied. We suppose moreover that the matrix of the forms $L_i^{(0)}(y)$ has at least one determinant of the n^{th} order which is $\neq 0$, and which is free from the elements corresponding to $y(a)$, $y(b)$. For the sake of brevity we shall consider a special case only, namely that in which

$$L_1^{(1)}(y) = y(a), \quad L_2^{(1)}(y) \equiv y(b); \quad L_i^{(1)}(y) \equiv 0 \quad (i=3, 4, \ldots, n).$$

The quadratic form (**16**)

$$T(y) \equiv T(y, y) = \sum_{i=1}^{n} L_i^{(1)}(y)\,M_i(y) \equiv y(a)\,M_1(y) + y(b)\,M_2(y)$$

being semidefinite, we must have:

$$M_1(y) \equiv k_{11}\,y(a) + k_{12}\,y(b); \quad M_2(y) = k_{21}\,y(a) + k_{22}\,y(b); \quad k_{12} = k_{21},$$

so that in this case

$$\Xi_\nu^{(1)}(x) = -\operatorname*{Res}_{\varrho=\varrho_\nu}\varrho^{n-1}\{k_{11}\,G(x, a, \varrho) + k_{21}\,G(x, b, \varrho)\},$$
$$\Xi_\nu^{(2)}(x) = -\operatorname*{Res}_{\varrho=\varrho_\nu}\varrho^{n-1}\{k_{12}\,G(x, a, \varrho) + k_{22}\,G(x, b, \varrho)\},$$

---

35) This integral was used by G. D. Birkhoff.

and finally

$$(22)\quad \begin{cases} \sigma(F,x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b q(t)\,F(t) \operatorname*{Res}_{\varrho=\varrho_\nu} \varrho^{n-1} G(x,t,\varrho)\,dt - \operatorname*{Res}_{\varrho=\varrho_\nu} \varrho^{n-1} T(F,G)_t \right\} \\ \qquad = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x) \{ \int_a^b q(t)\,F(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt - T(F,\varphi_\nu) \}\ ^{36}), \end{cases}$$

where $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_\nu(x), \ldots$ denote the set of fundamental functions of the problem (L), which are supposed to be orthogonalized according to (30), **16**.

The series

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x)\,T(1,\varphi_\nu)$$

enjoys the remarkable property that its sum is zero at every interior point of (a,b), and is not zero at the end-points a, b.

This fact shows that the theorems of Cantor and Du Bois Reymond are not true for our general expansions in series of the fundamental functions.

2°. When all the operators $L_i^{(1)}(y)$ reduce to zero, the form $T(u,v)$ vanishes and we get the case, which was treated by Birkhoff[8]) and by the Author[31]):

$$\sigma(F,x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x) \frac{\int_a^b q(t)\,F(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt}{\int_a^b q(t)\,\varphi_\nu(t)^2\,dt}.$$

3°. A curious example of an expansion containing fundamental and principal functions simultaneously is furnished by the problem:

$$L(y) \equiv y'' + \varrho^2 y; \qquad L_1(y) \equiv y'(1) - y'(0); \qquad L_2(y) \equiv y(1) + 2\,y(0).$$

Here we obtain:

$$(23)\quad \begin{cases} \sigma(F,x) = 2(3x-1)\left\{ \int_0^1 F(t)\,dt + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \cos 2\nu\pi x \int_0^1 F(t) \cos 2\nu\pi t\,dt \right\} \\ \qquad + 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin 2\nu\pi x \int_0^1 (2-3t)\,F(t) \sin 2\nu\pi t\,dt, \end{cases}$$

the fundamental functions being

$$3x-1, \ \sin 2\nu\pi x,$$

and the principal functions

$$(3x-1)\cos 2\nu\pi x.$$

---

[36]) In the expression of the bilinear form $T(F,v)$ we must replace $F(a)$, $F(b)$ by $F(a+0)$, $F(b-0)$ respectively.

The series (23) represents the arbitrary function $F(x)$ on the interior of $(0, 1)$ under the same conditions as the classical Fourier's series, the difference between the sums of the N first terms of both expansions tending to zero for any integrable function, uniformly on the interior of $(0, 1)$. At the end-points the sum of (23) is equal to $F(+0)$, $F(1-0)$, if

$$2F(+0)+F(1-0)=0.$$

We have not touched here the expansion problem in the case where the operators $L_i(y)$ contain integrals. This problem, however, has been discussed by the Author[1]).

1925, Dec. 9. Dartmouth College.

---

[1]) pp. 231–235.

(Eingegangen am 23. Dezember 1925.)

On bounded polynomials in several variables.

By

O. D. Kellogg in Cambridge, Mass.

1. Introduction.

The properties of bounded polynomials have been of interest ever since the appearance of the celebrated memoir of Tschebychev entitled Theorie des méchanismes connus sous le nom de parallelogrammes[1]). Questions concerning them arise not only in problems of polynomial approximation[2]), but also in connection with the theory of analytic functions. For polynomials in one variable, there is a considerable literature[3]). For polynomials in several variables, less has been done[4]).

The present notes had their origin in a study of the question as to the region of convergence of the power-series obtained by dropping the parentheses in series of harmonic polynomials known to converge in a certain circle. For this raised the question, given the maximum absolute value of a homogeneous polynomial of degree n in a circle about the

[1]) Mémoirs présentés à l'Academie Impérial des Sciences de St.-Petersbourg par divers savants, 7 (1852), pp. 539—568; Oeuvres 1 (Petrograd 1899), pp. 111—143.

[2]) For an extensive bibliography on the approximation problem, see the report of Dunham Jackson on The general theory of approximation by polynomials and trigonometric sums, Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1921), pp. 415—431.

[3]) See the articles of I. Schur and G. Szegö in various numbers of the Mathematische Zeitschrift, in particular, I. Schur, Über das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms in einem gegebenen Intervall, 4 (1919), pp. 271—287; G. Szegö, Über einen Satz von A. Markoff, 23 (1925), pp. 45—61, also the literature cited by these authors. In addition may be cited Szegö in Acta Lit. ac. Sci. Reg. Univ. Hungaricae Francisco-Josephinae 3 (1923), Féjer in Journ. für Math. u. Phys. 146 (1916), and Math. Ann. 85 (1922), Egerváry in Archiv f. Math. u. Phys. 27 (1918), Dulac in Acta Math. 31 (1907).

[4]) But see Tonelli, I polynomi d'approssimazione de Tschebichev, Annali di Mat. 15 (1908), esp. p. 73; J. Chokhatte, Sur une formule générale dans la théorie des polynomes de Tschebycheff et ses applications, Comptes Rendus 181 (1925), pp. 329—331.

origin, what can be said of its coefficients? Results on this problem are attained in the following pages for polynomials in two and in m variables. The first derivatives of bounded homogeneous and non-homogeneous polynomials are then studied, and extensions of theorems due to S. Bernstein and A. Markoff are obtained. It is shown that all results hold for polynomials with complex coefficients.

2. The coefficients of bounded homogeneous polynomials.

In what follows, we shall be concerned with polynomials $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, whose degrees do not exceed the index n, and whose coefficients may be real or imaginary. The variables will be restricted to the real region $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \leqq 1$, and in this region the modulus of P_n will be required not to exceed 1. The proofs will be given on the assumption that the coefficients are real; this restriction will be removed at the end (p. 64). In the present section, P_n will be supposed to be homogeneous, and to depend on two variables only.

Theorem I. *Let $P_n(x, y)$ be a homogeneous polynomial of degree n, such that $|P_n| \leqq 1$ for $r^2 = x^2 + y^2 = 1$. Then the modulus of the coefficient a_k, of the term in $x^k y^{n-k}$ cannot exceed the binomial coefficient ${}^nC_k$. For values of k other than 0 and n, this bound is attained only when P_n is a constant of unit modulus times the real or imaginary part of $(x + iy)^n$.* [5])

To determine the maximum of $|a_k|$, we may restrict ourselves to polynomials which are either even in y or odd in y, since all the coefficients of P_n occur in one or the other of the properly bounded polynomials $\frac{1}{2}[P_n(x, y) + P_n(x, -y)]$ or $\frac{1}{2}[P_n(x, y) - P_n(x, -y)]$. Taking first the case in which $n - k$ is even, we consider the polynomial

$$P_n(x, y) = a_n x^n - a_{n-2} x^{n-2} y^2 + a_{n-4} x^{n-4} y^4 - \ldots,$$

and compare it with the polynomial

$$r^n \cos n\theta = x^n - {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + {}^nC_4 x^{n-4} y^4 - \ldots .$$

If $-1 < \lambda < 1$, the difference

$$\begin{aligned} D(x, y, \lambda) &= r^n \cos n\theta - \lambda P_n(x, y) \\ &= d_n x^n - d_{n-2} x^{n-2} y^2 + d_{n-4} x^{n-4} y^4 - \ldots \end{aligned}$$

is positive at all points of $r = 1$ where $r^n \cos n\theta = 1$, and negative where

[5]) The bound for a_0 and a_n is attained also for the polynomials x^n and y^n. Since the submission of this paper for publication, there has appeared the book of S. Bernstein, Leçons sur les propriétés extrémales des fonctions analytiques d'une variable réelle, Paris (1926). Professor Szegö has kindly pointed out that the bounds on the coefficients in theorem I, above, are an immediat result of inequalities given on page 56 of this book.

this function is -1. Hence $D(x, y, \lambda)$ has exactly one root[6]) between each pair of successive extremes of $\cos n\theta$, i. e. all its roots are real and distinct. Now it follows from Descartes rule of signs[7]) that if all the roots of a polynomial in x are real, and if any coefficient vanishes which is between two non-vanishing coefficients, the coefficients adjacent to the vanishing one must be different from zero and have opposite signs. This result is applicable to $D(x, y, \lambda)$, and the numbers d_n, d_{n-2}, d_{n-4}, ... are all different from zero and have the same signs, for if either the first or last vanished, the polynomials would have a multiple root, and we have seen that this is not the case. Now $|a_n| = |P_n(1, 0)|$ cannot exceed 1, so that $d_n = 1 - \lambda a_n$ is positive, and therefore also d_{n-2}, d_{n-4}, d_{n-6}.... The limits of these functions of λ, as $\lambda \to 1$ or as $\lambda \to -1$ are therefore $\geqq 0$, and so $|a_n| \leqq {}^nC_k$.

The second part of the theorem for $n - k$ even emerges when we consider the limiting form of $D(x, y, \lambda)$ as $\lambda \to 1$ or -1. The roots remain real, and can coalesce only in pairs, unless the limit is an identically vanishing polynomial. If $|a_k|$ attains its maximum for k other than 0 or n, then for $\lambda = 1$ or $\lambda = -1$, an intermediate one of the numbers d_n, d_{n-2}, d_{n-4}, ... would vanish, and hence all preceding or all following numbers of this sequence would have to vanish. But this would require too high a multiplicity for a root. The only alternative is $D(x, y, 1) \equiv 0$ or $D(x, y, -1) \equiv 0$, i. e. $P_n \equiv \pm r^n \cos n\theta$.

For the case in which $n - k$ is odd, the same reasoning may be applied with the substitution of $r^n \sin n\theta$ for $r^n \cos n\theta$, until we arrive at the point where it is necessary to show that the numbers d_{n-1}, d_{n-3}, d_{n-5}, ... are all positive. This fact will follow from a lemma, which will also find later application:

Lemma 1. *If $P_n(x, y) = a_n x^n + n a_{n-1} x^{n-1} y + \ldots$ is a homogeneous polynomial with real coefficients, such that $|P_n| \leqq 1$ for $r = 1$, then $a_n^2 + a_{n-1}^2 \leqq 1$.*

If ϱ and ε are determined so that $a_n = \varrho \cos \varepsilon$ and $a_{n-1} = \varrho \sin \varepsilon$, then $P_n(x, y) - \varrho r^n \cos(n\theta + \varepsilon) = R(x, y)$ will be a homogeneous polynomial containing y^2 as a factor. If, now, ϱ were greater than 1, $R(x, y)$ would have signs opposite to those of $\cos(n\theta + \varepsilon)$ at every extreme of this function, and hence it would have n distinct roots. But

---

[6]) We mean by root of $D(x, y, \lambda)$, a value of the ratio $x : y$ for which $D(x, y, \lambda)$ vanishes; or also one of the values of θ which corresponds to such a value by the equations $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, say in the interval $0 \leqq \vartheta < \pi$.

[7]) See, for instance, Weber, Lehrbuch der Algebra 1 (Braunschweig 1898), p. 350.

this contradicts the fact that it has a double root for $y = 0$. Hence $\varrho^2 = \alpha_n^2 + \alpha_{n-1}^2 \leqq 1$, as was to be proved.

From the lemma it follows that in a polynomial containing only odd powers of y, $|a_{n-1}| \leqq n$, and hence that $d_{n-1} > 0$ for $-1 < \lambda < 1$. Theorem I is thus established.

It may be remarked that the elementary method employed above leads to a very simple proof of the theorems of W. Markoff[8]) with respect to the coefficients of polynomials $P_n(x)$ of degree not exceeding n and maximum absolute value not exceeding 1 for $-1 \leqq x \leqq 1$. As comparison functions are used

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad \text{and} \quad T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\arccos x).$$

3. An application to convergence of power-series.

Before proceeding with the generalization of Theorem I to polynomials in more variables, let us consider an application. In the theory of the logarithmic potential, the potential, $U(x, y)$, due to a certain distribution of masses, is shown to be susceptible of expansion in a series

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

which converges uniformly and absolutely in any closed region interior to the circle $r = R$ which passes through that point, or limit point, of the distribution, nearest the origin. It is also shown that the power-series in x and y,

$$S = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots$$

obtained by expanding $\cos n\theta$ and $\sin n\theta$ in the series in U, and replacing $r\cos\theta$ by x, and $r\sin\theta$ by y, converges in a neighborhood of the origin, i. e. that $U(x, y)$ is analytic in x and y. The extent of the region of convergence is not usually considered.

Theorem I enables us to give a region within which S is certainly convergent. For, from the uniform convergence of U, it follows that to any $\lambda > 0$ there corresponds an N such that for $n > N$,

$$|r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)| \leqq 1 \quad \text{for} \quad r \leqq R - \lambda,$$

i. e. that $|r^n(R-\lambda)^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)| \leqq 1$ for $r \leqq 1$. Hence, by the theorem, $(R-\lambda)^n |a_{ij}| \leqq {}^nC_k$, where $i + j = n$. Accordingly S is dominated by the series obtained by expanding the terms of

[8]) Über Polynome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen, Math. Ann. 77 (1916), pp. 213—258.

$\sum\left[\frac{|x|+|y|}{R-\lambda}\right]^n$. It therefore converges at the points of the square $|x|+|y|<R$. [9])

The result may be extended by means of the theorem of the next section. A harmonic function in space, whose representation by a series of spherical harmonics converges uniformly in any closed region interior to the sphere $r=R$ will be represented by a power-series in x, y and z, which converges at the points of the octahedron $|x|+|y|+|z|<R$, and similarly for higher space.

In two dimensions, the only possible additional points of convergence of the power series lie on the sides of the square or on the coördinate axes, as Bôcher showed. The situation is different in three or more dimensions, for the three dimensional region in which the power-series converges may go beyond the octahedron, and have various shapes, but exact results, as far as I know, have not been obtained.

4. Generalization to polynomials in m variables.

Theorem II. *Let $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ be a homogeneous polynomial of degree n, such that $|P_n| \leqq 1$ for $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 = 1$. Then the coefficient of $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$ cannot exceed in absolute value the polynomial coefficient $\frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!}$.* It should be remarked, however, that this formula does not, in general, give actual maxima[10]).

The theorem reduces to the preceding one when $m=2$. Let us suppose it has been established when there are $m-1$ variables. We make the substitution $x_1 = \varrho y_1$, $x_2 = \varrho y_2, \ldots, x_{m-1} = \varrho y_{m-1}$, $x_m = x_m$, and impose the restrictions $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{m-1}^2 = 1$, $\varrho^2 + x_m^2 = 1$. The polynomial P_n then takes the form $\sum_0^n A_{k_m} \varrho^{n-k_m} x_m^{k_m}$, where A_{k_m} is a homogeneous polynomial in $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$, of degree $n-k_m$, and subject, by Theorem I to the inequality $|A_{k_m}| \leqq \frac{n!}{(n-k_m)!\, k_m!}$. Now Theorem II holds, by hypothesis, if m is replaced by $m-1$, and so permits

---

[9]) This is included in a result obtained by Bôcher, by a different method; On the regions of convergence of power-series which represent two-dimensional harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. **15** (1909), pp. 271—278.

[10]) For instance, the coefficient of the term in xyz in $P_3(x, y, z)$ has as maximum absolute value $3\sqrt{3}$, whereas the theorem gives the bound 6.

us to infer that the coefficient of $y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_{m-1}^{k_{m-1}}$ in A_{k_m}, i. e. the coefficient of $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$ in P_n, cannot exceed

$$\frac{n!}{(n-k_m)!\,k_m!} \times \frac{(n-k_m)!}{k_1!\,k_2! \dots k_{m-1}!} = \frac{n!}{k_1!\,k_2! \dots k_m!},$$

as was to be shown.

5. The derivatives of bounded homogeneous polynomials in x and y.

We are here concerned with the maximum absolute value of the derivate DP_n of a polynomial P_n, in any direction. In the case of polynomials with real coefficients, this will also be the maximum of the magnitude of the gradient of the polynomial, i. e. of the vector whose components along the coördinate axes are the corresponding partial derivatives of P_n. We start with the case of two variables.

Theorem III. *Let $P_n(x, y)$ be a homogeneous polynomial of degree n, such that $|P_n| \leqq 1$ for $r = 1$. Then $|DP_n|$ never exceeds n for $r \leqq 1$.*

It is obvious that $|\nabla P_n|$, the magnitude of the gradient of P_n, attains its maximum for points of the circle $r \leqq 1$ on the circumference $r = 1$, because of the homogeneity of P_n. Since the gradient is invariant under a rotation, we are at liberty to assume that the point at which its magnitude is greatest is the point $(1, 0)$. But at this point, the polynomial $P_n(x, y) = \alpha_n x^n + n\alpha_{n-1} x^{n-1} y + \dots$ has the partial derivatives $\frac{\partial P_n}{\partial x} = n\alpha_n$ and $\frac{\partial P_n}{\partial y} = n\alpha_{n-1}$. Hence, by Lemma 1, the magnitude of the gradient cannot exceed n, as was to be proved.

It is of interest to compare this result with the theorem of Bernstein[11]), which, although usually enunciated for trigonometric polynomials, holds for the boundary values of polynomials in x and y. We infer from Bernstein's theorem that the *tangential* derivatives of P_n cannot exceed n in absolute value. Obviously, the normal derivatives of the homogeneous function P_n cannot exceed n, so that the gradient cannot exceed $\sqrt{2}\,n$ in magnitude.

Our theorem is thus sharper than what we should infer in this way. On the other hand, it is apparently less general than Bernstein's theorem

---

[11]) Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné, Mémoir couronné, Brussels, 1912. (Included in the Mémoirs publiés par la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique (2) **4**, p. 20.) For a more complete statement and simple proof, see de la Vallee Poussin, Sur le maximum du module de la derivée d'une expression trigonométrique d'ordre et du module bornes, Comptes Rendus **166** (1918), pp. 843–846; or Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris 1919, pp. 39–42.

in the information it gives with respect to tangential derivatives, for the latter applies also to the values on $r = 1$ of non-homogeneous polynomials. Bernstein's theorem can be inferred from Theorem III, and for reasons that will appear later, it is worth while to give the reasoning.

Let $P_n(x, y)$ be any polynomial of degree n, with real coefficients, and not greater than 1 in absolute value for $r = 1$. Suppose the point at which the tangential derivative is greatest has been brought by a rotation to $(1, 0)$. By multiplying the terms of P_n by appropriate powers of $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, it can be brought, without altering its values on $r = 1$, to the form $P_n(x, y) = Q_n(x, y) + rR_{n-1}(x, y)$, where Q_n and R_{n-1} are homogeneous polynomials of degrees indicated by the subscripts, one degree being even, and one odd. Hence, as both $P_n(x, y)$ and $P_n(-x, -y)$ are not greater than 1 in absolute value on $r = 1$, it follows that $|Q_n| + |R_{n-1}| \leqq 1$ on $r = 1$, and therefore the homogeneous polynomial, $S_n(x, y) = Q_n(x, y) + xR_{n-1}(x, y)$ is similarly bounded. Hence, its tangential derivative at $(1, 0)$, which coincides with that of P_n, cannot exceed n, and this gives the desired result.

Incidentally, there has been proved the following lemma, which will be useful in the next section.

Lemma 2. *Given the function* $F_n(x, y) = Q_n(x, y) + rR_{n-1}(x, y)$, *where* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, *and* Q_n *and* R_{n-1} *are homogeneous polynomials of degrees indicated by the subscripts; if* $|F_n| \leqq 1$ *for* $r = 1$, *then no tangential derivative of* F_n *on* $r = 1$ *can exceed* n *in absolute value.*

An obvious consequence of theorem III and the property of homogeneity is the following:

Let S denote a region of the x, y-plane contained in a circle of radius R about the origin, and containing a concentric circle of radius ϱ. Then if the homogeneous polynomial $P_n(x, y)$ is not greater than M in absolute value in S, $|DP_n| \leqq MnR^{n-1}/\varrho^n$ in S. It will presently appear that the same is true of homogeneous polynomials in m variables. Evidently, this corellary may be used in the discussion of the termwise differentiability of series of homogeneous polynomials.

6. Derivatives of homogeneous polynomials in m variables.

Theorem IV. *Let $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ be a homogeneous polynomial of degree n whose absolute value does not exceed 1 for $r = 1$. Then $|DP_n| \leqq n$ for $r \leqq 1$.*

Suppose the gradient of P_n attains its maximum magnitude at $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, and that it has at this point the components $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

We rotate the axes about the origin so that the plane of the origin and the points $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ and $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ becomes the plane of x_1, x_2. P_n then becomes a homogeneous polynomial in x_1 and x_2, when the other variables are equated to 0, and the gradient of maximum magnitude is unaltered by the process. Thus the desired result follows immediately from Theorem III.

By the use of reasoning previously employed, we may establish a generalization of Bernstein's theorem to m dimensions:

Theorem V. *Let $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ be any polynomial of degree not greater than n, whose absolute value does not exceed 1 for $r = 1$. Then the tangential derivatives of P_n on the hypersphere $r = 1$ never exceed n in absolute value.*

In particular, if $S_n(\theta, \varphi)$ is a linear function of spherical harmonics of orders not exceeding n, such that $|S_n| \leqq 1$, then

$$\sqrt{\left(\frac{\partial S_n}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_n}{\partial \varphi}\right)^2} \leqq n.$$

7. A. Markoff's theorem and its extension to m-space.

Markoff's[12]) theorem is to the effect that if $P_n(x)$ is a polynomial of degree not exceeding n and absolute value on $-1 \leqq x \leqq 1$ not exceeding 1, then the absolute value of its derivative on the same interval does not exceed n^2.

This theorem, in a more precise form, may be obtained as follows. $P_n(x)$ is a particular case of a polynomial in x and y, and as such, its tangential derivatives on the circle $r = 1$ cannot exceed n in absolute value, by Bernstein's theorem. That is, $\left| y \frac{\partial P_n}{\partial x} - x \frac{\partial P_n}{\partial y} \right| \leqq n$, and therefore $|P_n'(x)| \leqq n/|y| = n/\sqrt{1-x^2}$. The rest is a result of the following emma :

l If a polynomial of degree $n-1$ is dominated by the function $n/\sqrt{1-x^2}$ on $-1 \leqq x \leqq 1$, it is dominated on the same interval by n^2. Suppose this were not so, and that the polynomial $P_{n-1}(x)$, dominated by $n/\sqrt{1-x^2}$ on $-1 \leqq x \leqq 1$, exceeded n^2 at a point $x = a$ of this interval. By legitimate sign changes we are free to assume that $0 \leqq a \leqq 1$, and that $P_{n-1}(a) > 0$. We consider the polynomial of degree $n-1$, $D(x) = P_{n-1}(x) - \lambda \frac{n \sin n\varphi}{\sin \varphi}$, where $\cos\varphi = x$, and λ is a number sufficiently slightly greater than 1 so that $P_{n-1}(a) > \lambda n^2$. The function $D(x)$

[12]) On a problem of Mendeleieff (in Russian), Memoirs of the St. Petersburg Academy 62 (1889). See also I. Schur, loc. cit., esp. p. 272–277.

must alternate in sign at the interior extremes of $\sin n\varphi$, i. e. for $x = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$, $\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n}, \ldots, \cos\frac{\pi}{2n}$, and hence have $n-1$ roots in the intervals between these points. Now the point a cannot lie between 0 and $\cos\frac{\pi}{2n}$, for in this interval, $n/\sqrt{1-x^2} = n/\sin\varphi \leqq n/\sin\frac{\pi}{2n}$, a number easily shown to be less than n^2 for $n \geqq 2$ (for $n=1$ the theorem is trivial). Hence $D(x)$, negative at $\cos\frac{\pi}{2n}$, would be positive at a point between this one and 1, and so would have n roots. This is impossible, since $D(x)$ is not identically 0. We thus arrive at the result contained in the article of Schur (loc. cit.):

If $P_n(x)$ is a polynomial of degree not greater than n, whose absolute value does not exceed 1 for $-1 \leqq x \leqq 1$, then $P_n'(x)$ is dominated in this interval by the smaller of the two numbers $n/\sqrt{1-x^2}$ and n^2. [13])

The result is readily generalized to polynomials in m variables:

Theorem VI. *Let $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ be a polynomial of degree not greater than n, and of absolute value not greater than 1 for $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \leqq 1$. Then for $r \leqq 1$, DP_n is dominated by the smaller of the two numbers $n/\sqrt{1-r^2}$ and n^2.*

By a rotation of axes such as was used in the last section, we may reduce the general case to that of two variables. We may think of the polynomial $P_n(x, y)$ as one in x, y, z [14]), and as such its tangential derivatives on the sphere $r=1$ cannot exceed n in absolute value, by theorem V. If α, β, γ, be the direction cosines of a (non-vertical) tangent to the sphere, we infer that $\left|\alpha\frac{\partial P_n}{\partial x} + \beta\frac{\partial P_n}{\partial y}\right| \leqq n$, and hence that the derivative of $P_n(x, y)$ in the direction $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, at any interior point $r<1$, is not greater in absolute value than $n/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, a function of α and β which, under the conditions on α, β, γ, and x, y, z, cannot exceed $n/|z| = n/\sqrt{1-r^2}$.

Now the derivative of $P_n(x, y)$ in a fixed direction at the points of a line through the origin and containing the point at which this derivative

---

[13]) Bernstein gives the following theorem: If the polynomial $P_n(x)$ of degree not greater than n satisfies the inequality $|P_n(x)| \leqq L$ on (a, b), then $|P_n'(x)|\sqrt{(a-x)(x-b)} \leqq nL$ on (a, b). On the best polynomial approximation to continuous functions, Thesis, 1912 (in Russian). I am indebted to Prof. T. A. Shohat for this note.

[14]) The coefficients of the terms in z being 0.

is greatest in absolute value, is a polynomial in r (r being allowed negative values), and so, by the reasoning employed above, cannot exceed n^2. Theorem VI is thus established.

8. Removal of the restriction to real coefficients.

In multiplying a polynomial by a complex number of unit modulus, we change neither the bounds of the absolute value of the polynomial, nor of its coefficients, nor of its derivatives. Such a multiplier may always be so chosen as to reduce to a real number any given coefficient, or derivative at a point. Thus the given coefficient, or derivative at a point will be the corresponding coefficient or derivative of the real part of the new polynomial, and this real polynomial will be bounded in absolute value by unity in any region in which the given polynomial is so bounded. The results attained for polynomials with real coefficients therefore hold for polynomials with complex coefficients.

Oct. 15, 1925.

(Eingegangen am 2. November 1925.)

Zwei Sätze über Fourier-Koeffizienten.

Von

Georg Alexits in Budapest.

Die reelle und nach 2π periodische Funktion

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x) \tag{1}$$

sei im abgeschlossenen Intervalle $[0, 2\pi]$ integrabel. Die Herren Csillag[1]) und Neder[2]) bewiesen die Richtigkeit der folgenden Sätze:

I. *Ist die Funktion $f(x)$ im Intervalle $[0, 2\pi]$ stetig und von beschränkter Schwankung und existieren die Grenzwerte*

$$n a_n \to a, \qquad n b_n \to b, \tag{2}$$

so folgt:

$$a = 0, \qquad b = 0. \tag{3}$$

II. *Ist die Funktion $f(x)$ in $[0, 2\pi]$ von beschränkter Schwankung und erfüllen ihre Fourier-Koeffizienten die Bedingungen (2) und (3), so hat $f(x)$ in $[0, 2\pi]$ höchstens hebbare Unstetigkeiten.*

Diese beiden Sätze setzen aber die Bedeutung jener Eigenschaft der Fourier-Koeffizienten nicht in das rechte Licht, da sie einerseits mit der überflüssigen Bedingung der beschränkten Schwankung vermischt sind, andererseits ist die Bedingung der Stetigkeit ebenfalls kein notwendiger Bestandteil des Satzes I. Wir zeigen vielmehr im folgenden, daß diese Sätze in folgender Weise formuliert werden können:

Satz Ia[3]). *Hat die nach 2π periodische Funktion $f(x)$ in $[0, 2\pi]$ höchstens hebbare Unstetigkeiten und existieren die Grenzwerte (2), so folgt (3):*

$$a = 0, \qquad b = 0.$$

[1]) P. Csillag, Math. és phys. lapok 27 (1918), S. 301 (ungarisch).

[2]) L. Neder, Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 270.

[3]) Dieser Satz wurde für stetiges $f(x)$ von Herrn Steinhaus bewiesen: Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 320, worauf mich nach Abfassung dieser Arbeit Herr Neder aufmerksam machte, dem ich auch einige Verbesserungen im vorliegenden Text verdanke.

Satz IIa. *Sind die Beziehungen* (2), (3) *erfüllt und existieren die Werte* $f(x+0)$ *und* $f(x-0)$ *überall in* $[0, 2\pi]$, *so hat* $f(x)$ *höchstens hebbare Unstetigkeiten.*

Die obige Formulierung ist dabei die allgemeinste, da nach Satz IIa der Satz Ia nicht weiter verschärft werden kann. Der Beweis ist elementar und beruht wesentlich auf der Csillagschen Methode, daß man die Folge

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1}(b_k \cos k x + a_k \sin k x)$$

betrachtet.

Wir ziehen zunächst je eine Folgerung aus der beiden Sätzen gemeinsamen Annahme, daß die Grenzwerte $f(x \pm 0)$ bzw. (2) existieren.

Bekanntlich ist bei jeder Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} u_k \geqq \overline{\lim_{n=\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{\log(n+1)}, \tag{4}$$

$$\underline{\lim_{n=\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} u_k \leqq \underline{\lim_{n=\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{\log(n+1)}. \tag{5}$$

Nun bewies Lukács[4]), daß die Beziehung

$$\pi \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(b_k \cos k x - a_k \sin k x)}{\log(n+1)} = f(x+0) - f(x-0) \tag{6}$$

immer dann erfüllt ist, wenn $f(x+0)$ und $f(x-0)$ in $[0, 2\pi]$ überall existieren. Setzt man also in den Gleichungen (4) und (5)

$$u_k = b_k \cos k x - a_k \sin k x,$$

so liefern sie in Verbindung mit (6)

$$\underline{\lim_{n=\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1}(b_k \cos k x - a_k \sin k x) \leqq \frac{f(x+0) - f(x-0)}{\pi} \tag{7}$$

$$\leqq \overline{\lim_{n=\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1}(b_k \cos k x - a_k \sin k x).$$

Ferner existieren infolge der Annahme (2) die Grenzwerte

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} a_k = a, \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} b_k = b. \tag{8}$$

1. Wenn daher einerseits $f(x)$ in $[0, 2\pi]$ höchstens hebbare Unstetigkeiten hat, was besagt:

$$f(x+0) = f(x-0),$$

[4]) F. Lukács, Journ. f. Math. **150** (1920), S. 107.

so folgt aus (7) und (8):

$$a = 0, \qquad b = 0,$$

wie im Satze Ia behauptet.

2. Und wenn andererseits in (2)

$$a = 0, \qquad b = 0,$$

so ist

$$\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{k}{n+1}(b_k \cos kx - a_k \sin kx) \to 0.$$

Die Ungleichungen (7) liefern daher

$$f(x+0) = f(x-0),$$

womit auch der Beweis des Satzes IIa erbracht ist.

(Eingegangen am 15. Februar 1926.)

Sur certains ensembles de fonctions conduisant aux équations partielles du second ordre.

Von

Stefan Banach in Lwów.

Soit E un ensemble de fonctions remplissant les conditions suivantes:

1° Toute fonction de E est définie et continue dans un cercle K. Nous ne supposons pas que le cercle K soit le même pour toutes les fonctions de E.

2° Toute fonction superposable [1]) à une fonction quelconque de E appartient à E.

3° A tout cercle K de rayon plus petit qu'un nombre $R > 0$ et à toute fonction φ définie et continue sur $\overline{K}$, $\overline{K}$ designant la circonférence de K, il correspond une fonction F de E définie et continue dans K, qui se réduit à φ sur $\overline{K}$. Deux fonctions F_1 et F_2 continues dans K et identiques sur $\overline{K}$ sont identiques dans K et $\varphi = 0$ implique $F = 0$.

4° Si l'on pose $F = U(\varphi/K)$, U est une fonctionnelle continue par rapport à φ et admettant une première variation pour $\varphi = 0$, quelque soit le cercle K.[2])

Sous ces conditions, on peut démontrer le théorème suivant:

Théorème I. *Soit $f = \delta U(\delta\varphi/K)$ la première variation de U pour $\varphi = 0$. Il existe un nombre réel λ tel que pour chaque $\delta\varphi$, f soit une fonction continue ainsi que ses premières et secondes derivées à l'intérieur du cercle K et satisfasse à l'équation suivante:*

$$\Delta f + \lambda f = 0, \quad f = \delta\varphi \text{ sur } \overline{K}; \qquad \left(\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

[1]) Deux fonctions F_1 et F_2 définies dans les ensembles D_1 resp. D_2 sont dites superposables, s'il existe une translation euclidienne (produit d'un déplacement et d'une rotation) qui transforme D_1 à D_2 de telle manière qu'en des points correspondants F_1 et F_2 aient des valeurs égales.

[2]) Pour la définition de la première et seconde variation voir les Leçons d'Analyse fonctionnelle de Paul Lévy, Paris, Gauthier-Villars, 1922 p. 50 et p. 79.

Remarque 1. On peut démontrer un théorème analogue en supposant que les fonctions de l'ensemble E attribuent aux points des vecteurs de n dimensions.

Remarque 2. L'état physique d'un corps homogène conduit fréquemment à l'ensemble de fonctions jouissant des propriétés citées ci-dessus. Les fonctions qui définissent les déformations d'un corps homogène peuvent servir d'exemple. Le théorème précédent montre qu'en première approximation ces fonctions sont des fonctions analytiques satisfaisant à l'équation:

$$\Delta f + \lambda f = 0.$$

Définition. $\|f\| =$ maximum de $|f|$ dans K.

Théorème II. *Si nous supposons que la deuxième variation* $\delta^2 U(\delta\varphi|K)$ *existe pour* $\varphi = 0$, *et qu'il existe un nombre* M *tel que pour tout* K *et* $\delta\varphi$ *on ait*

$$\|\delta^2 U(\delta\varphi|K)\| \leqq M\|\delta\varphi\|^2,$$

alors en posant

$$f = \delta U(\delta\varphi|K), \qquad \psi = \delta^2 U(\delta\varphi|K)$$

on aura:

$$\Delta\psi + \lambda\psi = \alpha f + \beta\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right], \quad \psi = 0 \text{ sur } \overline{K},$$

$$\Delta f + \lambda f = 0, \quad f = \delta\varphi \text{ sur } \overline{K}$$

α *et* β *étant deux nombres constants ne dépendant ni de* $\delta\varphi$ *ni de* K.

On peut établir des équations pareilles pour les autres variations.

Démonstration du théorème I. Supposons que nous ayons deux fonctions continues φ_1 et φ_2 définies dans $\overline{K}_1$ resp. $\overline{K}_2$ telles que les fonctions $f_1 = \delta U(\varphi_1|K_1)$ et $f_2 = \delta U(\varphi_2|K_2)$ soient égales dans $\overline{K}$, K étant contenu dans K_1 et K_2. Nous allons démontrer que les fonctions f_1 et f_2 sont aussi égales dans K.

En effet, posons dans $\overline{K}$

$$F_h^{(1)} = U(h\varphi_1|K_1), \qquad F_h^{(2)} = U(h\varphi_2|K_2) \tag{1}$$

et nous aurons dans K

$$\begin{aligned} U(h\varphi_1|K_1) &= U(F_h^{(1)}|K), \\ U(h\varphi_2|K_2) &= U(F_h^{(2)}|K), \end{aligned} \tag{2}$$

en outre

$$\lim_{h\to 0}\frac{F_h^{(1)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F_h^{(2)}}{h} = f. \tag{3}$$

Mais d'après la définition de la variation

$$(4)\qquad \begin{aligned} U(F_h^{(1)}/K) &= \delta U(F_h^{(1)}/K) + \| F_h^{(1)} \| \cdot R_1, \\ U(F_h^{(2)}/K) &= \delta U(F_h^{(2)}/K) + \| F_h^{(2)} \| \cdot R_2, \end{aligned}$$

R_1 et R_2 tendant vers zéro uniformément avec h.

Donc d'après (1), (3) et (4)

$$(5)\qquad \lim_{h\to 0} \frac{U(F_h^{(1)}/K)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{U(F_h^{(2)}/K)}{h} = \delta U(f/K).$$

Les relations (1), (2) et (5) nous donnent enfin dans K

$$f_1 = f_2.$$

Soit maintenant K un cercle quelconque et f une fonction définie et continue sur $\overline{K}$. Posons $V(f/K)$ égale à la valeur de la fonction $\delta U(f/K)$ au centre de K. Il est clair que la fonctionnelle $V(f/K)$ est continue et linéaire et en outre si deux cercles K_1 et K_2 ont des rayons égaux et si f_1 et f_2 sont deux fonctions superposables, continues et définies sur $\overline{K}_1$ resp. $\overline{K}_2$, on a

$$V(f_1/K_1) = V(f_2/K_2).$$

Soit maintenant A un point quelconque de $\overline{K}$ et α l'angle du rayon vecteur joignant le centre de K avec A avec l'axe des x. Nous allons démontrer que pour tout nombre naturel n

$$V(\sin n\alpha/K) = V(\cos n\alpha/K) = 0.$$

En effet, γ étant un nombre quelconque, les fonctions $\sin n\alpha$ et $\sin n(\alpha+\gamma)$ sont superposables, donc

$$V(\sin n(\alpha+\gamma)/K) = V(\sin n\alpha/K).$$

Nous aurons alors quelque soit γ

$$\cos\gamma \cdot V(\sin n\alpha/K) + \sin\gamma \cdot V(\cos n\alpha/K) = V(\sin n\alpha/K)$$

et pour tout n naturel

$$V(\sin n\alpha/K) = V(\cos n\alpha/K) = 0.$$

Soit $\varphi(\alpha)$ une fonction continue, telle que $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ et soit

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)$$

sa série de Fourier. On sait que la moyenne des sommes partielles tend uniformément vers $\varphi(\alpha)$. Donc en posant

$$V(1/K) = 2\pi c,$$

nous aurons

$$V(\varphi/K) = 2\pi a_0 c = c \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

Donc si $f(x, y) = \delta U(\delta\varphi/K)$, nous aurons pour tout couple (x, y) situé à l'intérieur de K et pour tout r suffisamment petit

$$(6) \qquad f(x, y) = c(r)\int_0^{2\pi} f(x + r\cos\alpha,\ y + r\sin\alpha)\,d\alpha,$$

$c(r)$ étant une constante ne dépendante que de r.

Puisque f n'est pas identiquement nul si $\delta\varphi$ ne l'est pas, la formule (6) montre que $\lim_{r\to 0} c(r) = \frac{1}{2\pi}$ et que $c(r)$ est continue pour tout r plus petit qu'un nombre positif R.

La formule (6) donne

$$(7) \quad f(x, y)\int_0^R \frac{r\,dr}{c(r)} = \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} f(x + r\cos\alpha,\ y + r\sin\alpha)\,d\alpha$$
$$= \iint_{K_R} f(x, y)\,dx\,dy$$

K_R étant un cercle de centre (x, y) et de rayon R.

On voit sans peine que d'après (7) $f(x, y)$ est une fonction remplissante la condition de Lipschitz dans tout cercle au rayon plus petit que R situé dans K. Donc pour presque tous les (x, y)

$$f'_x(x, y) = c(r)\int_0^{2\pi} f'_x(x + r\cos\alpha,\ y + r\sin\alpha)\,d\alpha$$

et

$$f'_x(x, y)\int_0^R \frac{r}{c(r)}\,dr = \iint_{K_R} f'_x(x, y)\,dx\,dy;$$

$f'_x(x, y)$ est donc continue dans chaque point intérieur de K. De la même manière ou peut démontrer l'existence et la continuité des $f'_y(x, y)$, $f''_{x^2}(x, y)$, $f''_{y^2}(x, y)$ dans tout point intérieur de K. D'après (6), la continuité de $f'_x(x, y)$ entraîne l'existence et la continuité de $\frac{1}{c(r)}$ pour r suffisamment petit.

L'égalité (6) fournit

$$-\frac{c'(r)}{c^2(r)} f(x, y) = \int_0^{2\pi} [f'_x(x + r\cos\alpha,\ y + r\sin\alpha)\cos\alpha$$
$$+ f'_y(x + r\cos\alpha,\ y + r\sin\alpha)\sin\alpha]\,d\alpha.$$

Donc

$$-\frac{c'(r)}{c^2(r)} f(x, y) = \frac{1}{r}\int_{K_R} (f'_x\,dx - f'_y\,dy).$$

En employant la formule de Green, nous obtenons

$$-\frac{rc'(r)}{c^2(r)}f(x,y)=-\iint_{K_R}\Delta f\,dx\,dy,$$

ce qui donne

$$\frac{c'(r)}{r\pi c^2(r)}f(x,y)=\frac{1}{r^2\pi}\iint_{K_R}\Delta f\,dx\,dy.$$

Puisque

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2\pi}\iint_{K_R}\Delta f\,dx\,dy=\Delta f, \tag{8}$$

$\lim_{r\to 0}\frac{c'(r)}{r\pi c^2(r)}$ existe; en désignant cette limite par $-\lambda$ nous aurons d'après (8)

$$\Delta f+\lambda f=0,$$

en tout point de K, λ étant une constante ne dépendant ni de f ni de K.

Soit $B(f,\varphi)$ une fonctionnelle continue qui à chaque couple de fonctions f et φ continues dans $(0,2\pi)$ et telles que $f(0)-f(2\pi)=\varphi(0)-\varphi(2\pi)=0$, attribue un nombre réel. Supposons que pour toutes les fonctions f, φ, ψ remplissantes les conditions cités ci-dessus, on ait toujours

$$B(f,\varphi)=B(\varphi,f),$$
$$B(f+\psi,\varphi)=B(f,\varphi)+B(\psi,\varphi).$$

La fonctionnelle B remplissante les conditions précédentes est dite symmétrique et linéaire.

Dans ce qui suivra nous ferons usage du lemme suivant:

Lemme. *Si $B(f,\varphi)$ est une fonctionnelle continue linéaire et symmétrique et si la fonctionnelle $A(f)=B(f,f)$ prend les mêmes valeurs pour les fonctions superposables, on a*

$$A(f)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i\int_0^{2\pi}A_i^2\,d\alpha,$$

où les c_i sont des constantes indépendantes de la fonction f et

$$\sum_{i=1}^{\infty}A_i=\sum_{i=0}^{\infty}(a_i\cos i\alpha+b_i\sin i\alpha)$$

est la série de Fourier correspondante à la fonction f.

Démonstration. Posons

$a_{nr}=B(\sin n\alpha,\sin r\alpha)$, $b_{nr}=B(\sin n\alpha,\cos r\alpha)$, $c_{nr}=B(\cos n\alpha,\cos r\alpha)$.

Si β est un nombre quelconque, un calcul facile montre que

$$2a_{nr}=(a_{nr}-c_{nr})\cos(n+r)\beta+(b_{nr}+b_{rn})\sin(n+r)\beta$$
$$+(a_{nr}+c_{nr})\cos(n-r)\beta+(-b_{nr}+b_{rn})\sin(n-r)\beta;$$

nous avons donc

$$a_{nr} = b_{nr} = c_{nr} = 0, \quad \text{si} \quad n \neq r$$

et

$$a_{nn} = c_{nn}, \quad b_{nn} = 0.$$

Comme les premières moyennes des sommes partielles de la série de Fourier correspondant à la fonction f tendent uniformément vers f, on a

$$A(f) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_0^{2\pi} A_i^2 \, d\alpha.$$

(Les c_i sont des constantes indépendantes de f.)

Démonstration du théorème II. Si F est une fonction définie dans un ensemble A dont B est un sous-ensemble, nous désignons par F_B une fonction définie seulement dans B, qui prend aux points correspondants les mêmes valeurs que la fonction F. Si K' est un cercle situé dans K nous démontrérons la relation suivante valable dans K'

$$\delta^2 U(\delta\varphi|K) = \delta U(\psi_{\overline{K}'}|K') + \delta^2 U(f_{\overline{K}'}|K'). \tag{9}$$

En effet, soit $U(h\,\delta\varphi|K) = f^{(h)}$; nous aurons dans K

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(h)}}{h} = f. \tag{10}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(h)} - hf}{h^2} = \frac{1}{2}\psi. \tag{11}$$

Il est clair que d'après (11) il subsiste dans K' la relation suivante:

$$\frac{1}{2}\psi = \lim_{h\to 0} \frac{U(f_{\overline{K}'}^{(h)}|K') - h\,\delta U(f_{\overline{K}'}^{(h)}|K')}{h^2}. \tag{12}$$

D'après la définition de la deuxième variation on a pour tout cercle K:

$$U(\delta\varphi|K) = \delta U(\delta\varphi|K) + \frac{1}{2}\delta^2 U(\delta\varphi|K) + \|\delta\varphi\|^2 R \tag{13}$$

où R tend uniformément vers zéro avec $\|\delta\varphi\|$.

Donc, d'après (10), (12) et (13), nous aurons dans K':

$$\frac{1}{2}\psi = \lim_{h\to 0} \frac{\delta U[f_{\overline{K}'}^{(h)}|K'] + \frac{1}{2}\delta^2 U[f_{\overline{K}'}^{(h)}|K'] + \|f_{\overline{K}'}^{(h)}\|^2 R' - h\,\delta U[f_{\overline{K}'}^{(h)}|K']}{h^2},$$

ce qui prouve la relation (9).

D'après le théorème I et d'aprés la formule (6) (x, y) étant le centre du K', la valeur de $\delta U(\psi_{\overline{K}'}|K')$ au point (x, y) est égale à

$$c(r)\int_0^{2\pi} \psi(x + r\cos\alpha, y + r\sin\alpha)\, d\alpha.$$

Il est clair, que si $V(f_{K'})$ est la valeur de $\delta^2 U(f_{K'}/K')$ au point (x, y), la fonctionnelle V remplit les conditions imposées à la fonctionnelle A du lemme, donc

$$V(f_{K'}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(r) \int_0^{2\pi} A_i^2(r)\, d\alpha \tag{14}$$

où les $c_i(r)$ sont des constantes dépendant seulement de r.

On peut donc écrire pour r assez petit

$$\psi(x, y) = c(r) \int_0^{2\pi} \psi(x + r\cos\alpha,\, y + r\sin\alpha)\, d\alpha + \sum_{i=0}^{\infty} c_i(r) \int_0^{2\pi} A_i^2(r)\, d\alpha. \tag{15}$$

Si nous supposons maintenant que

$$\|\delta^2 U(\delta\varphi/K)\| \leqq M \|\delta\varphi\|^2$$

(M étant indépendant de K et $\delta\varphi$) nous aurons en posant dans (15) $f_{K'} = \sin n\alpha$,

$$|\pi c_n(r)| \leqq M;$$

la relation (15) donne maintenant

$$\psi(x, y) \int_0^R \frac{r}{c(r)}\, dr = \iint_{K_R} \psi(x, y)\, dx\, dy + \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} A_i^2(r)\, d\alpha \int_0^R \frac{r\, c_i(r)}{c(r)}\, dr.$$

Nous rappellons que $\lim_{r\to 0} c(r) = \frac{1}{2\pi}$.

Puisque

$$\left| \sum_{i=0}^{i=\infty} \int_0^{2\pi} A_i(r) \frac{\partial A_i(r)}{\partial x}\, d\alpha \int_0^R \frac{r\, c_i(r)}{c(r)}\, dr \right|^2$$

$$\leqq \left[\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} A_i^2(r)\, d\alpha \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial A_i(r)}{\partial x} \right)^2 d\alpha \right] \cdot M^2 \left(\int_0^R \frac{r}{c(r)}\, dr \right)^2$$

et puisque $f(x, y)$ est une fonctionnelle analytique on peut démontrer de la même façon que la fonction $\psi(x, y)$ a toutes les derivées continues[3]). Considérons maintenant que

$$\lim_{r\to 0} \frac{\psi(x, y) - c(r) \int_0^{2\pi} \psi(x + r\cos\alpha,\, y + r\sin\alpha)\, d\alpha}{r^2 \pi} = \frac{1}{4\pi}(\Delta\psi + \lambda\psi). \tag{16}$$

[3]) Il faut remarquer que l'on peut démontrer l'existence de toutes les dérivées de $\psi(x, y)$ sans l'hypothèse que M soit indépendant de r.

Or

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sum_{i=2}^{\infty} \int_0^{2\pi} A_i^2(r)\, d\alpha}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\left(\int_0^{2\pi} f(x+r\cos\alpha, y+r\sin\alpha)\, d\alpha\right)^2 - \int_0^{2\pi} A_0^2(r)\, d\alpha - \int_0^{2\pi} A_1^2(r)\, d\alpha}{r^2}$$

$$= \pi\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right] - \pi f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$- \pi\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = 0:$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} c_i(r) \int_0^{2\pi} A_i^2(r)}{r^2\pi} = \lim_{r\to 0} \frac{2c_0(r)}{r^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + r\cos\alpha, y + r\sin\alpha)\, d\alpha$$

$$+ \lim_{r\to 0} \frac{c_1(r) \int_0^{2\pi} A_1^2(r)\, d\alpha}{r^2\pi}.$$

En supposant que f_K soit constant on voit sans peine que $\lim \frac{c_0}{r^2}$ existe. Donc $\lim_{r\to 0} c_1(r)$ existe.

Nous obtenons alors

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} c_i(r) \int_0^{2\pi} A_i^2(r)\, d\alpha}{r^2\pi} = \frac{\alpha}{4\pi} f + \frac{\beta}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right], \tag{17}$$

α et β étant des constantes indépendantes de f, et finalement tenant compte de (15), (16) et (17)

$$\Delta\psi + \lambda\psi = \alpha f + \beta\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right],$$

c. q. f. d.

(Eingegangen am 4. März 1926.)

Über einige Analogien zwischen linearen partiellen und linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Von

Erich Rothe in Berlin.

§ 1.

Für lineare *gewöhnliche* Differentialgleichungen gelten bekanntlich die folgenden Sätze: Es existiert stets eine und nur eine Lösung, wenn man für diese und eine genügende Zahl ihrer Ableitungen Anfangswerte vorschreibt; jede Lösung ist in dem ganzen Stetigkeitsbereich der Koeffizienten fortsetzbar und insbesondere analytisch, in dem ganzen Bereich, in dem es die Koeffizienten sind; hängen Koeffizienten und Anfangsbedingungen stetig bzw. analytisch von einem Parameter ab, so ist die Lösung eine stetige bzw. analytische Funktion dieses Parameters.

Lassen sich diese Sätze auf lineare *partielle* Differentialgleichungen übertragen? In voller Allgemeinheit jedenfalls nicht, und auch die Einführung von Voraussetzungen über die Regularität der Koeffizienten der Gleichung allein wird nicht genügen; denn schon bei Gleichungen mit konstanten Koeffizienten brauchen die angeführten Sätze nicht zuzutreffen, wie das Beispiel der harmonischen Funktionen zweier Variablen x, y, die der linearen partiellen Differentialgleichung $\Delta z = 0$ genügen, zeigt. In der Tat existiert im allgemeinen keine harmonische Funktion, die nebst ihrer Ableitung nach x für $x = 0$ vorgeschriebene stetige Werte annimmt [1]; eine harmonische Funktion läßt sich im ganzen Stetigkeitsbereich der Koeffizienten (d. h. also in der ganzen Ebene) im allgemeinen nicht fortsetzen; eine harmonische Funktion braucht, wie Hadamard an einem Beispiel gezeigt hat [2], nicht stetig von den Werten abzuhängen, die sie nebst ihrer Ableitung nach x etwa für $x = 0$ annimmt.

---

[1]) S. Hadamard, Lectures on Cauchy's problem in linear partial equations 1923, S. 26.

[2]) Hadamard, loc. cit. [1]), S. 33 ff.

Hiernach wird die erwähnte Übertragung höchstens dann möglich sein, wenn man noch über die Natur der Anfangsbedingungen und Lösungen Voraussetzungen einführt, und die aufgeworfene Frage muß dahin beschränkt werden, ob sich nicht wenigstens eine Klasse von Lösungen und Anfangsbedingungen charakterisieren läßt von der Art, daß die eingangs angeführten Sätze richtig sind bei Beschränkung auf Lösungen und Anfangsbedingungen dieser Klasse.

Es ist nun die Aufgabe der vorliegenden Arbeit, eine solche Klasse anzugeben für lineare partielle Differentialgleichungen, die von der folgenden Gestalt sind:

$$(1) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = b(x, y) + a_0(x) z + a_1(x) \frac{\partial z}{\partial y} + a_2(x) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Hierin sind die a_σ stetige Funktionen von x allein [3]), während b eine Funktion von x, y ist, deren Eigenschaften wir später angeben werden. Alle auf die Gleichung (1) bezüglichen Resultate unserer Arbeit gelten unverändert, wenn die Ableitungen nach y statt bis zur zweiten zu beliebig hoher Ordnung ansteigen, ferner für Systeme solcher Gleichungen und infolgedessen auch für Gleichungen der Form

$$(1') \qquad \frac{\partial^r z}{\partial x^r} = \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sum_{\sigma=0}^{s} a_{\varrho\sigma}(x) \frac{\partial^{\varrho+\sigma} z}{\partial x^\varrho \partial y^\sigma} + b(x, y),$$

wobei r, s beliebige positive ganze Zahlen und die $a_{\varrho\sigma}$ stetige Funktionen von x allein [4]) sind. Außerdem können an Stelle der Variablen y beliebig viele Variablen $y_1, \ldots, y_n$ auftreten. Wir werden uns jedoch bei der exakten Formulierung und dem Beweis unserer Sätze auf Gleichung (1) beschränken, da die Möglichkeit der angegebenen Verallgemeinerungen alsdann ohne weiteres ersichtlich sein wird.

In welcher Richtung nun die den Anfangsbedingungen und Lösungen der gesuchten Klasse aufzuerlegenden Beschränkungen liegen, zeigt schon die Betrachtung der Gleichung

$$(1'') \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Eine Lösung dieser Gleichung, die der gesuchten Klasse angehört, muß für alle reellen und komplexen x, y analytisch und daher bei festem y eine ganze Funktion von x (und umgekehrt) sein. Nun ist aber folgendes

---

[3]) Schon bei einfacher Abhängigkeit von y gelten, wie wir an einem Beispiel (s. S. 84 ff.) zeigen werden, die von uns zu beweisenden Sätze nicht mehr.

[4]) Vgl. die vorige Anmerkung. Wir werden jedoch in Anmerkung [8]) unter gewissen Einschränkungen über die Ordnung der in (1′) rechts auftretenden Ableitungen ein Resultat für den Fall angeben, daß die $a_{\varrho\sigma}$ auch von y abhängen.

bekannt[5]): Notwendig und hinreichend dafür, daß eine in der Umgebung von x_0, y_0 analytische Lösung $z(x, y)$ von $(1'')$ existiert, die sich für $x = x_0$ auf eine gegebene Funktion $g(y)$ reduziert, ist, daß die Entwicklung von $C(1+y)\,e^{cy^2}$ nach Potenzen von y bei passender Wahl der Konstanten C, c eine gliedweise Majorante für die entsprechende Entwicklung von $g(y)$ bildet. Anfangsbedingungen der gesuchten Klasse werden daher jedenfalls ganze Funktionen mit der angegebenen Majorante sein müssen, und das gleiche wird bei festem x von einer Lösung unserer Klasse gelten müssen, da die Wahl von x_0 willkürlich ist.

Ein einfaches Beispiel zeigt aber, daß diese Einschränkungen für unsere Zwecke noch nicht genügen. Es ist nämlich

$$z(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial^{2\nu}(e^{y^2})}{\partial y^{2\nu}} \frac{x^\nu}{\nu!}$$

diejenige in der Umgebung des Nullpunktes analytische Lösung von $(1'')$, die sich für $x = 0$ auf e^{y^2} reduziert. Obwohl nun e^{y^2} der oben angegebenen Bedingung genügt, divergiert doch, wie leicht zu sehen,

$$z(x, 0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{(\nu!)^2} x^\nu$$

für $|x| > \frac{1}{4}$, ist also keine ganze Funktion, wie es für eine Lösung unserer Klasse der Fall sein müßte.

Hiernach erscheint es naheliegend, $Ce^{c|y|}$ an Stelle von $C(1+y)\,e^{cy^2}$ als Majorante einzuführen. Es ist nun in der Tat die Klasse von Lösungen der Gleichung (1), für welche wir die eingangs angeführten Sätze wirklich beweisen werden, im wesentlichen folgendermaßen charakterisiert: Wir verlangen, daß $Ce^{c|y|}$ eine gliedweise Majorante der Lösung für jedes x ihres Existenzbereiches ist. Entsprechend ist die Klasse von Anfangsbedingungen dadurch charakterisiert, daß die Funktion von y, die an der Stelle $x = x_0$ für die Lösung vorgeschrieben ist, ebenfalls eine ganze Funktion mit der angegebenen Majorante ist. Lösungen und Anfangsbedingungen der so charakterisierten Klasse werden wir, um einen kurzen Ausdruck zu haben, als *Normallösungen* und *normale* Anfangsbedingungen bezeichnen[6]).

Es stört, wie wir hervorheben wollen, die Gültigkeit unserer Sätze nicht, wenn $(1')$ für verschiedene x von verschiedenem Typus ist; so kann z. B. der Typus der Gleichung

---

[5]) Goursat, Cours d'Analyse, t. 3, 3. éd., p. 292 f.

[6]) Für Normallösungen und normale Anfangsbedingungen der Gleichung $(1')$ sind die angegebenen Forderungen nicht nur für z, sondern auch für die $r-1$ ersten Ableitungen von z nach x zu stellen.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a_1(x)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a_2(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a_3(x)\frac{\partial z}{\partial y} + a_4(x)\frac{\partial z}{\partial x} + a_5(x)z + b(x,y), \tag{2}$$

die einen Spezialfall von (1′) darstellt, stetig vom elliptischen über den parabolischen in den hyperbolischen Typus übergehen, wenn x variiert. Gleichung (1′) unterliegt in bezug auf den Typus nur der einen Einschränkung, die sich darin ausdrückt, daß $\varrho \leqq r-1$ ist.

Auch im Falle analytischer Koeffizienten fällt daher (1′) im allgemeinen nicht unter die bekannten Cauchyschen Sätze über die Existenz einer Lösung mit vorgegebenen analytischen Anfangsbedingungen im *Kleinen*, für deren Gültigkeit vielmehr, wie bekannt, neben $\varrho \leqq r-1$ noch $\varrho + \sigma \leqq r$ erforderlich ist.

Unter dieser engeren Voraussetzung wäre es leicht, alle Ergebnisse über normale Anfangsbedingungen und Normallösungen auf solche Anfangsbedingungen und Lösungen von (1′) zu übertragen, die in bezug auf y analytisch sind und eine *beliebige* ganze Funktion von y als Majorante zulassen. Hierauf werden wir jedoch nicht eingehen, zumal da speziell für Gleichungen *erster* Ordnung — also Gleichung (1) mit $a_2 = 0$ — die in Rede stehenden Ergebnisse nicht neu sind, da die explizite Darstellung der Lösung mit vorgeschriebener Anfangsbedingung für $x = x_0$ bekannt ist[7]).

Die folgenden Beweise enthalten gegenüber den ursprünglich von mir gegebenen einige Vereinfachungen, die von Herrn Prof. Erhard Schmidt stammen.

§ 2.

Wir präzisieren zunächst den in § 1 eingeführten Begriff der Normallösungen und normalen Anfangsbedingungen: Eine Lösung $z(x,y)$ von (1) erfüllt für $x = x_0$ *normale Anfangsbedingungen*, wenn $g(y) = z(x_0, y)$ eine ganze Funktion ist und zwei von y unabhängige Zahlen, c, C, existieren, so daß die Entwicklung der Funktion

$$C e^{c|y|} \tag{3}$$

nach Potenzen von y eine gliedweise Majorante für die entsprechende Entwicklung von g bildet.

Wir sagen, z sei eine *Normallösung* von (1), wenn z für jedes x seines Existenzbereichs normale Anfangsbedingungen erfüllt, wobei es in jedem abgeschlossenen beschränkten Teilbereich der Variablen x möglich sein soll, für c, C Zahlen zu wählen, die auch von x unabhängig sind. Außerdem soll z eine stetige Funktion von (x,y) sein.

---

[7]) S. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, 2. Aufl., S. 221 ff.

Satz 1. Gegeben sei die Differentialgleichung (1). Die Koeffizienten a_ν seien im Intervalle

$$\alpha \leqq x \leqq \beta \tag{4}$$

stetige Funktionen von x allein, während b für alle x aus (4) eine ganze Funktion von y sei, für deren Entwicklung nach Potenzen von y die der Funktion (3) (mit von x, y unabhängigen c, C) eine Majorante ist. In dem durch

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad -\infty < y < +\infty \tag{5}$$

definierten Bereich der (x, y)-Ebene sei b eine stetige Funktion von (x, y). Unter diesen Voraussetzungen besitzt (1) eine und nur eine Normallösung mit der vorgeschriebenen *normalen* Anfangsbedingung

$$z(x_0, y) = g(y) \qquad (\alpha \leqq x_0 \leqq \beta). \tag{6}$$

Diese Normallösung existiert im ganzen Bereiche (5).

Da die Form von (1) und alle Voraussetzungen über die Koeffizienten bei den Substitutionen $x' = x - x_0$, $x' = \text{konst.}\, x$, $y' = \text{konst.}\, y$, $z' = z - g(y)$ erhalten bleiben, so ist es klar, daß wir uns beim Beweis auf den Fall $x_0 = \alpha = 0$, $\beta = 1$, $g(y) = 0$ beschränken und an Stelle von (3)

$$Ce^{y} \tag{3'}$$

als Majorantenfunktion für b benutzen dürfen. Wir werden also im folgenden annehmen:

$$0 \leqq x \leqq 1, \tag{4'}$$

$$z(0, y) = 0 \tag{6'}$$

und haben Existenz und eindeutige Bestimmtheit der Normallösung im Bereiche

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad -\infty < y < +\infty \tag{5'}$$

zu beweisen.

a) Herstellung der Lösung. Wir setzen

$$z_0(x, y) = \int_0^x b(t, y)\, dt, \tag{7}$$

$$z_n(x, y) = \int_0^x \left[a_0(t) z_{n-1} + a_1(t) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + a_2(t) \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial y^2} \right] dt \tag{8}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$s_n = z_0 + z_1 + \ldots + z \tag{9}$$

und behaupten, die s_n konvergieren mit $n \to \infty$ im ganzen Bereich (5′) gegen eine der Anfangsbedingung (6′) genügende Normallösung von (1).

Diese Behauptung wird erwiesen sein, wenn wir zeigen können, daß die s_n sowie alle ihre Ableitungen nach y in jedem beschränkten Teilbereich von (5′) gleichmäßig konvergieren und daß bei passender Wahl einer Konstanten M für jedes x aus (4′)

$$\left|\frac{\partial^\varrho s_n}{\partial y^\varrho}\right| \leqq e^\nu e^{3M} C \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

ist. Denn da nach (7), (8), (9)

$$s_n = \int_0^x \left[b(t,y) + a_0(t) s_{n-1} + a_1(t) \frac{\partial s_{n-1}}{\partial y} + a_2(t) \frac{\partial^2 s_{n-1}}{\partial y^2} \right] dt$$

ist, so folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz, daß $z = \lim_{n \to \infty} s_n$ eine der Anfangsbedingung (6′) genügende Lösung von (1) und eine beliebig oft nach y differenzierbare stetige Funktion von (x, y) ist; aus (10) ergibt sich dann

$$\left|\frac{\partial^\varrho z}{\partial y^\varrho}\right| \leqq e^\nu e^{3M} C,$$

woraus folgt, daß z eine *Normal*lösung ist.

Um nun den Beweis der angeführten Behauptungen zu erbringen, betrachten wir, wenn M eine wegen der vorausgesetzten Stetigkeit gewiß existierende Zahl ist, für die

$$|a_\nu(x)| \leqq M \qquad (\nu = 0, 1, 2) \tag{11}$$

gilt, neben (1) die „majorante“ Differentialgleichung

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = C e^\nu + M\left(Z + \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right) \tag{12}$$

unter der Anfangsbedingung

$$Z(0, y) = 0. \tag{13}$$

Setzen wir analog (7), (8), (9)

$$Z_0 = \int_0^x C e^\nu dt, \tag{14}$$

$$Z_n = \int_0^x M\left(Z + \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right) dt, \tag{15}$$

$$S_n = Z_0 + Z_1 + \ldots + Z_n, \tag{16}$$

so erkennt man, da b nach Voraussetzung die Majorante (3′) besitzt, unter Beachtung von (11) unmittelbar durch Schluß von n auf $n+1$, daß für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

$$|z_n| \leqq Z_n, \qquad \left|\frac{\partial^\varrho z_n}{\partial y^\varrho}\right| \leqq \left|\frac{\partial^\varrho Z_n}{\partial y^\varrho}\right| \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots),$$

also auch

$$|s_n| \leqq S_n, \qquad \left|\frac{\partial^\varrho s_n}{\partial y^\varrho}\right| \leqq \frac{\partial^\varrho S_n}{\partial y^\varrho} \tag{17}$$

ist. Hieraus folgt, daß es zum Beweis unserer Behauptungeu genügt, die gleichmäßige Konvergenz der S_n und ihrer Ableitungen nach y, sowie das Bestehen der Ungleichungen

$$\frac{\partial^\varrho Z}{\partial y^\varrho} \leqq e^{y}\, e^{3M}\, C, \tag{18}$$

worin $Z = \lim_{n\to\infty} S_n$ gesetzt ist, zu beweisen. Denn da die Z_n und ihre Ableitungen nach y nicht negativ sind, so folgt aus (18) und (17) das Bestehen von (10).

Alles noch zu Beweisende folgt nun leicht aus bekannten Tatsachen über lineare *gewöhnliche* Differentialgleichungen. Macht man nämlich zur Lösung von (12), (13) den Ansatz

$$Z(x, y) = e^{y}\, \zeta(x),$$

so erhält man für $\zeta(x)$ die gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$\frac{d\zeta}{dx} = C + 3M\zeta$$

mit der Anfangsbedingung

$$\zeta(0) = 0.$$

Die eindeutig bestimmte Lösung lautet

$$\zeta(x) = \frac{C}{3M}\left(e^{3Mx} - 1\right), \tag{19}$$

und es ist bekannt, daß man $\zeta(x)$ folgendermaßen erhalten kann: Setzt man

$$\zeta_0 = \int_0^x C\, dt, \tag{20}$$

$$\zeta_n = \int_0^x 3M\zeta_{n-1}\, dt, \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{21}$$

$$\sigma_n = \zeta_0 + \zeta_1 + \ldots + \zeta_n, \tag{22}$$

so konvergieren die σ_n im ganzen Intervalle (4′) gleichmäßig gegen $\zeta(x)$. Der Vergleich von (14) bis (16) mit (20) bis (22) zeigt aber durch Schluß von n auf $n+1$, daß

$$Z_n = e^{y}\, \zeta_n, \quad \text{also} \quad S_n = e^{y}\, \sigma_n.$$

Also konvergieren die S_n und alle ihre Ableitungen nach y gleichmäßig in jedem beschränkten Teilbereich von (5′), und zwar gegen $Z = e^{\nu}\zeta(x)$, woraus nach (19) (unter der zulässigen Annahme $3M \geqq 1$) auch das Bestehen von (18) folgt. Hiermit ist alles bewiesen.

b) Beweis der Eindeutigkeit. Es ist zu zeigen, daß eine Normallösung z der *homogenen* Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a_0(x)z + a_1(x)\frac{\partial z}{\partial y} + a_2(x)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{23}$$

identisch in x und y verschwindet, wenn sie für $x = 0$ verschwindet. z besitzt nach Voraussetzung die Majorante (3); wir dürfen wieder ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß (3′) eine Majorante bildet. Nach (23) und (11) ist nun

$$|z(x,y)| = \left|\int_0^x \left(a_0 z + a_1\frac{\partial z}{\partial y} + a_2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dt\right| \tag{24}$$

$$\leqq M\int_0^x \left(|z| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|\right)dt,$$

und dieselbe Ungleichung gilt, wenn man z durch eine Ableitung nach y beliebiger Ordnung ersetzt. Hieraus folgt unter Benutzung der Majorante (3′), daß z und alle Ableitungen von z nach y absolut genommen höchstens gleich

$$3CMe^{\nu}x$$

sind, so daß

$$|z| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right| \leqq 3^2 MCe^{\nu}x$$

ist und die gleiche Abschätzung gilt, wenn man links z durch eine Ableitung beliebiger Ordnung nach y ersetzt. Unter Benutzung dieser Abschätzung folgt wieder aus (24), daß z und alle Ableitungen nach y absolut genommen höchstens gleich

$$(3M)^2 Ce^{\nu}\frac{x^2}{2!}$$

sind. Indem man in der gleichen Weise fortfährt, erkennt man, daß für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$|z| \leqq (3M)^n Ce^{\nu}\frac{x^n}{n!}$$

ist, woraus die Behauptung $z \equiv 0$ folgt. —

Es ist leicht, die gewonnenen Resultate ins Komplexe zu übertragen und folgendes zu zeigen:

Satz 2. Die Koeffizienten b, a_ν von (1) seien in einem einfach zusammenhängenden abgeschlossenen beschränkten, von einer rektifizierbaren Randkurve begrenzten Bereiche $\mathfrak{B}_x$ der komplexen x-Ebene regulär analytische Funktionen von x, während b überdies für jedes x aus $\mathfrak{B}_x$ eine ganze Funktion von y mit der gliedweisen Majorante (3) und stetig in (x, y) ist. Zu der normalen in einem Punkte x_0 von $\mathfrak{B}_x$ vorgeschriebenen Anfangsbedingung (6) gibt es dann eine und nur eine Normallösung von (1). Diese ist für alle x aus $\mathfrak{B}_x$ und alle y eine analytische Funktion von (x, y).

Existenzbeweis. Da b auf Grund der gemachten Voraussetzungen analytisch in (x, y) ist, so schließt man — unter der Annahme $x_0 = 0$ — unmittelbar durch Schluß von $n-1$ auf n aus (7), (8), (9), daß das gleiche für z_n, also auch für s_n gilt. Der Beweis, daß die s_n gegen eine Normallösung z von (1) konvergieren, und zwar *gleichmäßig*, wenn sich y in einem beschränkten Bereich der y-Ebene und x in $\mathfrak{B}_x$ bewegen, ist wie in Satz 1 zu führen. Aus der Gleichmäßigkeit folgt dann unmittelbar, daß z eine analytische Funktion von (x, y) ist.

Beweis der Eindeutigkeit. Beachtet man, daß für jede in $\mathfrak{B}_x$ regulär-analytische Funktion φ

$$\left|\int_0^x \varphi(t)\,dt\right| \leqq \int_0^l |\varphi(t(s))|\,ds$$

gilt, wenn $t(s)$ irgendein die Punkte 0 und x verbindender, ganz in $\mathfrak{B}_x$ gelegener Weg, s seine von 0 an gerechnete Bogenlänge und l der Wert von s im Punkte x ist, so wird man bemerken, daß der in Satz 1 für die Eindeutigkeit gegebene Beweis vollständig erhalten bleibt, sobald man nur in allen Abschätzungen x durch l ersetzt.

Eine den Anfangsbedingungen (6) genügende *analytische* Lösung von (1) ist mit der von uns konstruierten Normallösung identisch, denn diese ist ebenfalls analytisch und im Falle analytischer Koeffizienten existiert höchstens eine analytische Lösung mit der Anfangsbedingung (6). Diese Bemerkung erlaubt an einem Beispiel zu zeigen, daß schon bei einfacher Abhängigkeit der Koeffizienten a_ν von y Satz 2 nicht richtig zu sein braucht. Die Koeffizienten der Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$$

genügen den Voraussetzungen von Satz 2 für jeden Bereich $\mathfrak{B}_x$. Die der normalen Anfangsbedingung

$$z(0, y) = y$$

genügende in der Umgebung des Nullpunktes analytische Lösung

$$z(x,y)=\frac{y}{1-xy}$$

ist aber nicht für alle x, y regulär[8]).

Satz 3. Sei λ ein Parameter, von dem die Koeffizienten a_ν, b von (1), sowie die in der Anfangsbedingung (6) auftretende Funktion g abhängen. Für jeden Wert des Variabilitätsbereiches von λ mögen die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt sein, wobei die in der Majorantenfunktion (3) auftretenden Konstanten c, C von λ unabhängig sei sollen. Es seien ferner die a_ν stetig in (x,λ), b in (x,y,λ), g in (y,λ). Wir behaupten:

Variiert λ in einem reellen Intervall J_λ, so ist die durch (6) bestimmte Normallösung $z(x,y)$ von (1) für jedes λ aus J_λ und jedes x, y aus (5) eine stetige Funktion von (x,y,λ).

Variiert λ in einem Bereich $\mathfrak{B}_\lambda$ der komplexen λ-Ebene, und sind in diesem die a_ν, b, g analytische Funktionen von λ, so ist $z(x,y)$ für jedes λ aus $\mathfrak{B}_\lambda$ und jedes x, y aus (5) stetig in (x,y,λ) und analytisch in λ.

Zusatz. Entsprechende Behauptungen gelten, wenn an Stelle der Voraussetzungen des Satzes 1 die des Satzes 2 treten.

Beweis. Aus (7), (8) schließt man durch Schluß von $n-1$ auf n, daß $\frac{\partial^\varrho z_n}{\partial y^\varrho}$ für jedes n im ersten Falle stetig in (x,y,λ), im zweiten Falle überdies analytisch in λ ist. Dabei ist zu benutzen, daß nicht nur b, sondern auch (wie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel sofort zu

---

[8]) Es läßt sich aber, wie wir kurz bemerken wollen, bei Abhängigkeit der Koeffizienten von y folgendes zeigen: Ist in Gleichung (1′) $\varrho \leqq \mathsf{P}$, $\sigma \leqq \Sigma$ und $\mathsf{P}+\Sigma \leqq r-1$, genügen ferner die Koeffizienten $a_{\sigma\varrho}$ und b von (1′) den in Satz 1 über b gemachten Voraussetzungen, so existiert zu vorgeschriebenen normalen Anfangsbedingungen (vgl. Anm. [6]) stets eine Lösung von (1′) im ganzen Bereich (5′). Macht man nämlich wie früher die zulässige Annahme, daß die für $x=0$ für $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{r-1} z}{\partial x^{r-1}}$ vorgeschriebenen Funktionen von y sämtlich 0 sind, und setzt

$$z_0=\int_0^x\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{r-1}} b(x_r,y)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_r,$$

$$z_n=\int_0^x\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{r-1}}\sum a_{\varrho\sigma}(x_r)\frac{\partial^{\varrho+\sigma}}{\partial x^\varrho\,\partial y^\varrho} z_{n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_r \qquad (n=1,2,\ldots),$$

so findet man, daß $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert und im ganzen Bereich (5′) eine Lösung von (1′) mit der vorgeschriebenen Anfangsbedingung darstellt, die stetig in (x,y), ganz in y ist und die Majorante

$$e^{Ckx^{r-\mathsf{P}}e^y}$$

besitzt, wo k gleich der Anzahl der in (1′) auftretenden $a_{\varrho\sigma}$ ist.

sehen) $\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}$ stetig in (x, y, λ) ist. Unsere Behauptung folgt nunmehr unmittelbar daraus, daß die Partialsummen (9) für $n \to \infty$ gleichmäßig konvergieren, wenn sich x, y in einem Teilbereich von (5) und λ in einem abgeschlossenen beschränkten Teilbereich von J_λ bzw. $\mathfrak{B}_\lambda$ bewegen. Die Gleichmäßigkeit in λ folgt daraus, daß c, C nach Voraussetzung von λ unabhängig sind, während man nach (11) für M in einem abgeschlossenen beschränkten Teilbereich von J_λ bzw. $\mathfrak{B}_\lambda$ gewiß eine von λ unabhängige Zahl wählen kann, da die a_ν als stetige Funktionen von (x, λ) vorausgesetzt sind. — Der Beweis des Zusatzes verläuft entsprechend. —

Dem eben bewiesenen Satz gegenüber ist es von Interesse, zu bemerken, daß nicht jede Lösung einer linearen partiellen Differentialgleichung stetig von ihren Anfangsbedingungen abzuhängen braucht, selbst dann nicht, wenn die Anfangsbedingungen normale und die Lösung eine Normallösung ist. Dies zeigt das folgende Beispiel, welches einem von Hadamard[9]) für harmonische Funktionen gegebenen analog gebildet ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \qquad z(0, y, \lambda) = g(y, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \lambda = 0, \\ \lambda \sin \frac{y}{\lambda} & \text{für} \quad 0 < \lambda \leqq 1. \end{cases}$$

Differentialgleichung und Anfangsbedingung werden erfüllt durch die Funktion

$$z(x, y, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \lambda = 0, \\ \lambda e^{\frac{x}{\lambda^2}} \sin \frac{y}{\lambda} & \text{für} \quad 0 < \lambda \leqq 1. \end{cases}$$

Da bei positivem x

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda e^{\frac{x}{\lambda^2}} = \infty$$

ist, so ist z für solche x als Funktion von λ bei $\lambda = 0$ unstetig, obwohl für jedes λ des Intervalls $0 \leqq \lambda \leqq 1$ die Anfangsbedingung normal, die angegebene Lösung eine Normallösung und außerdem g eine stetige Funktion von (y, λ) (auch bei $\lambda = 0$) ist. Dies liegt daran, daß $g(y, \lambda)$ die Voraussetzung unseres Satzes, die Majorante (3) mit *von λ unabhängigen* Zahlen c, C zuzulassen, nicht erfüllt. Denn für solche Zahlen c, C müßte, wie man durch Vergleichen der Koeffizienten von y^3 sieht, für $0 < \lambda \leqq 1$

$$\frac{1}{\lambda^2} < C c^3$$

sein, was unmöglich ist.

---

[9]) S. Anmerkung [3]).

(Eingegangen am 12. Juli 1926.)

Equazioni integrali contenenti il valor principale di un integrale doppio.

Von

Francesco Tricomi in Turin.

Uno dei più interessanti problemi non ancora pienamente risoluti della teoria del potenziale è il così detto «problema del disco», e cioè la determinazione di una funzione armonica nello spazio a tre dimensioni, infinitesima all'infinito, assumente assegnati valori nei punti di un dato «disco» e cioè su di un pezzo di superficie aperto, piano oppur no.

L'unicità della funzione si prova assai agevolmente, invece la dimostrazione della sua esistenza e la discussione delle eventuali discontinuità delle sue derivate in prossimità dell'orlo del disco, presentano notevoli difficoltà e, sostanzialmente, finora non si posseggono se non nel caso che il disco sia circolare od ellittico e, per di più, i valori deposti su di esso siano *stratificati* circolarmente o per ellissi omotetiche al contorno[1]).

Se — come viene spontaneo di fare — cerchiamo di rappresentare la funzione in discorso, che chiameremo V, come un potenziale di strato semplice dovuto ad una distribuzione con densità μ (eventualmente infinita all'orlo) sul disco S, se poniamo cioè

$$V(P) = \iint_S \frac{1}{r(P, Q)} \mu(Q)\, dS_Q , \tag{1}$$

detta $F(P)$ la funzione costituita dagli assegnati valori di V sul disco, per determinare l'incognita μ avremo l'equazione integrale di prima specie

$$\iint_S \frac{1}{r(P, Q)} \mu(Q)\, dS_Q = F(P), \qquad (P \text{ su } S). \tag{2}$$

[1]) E. Beltrami, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche.* [Mem. Acc. Scienze Bologna (4) 2, 1880 (Opere Matem. di E. B. 3, pag. 349. Milano, Hoepli, 1911)].

L'equazione (2) non è di natura tale da gettare molta luce sulla questione; essa si può però facilmente trasformare in una equazione integrale singolare — d'aspetto più trattabile — sfruttando un'idea già da me[2]) e dal G. Bertrand[3]) utilizzata in altri punti della teoria del potenziale. Invero, se fissiamo in ciascun punto P del disco una direzione t contenuta nel rispettivo piano tangente e deriviamo ambo i membri della (2) rispetto a t, è facile vedere che l'equazione in parola si muta nell'altra

$$(3) \qquad \overset{*}{\iint_S} \frac{\cos(t, PQ)}{r^2(P, Q)} \mu(Q)\, dS_Q = \frac{dF}{dt},$$

dove l'asterisco sta a denotare che dell'integrale doppio — che opera su di una funzione infinita di second'ordine per $P \equiv Q$ — si deve considerare il *valor principale*, ossia il limite per $\varepsilon \to 0$ dell'integrale esteso ad S meno un *cerchietto* di centro P e raggio ε.

Sfortunamente — mentre la teoria delle equazioni contenenti un integrale semplice «con asterisco» è attualmente già assai progredita, soprattutto per merito delle belle ricerche di T. Carleman[4]) — nulla finora era stato fatto relativamente alle equazioni contenenti un integrale doppio. Sono stato così indotto ad occuparmi di siffatte equazioni, e il presente lavoro contiene i principali risultati che ho potuto conseguire in tale campo, che non mi sembrano indegni di essere fatti conoscere, per quanto essi siano ancora lungi dal fornire la completa soluzione della (3).

Sommario.

§ 1. Generalità sugli integrali doppi «con asterisco» e formule preliminari.

§ 2. Formula d'inversione dell'ordine di due successive integrazioni doppie «con asterisco». (Parte prima.)

§ 3. Idem. (Continuazione e fine.)

§ 4. Composizione dei nuclei M nel piano indefinito.

§ 5. Risoluzione delle equazioni integrali «con asterisco» nel caso del piano indefinito.

§ 6. Su di una particolare equazione con integrale doppio «con asterisco» esteso ad un campo finito.

---

[2]) *Su di un'equazione integrale di prima specie.* [Rend. Circ. Matem. Palermo **46** (1922), pag. 357–388].

[3]) *Le problème de Dirichlet et le potentiel de simple couche.* [Bull. Sc. Mathèm. (2) **47** (1922), pag. 282 e 298.]

[4]) *Sur la résolution de certaines équations intégrales.* [Arkiv för Mat. Astron. och Fysik **16** (1922), pag. 1–19].

§ 1.

Generalità sugli integrali doppi «con asterisco» e formule preliminari.

Il concetto di valor principale di un integrale nel senso di Cauchy, si trasporta agevolmente dal caso degli integrali semplici a quello degli integrali doppi — o, più generalmente, multipli — nel modo che si è accennato nell' Introduzione.

Per metterci nelle condizioni più semplici possibili, supponiamo data una funzione di due variabili $F(x, y)$ integrabile duplicemente nell' area S *tranne nel punto* P, cioè integrabile nell' area S da cui sia stato tolto il punto P mediante un' areola σ, di dimensioni tanto piccole quanto si vuole, contenente il punto P nel suo interno. In tale stato di cose, detta 2ε la massima dimensione dell' areola σ [5]), si definisce notoriamente l' integrale di F esteso a tutta l' area S, mediante la formula

$$(4) \qquad \iint_S F(x, y)\, dS = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S-\sigma} F(x, y)\, dS$$

supposto, beninteso, che il limite per $\varepsilon \to 0$ esista e sia indipendente dalla forma dell' areola σ. In particolare questa condizione è verificata se la funzione F diviene *infinita d' ordine minore di* 2 (rispetto alla distanza) nel punto P, e in tal senso va intesa la proposizione, così spesso usata, che le funzioni di due variabili infinite d' ordine minore di 2 in punti isolati sono integrabili.

Se invece la funzione F diviene infinita di 2° ordine nel punto P, è facile persuadersi che il limite (4) dipende dal modo con cui si fa tendere a zero l' areola σ.

Infatti, supposto che la *caratteristica* del polo di $F(x, y)$ in P sia $f(\theta)$, cioè che — dette ϱ e θ le coordinate polari rispetto a P — si possa porre

$$(5) \qquad F(x, y) = \frac{f(\theta)}{\varrho^2} + F_1(x, y)$$

dove $F_1(x, y)$ denota una funzione al più infinita d' ordine minor di 2 in punti isolati, e supposto inoltre che le equazioni polari dei contorni di S e σ siano rispettivamente

$$\varrho = A(\theta), \qquad \varrho = \alpha(\varepsilon, \theta);$$

si ha manifestamente

$$\iint_{S-\sigma} F(x, y)\, dS = \iint_{S-\sigma} F_1(x, y)\, dS + \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{A(\theta)} \frac{1}{\varrho^2}\, \varrho\, d\varrho,$$

---

[5]) Ossia detto ε il raggio del più piccolo cerchietto atto a contenere σ nel suo interno.

da cui segue

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S-\sigma} F(x,y)\,dS$$

$$(6)\qquad = \iint_S F_1(x,y)\,dS + \int_0^{2\pi} f(\theta)\log A(\theta)\,d\theta - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} f(\theta)\log\alpha(\varepsilon,\theta)\,d\theta.$$

In particolare, se si suppone che l'areola σ sia un *cerchietto* C_ε di raggio ε:

$$\alpha(\varepsilon,\theta) = \varepsilon,$$

l'ultimo termine del secondo membro della (6) diviene

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\log\varepsilon\cdot\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta,$$

e quindi la condizione necessaria e sufficiente affinchè esso sia finito è che sia

$$(7)\qquad \int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = 0.$$

Orbene — supposta verificata la condizione (7) — noi definiremo come valor principale dell'integrale di F esteso ad S, proprio il limite trovato nell'ipotesi precedente, cioè porremo, per definizione,

$$(8)\qquad \overset{*}{\iint_S} F(x,y)\,dS = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S-C\varepsilon} F(x,y)\,dS.$$

Dopo quanto si è detto è facile stabilire la relazione fra l'integral principale di F e uno qualsiasi degli integrali-limiti del tipo (6). Invero, supposto, per esempio che la funzione $\alpha(\varepsilon,\theta)$ al tendere di ε a zero, tenda a zero in modo che si abbia

$$(9)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha(\varepsilon,\theta)}{\varepsilon} = \alpha_0(\theta)$$

e per di più che questo rapporto sia una funzione superficialmente continua di ε e θ nelle prossimità di $\varepsilon = 0$, dalla relazione [equivalente alla (6)]

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S-\sigma} F(x,y)\,dS$$

$$= \iint_S F_1(x,y)\,dS + \int_0^{2\pi} f(\theta)\log A(\theta)\,d\theta - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} f(\theta)\log\frac{\alpha(\varepsilon,\theta)}{\varepsilon}\,d\theta,$$

si trae subito che

$$(10)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S-\sigma} F(x,y)\,dS = \overset{*}{\iint_S} F(x,y)\,dS - \int_0^{2\pi} f(\theta)\log\alpha_0(\theta)\,d\theta.$$

Come nel caso degli integrali semplici, l'importanza del concetto di valor principale di un integrale doppio risiede principalmente nel fatto che, col suo ausilio, si possono compiere certe derivazioni sotto il segno che altrimenti non sarebbero possibili. Per esempio, sia da calcolare la derivata parziale rispetto ad x dell'integrale

$$I = \iint_S \Phi(x, y \mid \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

dove Φ denota una funzione dei due punti $P \equiv (x, y)$ e $Q \equiv (\xi, \eta)$ infinita di prim'ordine per $P \equiv Q$, che possa rappresentari con una formula del tipo

$$\Phi = \frac{\varphi(\theta)}{\varrho} + \Phi_1, \tag{11}$$

dove ϱ e θ denotano le coordinate polari di Q rispetto a P e Φ_1 una funzione dotata di derivata parziale rispetto ad x continua nell'area S.

Cominciamo coll'osservare che si ha notoriamente

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = -\cos\theta, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\sin\theta}{\varrho}$$

da cui, supposta la funzione φ derivabile, segue

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi(\theta)}{\varrho} = \frac{\varphi'(\theta)\sin\theta + \varphi(\theta)\cos\theta}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho^2}\frac{d}{d\theta}\left[\varphi(\theta)\sin\theta\right] \tag{12}$$

e successivamente

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{\varrho^2}\frac{d}{d\theta}\left[\varphi(\theta)\sin\theta\right] + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}.$$

Ciò mostra che $\partial\Phi/\partial x$ diviene infinita di 2° ordine per $P \equiv Q$ e quindi la derivazione dell'integrale I non può farsi senz'altro sotto il segno.

Invece tale derivazione può compiersi facendo intervenire il concetto di valor principale, e precisamente dico che sussiste la formula

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \overset{*}{\iint_S} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, d\xi\, d\eta - \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\cos\theta\, d\theta. \tag{13}$$

Per dimostrare la (13) è opportuno considerare accanto al punto P — che dovrà venire spostato parallelamente all'asse x per compiere la derivazione — un punto *fisso* P_0, di coordinate cartesiane x_0 ed y ($x_0 < x$), che prenderemo come centro di un cerchietto di raggio ε C_ε da costruirsi in modo che esso non esca fuori di S e comprenda il punto P nel suo interno: cosa certamente possibile purchè P_0 sia sufficientemente prossimo a P. Essendo la funzione $\partial\Phi/\partial x$ continua nell'area $S - C_\varepsilon$ (che non comprende il punto P) potremo porre

$$\frac{\partial}{\partial x}\iint_{S-C_\varepsilon} \Phi(x, y \mid \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \iint_{S-C_\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, d\xi\, d\eta$$

da cui segue

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \iint_{S-C_\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, d\xi\, d\eta + \frac{\partial}{\partial x} \iint_{C_\varepsilon} \Phi\, d\xi\, d\eta$$

ovvero, tenendo conto che $\partial \Phi_1 / \partial x$ è continua anche nel cerchietto C_ε,

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \iint_{S-C_\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, d\xi\, d\eta + \iint_{C_\varepsilon} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\, d\xi\, d\eta + \frac{\partial}{\partial x} \iint_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\theta)}{\varrho}\, d\xi\, d\eta. \tag{14}$$

Ciò premesso, allo scopo di valutare l'integrale che figura nell'ultimo termine della (14), osserviamo che i punti della periferia del cerchietto C_ε sono evidentemente caratterizzati dall'equazione

$$(x - x_0)^2 + 2(x - x_0)\varrho \cos\theta + \varrho^2 = \varepsilon^2$$

da cui si ricava

$$\varrho = -(x - x_0)\cos\theta \pm \sqrt{\varepsilon^2 - (x - x_0)^2 \sin^2\theta};$$

pertanto, scegliendo p. es. il valore corrispondente al segno + davanti al radicale e ponendo per abbreviare

$$R(\theta, x) = -(x - x_0)\cos\theta + \sqrt{\varepsilon^2 - (x - x_0)^2 \sin^2\theta},$$

potremo scrivere che

$$\iint_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\theta)}{\varrho}\, d\xi\, d\eta = \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta \int_0^{R(\theta,x)} d\varrho = \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, R(\theta, x)\, d\theta$$

da cui segue

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\theta)}{\varrho}\, d\xi\, d\eta = \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \frac{\partial R}{\partial x}\, d\theta = -\int_0^{2\pi} \left[\cos\theta + \frac{(x - x_0)\sin^2\theta}{\sqrt{\varepsilon^2 - (x - x_0)^2 \sin^2\theta}}\right] \varphi(\theta)\, d\theta$$

e quindi, supponendo $x = x_0$ cioè $P \equiv P_0$, il che ora è lecito essendo la derivazione già compiuta, ne concluderemo che

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\theta)}{\varrho}\, d\xi\, d\eta = -\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos\theta\, d\theta.$$

Per ottenere la (13) non resta ora che a passare al limite per $\varepsilon \to 0$ nella (14), tenendo conto che è evidentemente

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{C_\varepsilon} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\, d\xi\, d\eta = 0.$$

La formula (13) può essere facilmente generalizzata in modo da renderla atta al calcolo della derivata di I secondo una direzione orientata qualsiasi t. Invero questo caso si riconduce subito al precedente assu-

mendo per un momento come nuovo asse x' una retta avente la direzione e il verso di t, avremo così, detta θ' l'anomalia contata a partire da x' e α l'angolo (x, x'):

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x'} = \iint_S^* \frac{d\Phi}{dt}\, dS - \int_0^{2\pi} \varphi(\theta' + \alpha) \cos\theta'\, d\theta'$$

ovvero, scrivendo θ in luogo di $\theta' + \alpha$,

$$\frac{dI}{dt} = \iint_S^* \frac{d\Phi}{dt}\, dS - \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos(\theta - \alpha)\, d\theta. \tag{15}$$

Le formule ottenute si prestano a varie applicazioni: per esempio esse permettono di esprimere sotto una forma molto semplice le derivate seconde di un potenziale logaritmico di campo:

$$V(P) = \iint_S \log \frac{1}{r(P,Q)}\, \mu(Q)\, dS_Q$$

nei punti interni al campo stesso. Invero, essendo l'integrale liberamente derivabile una sola volta sotto il segno, detta t_1 una direzione qualsiasi, si ha anzitutto

$$\frac{dV}{dt_1} = \iint_S \frac{d}{dt_1}\left(\log\frac{1}{r}\right) \mu(Q)\, dS_Q. \tag{16}$$

Ciò posto si osservi che

$$\frac{d}{dt_1}\left(\log\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{dr}{dt_1} = \frac{\cos(t_1, PQ)}{r(P,Q)}$$

quindi la funzione sotto integrale in (16) può scriversi sotto la forma

$$\mu(P)\frac{\cos(\theta - \alpha_1)}{r} + \Phi_1, \tag{17}$$

avendo indicato con α_1 l'angolo (x, t_1) e con Φ_1 la funzione regolare

$$\Phi_1 = \frac{\cos(\theta - \alpha_1)}{r}[\mu(Q) - \mu(P)]$$

ne segue, confrontando la (17) con la (11), che — detta t_2 un'altra direzione qualsiasi ed α_2 l'angolo che essa forma con l'asse x — sussiste la formula

$$\frac{d^2 V}{dt_1\, dt_2} = \iint_S^* \frac{d^2 \log 1/r}{dt_1\, dt_2}\, \mu(Q)\, dS_Q - \mu(P) \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \alpha_1) \cos(\theta - \alpha_2)\, d\theta$$

ossia

$$\frac{d^2 V}{dt_1\, dt_2} = \overset{*}{\iint_S} \frac{d^2 \log 1/r}{dt_1\, dt_2}\, \mu(Q)\, dS_Q - \pi\mu(P)\cos(t_1, t_2). \quad (18)$$ [6]

In particolare, supponendo che le direzioni t_1 e t_2 coincidano ambedue una volta con l'asse x e l'altra con l'asse y, si hanno le due formule

$$(19) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \overset{*}{\iint_S} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\log\dfrac{1}{r}\right)\mu(Q)\, dS_Q - \pi\mu(P) \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \overset{*}{\iint_S} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\log\dfrac{1}{r}\right)\mu(Q)\, dS_Q - \pi\mu(P), \end{cases}$$

che sommate fra loro dànno immediatamente l'equazione di Poisson:

$$\Delta_2 V = \overset{*}{\iint_S} \Delta_2 \log\frac{1}{r}\, \mu(Q)\, dS_Q - 2\pi\mu(P) = -2\pi\mu(P).$$

Un'altra applicazione importante della formula di derivazione consiste nel calcolo delle derivate prime tangenziali di un potenziale newtoniano di strato semplice:

$$W(P) = \iint_S \frac{\mu(Q)}{r(P,Q)}\, dS_Q, \quad (20)$$

nel caso che il punto potenziato P appartiene alla superficie potenziante S.

Infatti, supposto per semplicità che il quadrato dell'elemento lineare della superficie sia

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2),$$

cioè che i punti della superficie siano stati riferiti a un sistema di coordinate curvilinee ortogonali a parametri isotermi, osserviamo anzitutto che, detti rispettivamente P' e Q' i punti omologhi di P e di Q nel piano (u, v) ed S' il campo corrispondente ad S, la (20) può scriversi sotto la forma

$$W(P') = \iint_{S'} \frac{\mu(Q')}{r(P,Q)} E_{Q'}\, du\, dv. \quad (21)$$

La distanza $r(P, Q)$ dei due punti P e Q non coinciderà in generale con la distanza — che diremo r' — fra i due punti P' e Q' nel piano (u, v);

---

[6]) Un'altra formula pel calcolo delle derivate seconde di un potenziale logaritmico trovasi nelle *Lezioni di Analisi infinitesimale* di M. Picone [Catania, 1923; Cap. IV, N°. 90, pag. 493, form. (37)]; però, non avendo l'A. a disposizione lo strumento costituito dagli integrali con asterisco, la forma del termine residuale risulta non semplice.

perciò sarebbe erroneo concludere, confrontando la funzione sotto il segno nella (21) con la (11), che la funzione che nel caso attuale le tiene le veci della $\varphi(\theta)$ sia la quantità

$$\mu(P')\,E_{P'}\,.$$

Bisogna invece tener conto che, essendo

$$\lim_{Q'\to P'}\frac{r}{r'}=\sqrt{\frac{ds^2}{du^2+dv^2}}=\sqrt{E_{P'}},$$

si ha (a meno di termini finiti per $P'\equiv Q'$)

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r'}\frac{1}{\sqrt{E_{P'}}}\,,$$

e troveremo allora che

$$\varphi(\theta)=\sqrt{E_{P'}}\,\mu(P')\,.$$

Ne segue che, detta t' una direzione qualsiasi del piano (u,v) (ed α' l'angolo che essa forma con l'asse u), in virtù della (15) si avrà

$$\frac{dW}{dt'}=\iint_{S'}^{*}\frac{d\frac{1}{r}}{dt'}\,E_{Q'}\,\mu(Q')\,du\,dv-\sqrt{E_{P'}}\,\mu(P')\int_0^{2\pi}\cos(\theta-\alpha')\,d\theta$$

cioè semplicemente

$$\frac{dW}{dt'}=\iint_{S'}^{*}\frac{d\frac{1}{r}}{dt'}\,E_{Q'}\,\mu(Q')\,du\,dv,$$

da cui, ritornando dal piano (u,v) alla superficie S, si trae

$$\frac{dW}{dt}=\iint_{S}^{*}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\,\mu(Q)\,dS_Q=\iint_{S}^{*}\frac{\cos(t,PQ)}{r^2(P,Q)}\,\mu(Q)\,dS_Q\,,\tag{22}$$

avendo indicato con t la direzione (contenuta nel piano tangente ad S in P) omologa di t' e con l'integrale superficiale asteriscato, il limite per $\varepsilon\to 0$ dell'integrale esteso al campo omologo di S' meno un cerchietto di centro P e raggio ε, ciò che equivale a dire che questo integrale è il limite per $\varepsilon\to 0$ dell'integrale esteso al campo S *meno un «cerchietto» di centro P e raggio ε*.

La formula (22) giustifica il passaggio dall'equazione (2) alla (3) fatto nell'Introduzione.

§ 2.

Formula d'inversione dell'ordine di due successive integrazioni doppie «con asterisco». (Parte prima.)

Il tipo generale delle equazioni con integrale doppio con asterisco (di *seconda specie*) è ovviamente il seguente

$$\Phi(P) - \lambda \overset{*}{\iint_S} K(P, Q)\, \Phi(Q)\, dS_Q = F(P), \qquad (P \text{ in } S), \tag{23}$$

dove Φ denota una funzione incognita dei punti dell'area S, λ una costante numerica, ed F e K due funzioni assegnate, la seconda delle quali divenga infinita di second'ordine (rispetto alla distanza) per $P \equiv Q$.

È chiaro che, sotto condizioni qualitative molto larghe, la funzione K potrà rappresentarsi mediante una formula del tipo

$$K(P, Q) = K_1(P, Q) + M(P, Q)$$

dove K_1 denota una funzione al più infinita d'ordine *minore* di 2 per $P \equiv Q$ ed M una funzione del tipo

$$M(P, Q) = \frac{f(\theta)}{r^2} \tag{24}$$

essendo θ l'angolo che la retta QP forma con l'asse x (una retta fissa qualsiasi), r la distanza dei due punti P e Q ed $f(\theta)$ una funzione periodica col periodo 2π, soddisfacente alla condizione (7) del § 1. Segue da ciò che il problema più importante da affrontarsi nello studio delle equazioni con asterisco sarà la risoluzione dell'equazione *canonica*:

$$\Phi(P) - \lambda \overset{*}{\iint_S} M(P, Q)\, \Phi(Q)\, dS_Q = F(P), \tag{25}$$

chè, risoluta che sia questa, la risoluzione della (23) potrà farsi dipendere da quella di un'equazione di Fredholm di tipo ordinario, cioè da un'operazione da riguardarsi qui come avente carattere elementare.

Il primo passo da compiersi sulla via della risoluzione della (25) è evidentemente la determinazione della formula d'inversione dell'ordine di due successive integrazioni con asterisco, senza la quale non è possibile neanche *iterare* il nucleo M.

Com'è noto non è lecito invertire senz'altro l'ordine di due integrazioni semplici con asterisco, ma bisogna invece servirsi della formula

$$\overset{*}{\int_{a'}^{b'}} \frac{dz}{z-x} \overset{*}{\int_a^b} \frac{1}{y-z} F(x, y, z)\, dy = \overset{*}{\int_a^b} dy \overset{*}{\int_{a'}^{b'}} \frac{F(x, y, z)}{(z-x)(y-z)}\, dz - \pi^2 F(x, x, x) \tag{26}$$

che — salvo un errore nel segno del termine residuale — è dovuta al

Poincaré[7]). Dobbiamo dunque aspettarci che qualcosa di analogo si presenti per gli integrali doppi, ossia che, posto genericamente

$$(27)\quad M_1(A,B)=\frac{f_1[\text{ang}(x,BA)]}{\overline{AB}^2},\qquad M_2(A,B)=\frac{f_2[\text{ang}(x,BA)]}{\overline{AB}^2},$$

i due integrali

$$I_1=\overset{*}{\iint_{S_2}} M_1(P,R)\,dS_R\overset{*}{\iint_{S_1}} M_2(R,Q)\,F(P,Q,R)\,dS_Q$$

e

$$I_2=\overset{*}{\iint_{S_1}} dS_Q\overset{*}{\iint_{S_2}} M_1(P,R)\,M_2(R,Q)\,F(P,Q,R)\,dS_R,$$

dove F denota una funzione continua, risultino diversi l'uno dall'altro.

A prima vista potrebbe credersi che la relazione fra i due integrali I_1 e I_2 possa ricavarsi agevolmente dalla (26), ma un esame un po' più approfondito della questione mostra subito che ciò non è, nè la cosa deve meravigliare chè non è questo il solo caso in cui il passaggio dalla una alle due dimensioni muta essenzialmente la natura delle questioni.

Dovremo dunque cercare di valutare direttamente la differenza I_1-I_2, supponendo date arbitrariamente le tre funzioni $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ ed $F(P,Q,R)$, le due prime continue e soddisfacenti alla condizione (7) del § 1 e la terza *lipschitziana* (uniformemente) rispetto a Q ed R, cioè tale che esistano un numero *positivo* α ed un'altro Ω tali da aversi

$$\begin{cases}|F(P,Q_1,R)-F(P,Q_2,R)|<\Omega\, r^{\alpha}(Q_1,Q_2),\\ |F(P,Q,R_1)-F(P,Q,R_2)|<\Omega\, r^{\alpha}(R_1,R_2),\end{cases}$$

qualunque siano i punti $P, Q_1, Q_2, \ldots$ nei rispettivi campi di variabilità.

Avvalendosi delle condizioni precedenti è facile chiarire anzitutto in che modo la differenza I_1-I_2 dipende dalla funzione F.

Infatti potremo porre manifestamente

$$F(P,Q,R)=F(P,P,P)+F_1(P,Q,R)\,r^{\alpha}(P,Q)+F_2(P,Q,R)\,r^{\alpha}(P,R)$$

dove F_1 ed F_2 denotano due funzioni limitate anche per $P=R=Q$; in conseguenza — detti rispettivamente

$$I_1^{(0)}\quad\text{e}\quad I_2^{(0)}$$

ciò che diventano gli integrali I_1 ed I_2 allorchè vi si sopprime il fattore F — avremo

---

[7]) *Leçons de Mécanique céleste* t. III (Paris, Gauthier-Villars, 1910), Chap. X, § 154, pag. 253 e seg. — L'errore di segno è stato corretto da G. Bertrand; vedere p. es. il suo lavoro citato nell'Indroduzione.

$$(28)\qquad I_1 = I_1^{(0)} F(P,P,P)$$
$$+ \overset{*}{\iint_{S_2}} M_1(P,R)\,dS_R \overset{*}{\iint_{S_1}} M_2(R,Q)\,F_1(P,Q,R)\,r^\alpha(P,Q)\,dS_Q$$
$$+ \overset{*}{\iint_{S_2}} M_1(P,R)\,r^\alpha(P,R)\,dS_R \overset{*}{\iint_{S_1}} M_2(R,Q)\,F_2(P,Q,R)\,dS_Q$$

e per I_2 una formula analoga. Si osservi ora che

$$M_1(P,R)\,r^\alpha(P,R) = \frac{f_1(x,RP)}{r^{2-\alpha}(P,R)},$$

sicchè, nell'ultimo termine del 2° membro, l'integrazione rispetto ad R è in realtà un'integrazione ordinaria. Similmente, avendosi evidentemente

$$r(P,Q) < r(P,R) + r(R,Q)$$

da cui si deduce[8]) che

$$r^\alpha(P,Q) < r^\alpha(P,R) + r^\alpha(R,Q),$$

potrà porsi

$$M_1(P,R)\,M_2(R,Q)\,F_1(P,Q,R)\,r^\alpha(P,Q)$$
$$= M_2(R,Q)\,F_1'(P,Q,R)\,\frac{f_1(x,RP)}{r^{2-\alpha}(P,R)} + M_1(P,R)\,F_1''(P,Q,R)\,\frac{f_2(x,QR)}{r^{2-\alpha}(R,Q)}$$

dove F_1' ed F_1'' denotano due nuove funzioni sempre limitate, e quindi il primo termine del secondo membro della (28) potrà scindersi nella somma di due parti anche in ciascuna delle quali una sola delle due successive integrazioni doppie è effettivamente «con asterisco». Ne segue che, a prescindere dai termini contenenti a fattore $F(P,P,P)$, la differenza $I_1 - I_2$ si può spezzare nella somma di tre parti, ciascuna delle quali è la differenza fra due integrali quadrupli, il secondo dei quali è ottenuto dal primo invertendo l'ordine di un'integrazione doppia ordinaria e di una «con asterisco». Ma delle differenze siffatte sono sempre nulle[9]), quindi resta soltanto

$$(29)\qquad I_1 - I_2 = (I_1^{(0)} - I_2^{(0)})\,F(P,P,P).$$

Passiamo ora a dimostrare che *la differenza* $I_1 - I_2$ *non dipende*

---

[8]) Se α, r, r_1 ed r_2 sono numeri positivi ed è inoltre $\alpha \leqq 1$ (limitazione nel nostro caso irrilevante) dalla disuguaglianza

$$r < r_1 + r_2$$

segue l'altra

$$r^\alpha < r_1^\alpha + r_2^\alpha.$$

[9]) Basta osservare che, se agli integrali con asterisco si sostituiscono, in base alla loro definizione, dei limiti per $\varepsilon \to 0$ del tipo (8); i due termini divengono i limiti per $\varepsilon \to 0$ di due integrali quadrupli identici in tutti gli stadi del passaggio al limite.

dalla forma e dimensioni dei due campi d'integrazione S_1 *ed* S_2, purchè — beninteso — essi comprendano sempre il punto P nel loro interno.

Infatti, supponiamo p. es. che il campo S_2 venga rimpiazzato da un altro S_2' e indichiamo con I_1' e I_2' i corrispondenti integrali $I_1^{(0)}$ e $I_2^{(0)}$; considerato che il campo $S_2' - S_2$ non contiene il punto P, avremo

$$I_1' = I_1^{(0)} + \iint_{S_2 - S_2'} M_1(P, R)\, dS_R \overset{*}{\iint_{S_1}} M_2(R, Q)\, dS_Q,$$

$$I_2' = I_2^{(0)} + \overset{*}{\iint_{S_1}} dS_Q \iint_{S_2 - S_2'} M_1(P, R)\, M_2(R, Q)\, dS_R,$$

da cui, per l'invertibilità dell'ordine di un'integrazione ordinaria e di una con asterisco, segue senz'altro

$$I_2' - I_1' = I_2^{(0)} - I_1^{(0)}.$$

Similmente si tratta il caso in cui il campo S_1 venga rimpiazzato da un altro S_1', precisamente basta osservare che in questo caso si può porre

$$\begin{aligned} I_1' &= I_1^{(0)} + \overset{*}{\iint_{S_2}} M_1(P, R)\, dS_R \overset{*}{\iint_{S_1' - S_1}} M_2(R, Q)\, dS_Q \\ &= I_1^{(0)} + \overset{*}{\iint_{S_2 - (S_1' - S_1)}} M_1(P, R)\, dS_R \iint_{S_1' - S_1} M_2(R, Q)\, dS_Q \\ &\quad + \iint_{S_1' - S_1} M_1(P, R)\, dS_R \overset{*}{\iint_{S_1' - S_1}} M_2(R, Q)\, dS_Q \end{aligned}$$

e così pure

$$\begin{aligned} I_2' &= I_2^{(0)} + \iint_{S_1 - S_1'} dS_Q \overset{*}{\iint_{S_2 - (S_1 - S_1)}} M_1(P, R)\, M_2(R, Q)\, dS_R \\ &\quad + \overset{*}{\iint_{S_1' - S_1}} dS_Q \iint_{S_1' - S_1} M_1(P, R)\, M_2(R, Q)\, dS_R, \end{aligned}$$

per dedurre come dianzi che

$$I_2' - I_1' = I_2^{(0)} - I_1^{(0)},$$

Nei calcoli precedenti, per semplicità, è stato supposto che il campo S_2 comprendesse nel suo interno sia S_1 sia S_1'; se quest'ipotesi non fosse invece verificata, la dimostrazione andrebbe modificata in modo ovvio.

La proposizione ora stabilita è importante perchè ci permette di sostituire ai due campi qualsiasi S_1 ed S_2, due campi d'integrazione della forma che più ci torni comoda; precisamente, usufruendo di ciò, noi supporremo d'ora innanzi che S_1 ed S_2 coincidano entrambi con un cerchio C di centro P e raggio arbitrario a. In tal modo la deter-

minazione della formula d'inversione è ridotta alla valutazione della differenza fra i due integrali

$$(30)\qquad \begin{cases} I_1^{(0)} = \overset{*}{\iint_C} M_1(P,R)\,dS_R \overset{*}{\iint_C} M_2(R,Q)\,dS_Q, \\ I_2^{(0)} = \overset{*}{\iint_C} dS_Q \overset{*}{\iint_C} M_1(P,R)\,M_2(R,Q)\,dS_R. \end{cases}$$

Per calcolare l'accennata differenza, cominciamo con l'osservare che, se $\varphi_2(\theta)$ è una funzione tale da aversi

$$(31)\qquad \frac{d}{d\theta}[\varphi_2(\theta)\sin\theta] = f_2(\theta),$$

dette x ed y le coordinate del punto Q rispetto ad una coppia di assi cartesiani (ortogonali) qualsiasi, ed r e θ le coordinate polari di R rispetto a Q come polo e all'asse x come asse polare; in virtù della (12) del § 1, potrà porsi

$$(32)\qquad M_2(R,Q) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_2(\theta)}{r}.$$

Ma la posizione (31) è lecita? Per decidere questa questione osserviamo che da essa si ricava

$$\varphi_2(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\left[\int_0^\theta f_2(\theta)\,d\theta + C\right],$$

dove C è una costante arbitraria che dovremo ovviamente porre uguale a zero se vorremo che $\varphi_2(\theta)$ resti finita per $\theta = 0$ [e anche per $\theta = 2\pi$, in virtù della (7) del § 1]; avremo cioè

$$(33)\qquad \varphi_2(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\int_0^\theta f_2(\theta)\,d\theta.$$

Anche così facendo, sembra però a prima vista che non si possa evitare un infinito di $\varphi_2(\theta)$ per $\theta = \pi$. Invece anche questo inconveniente può essere evitato supponendo opportunamente scelto l'asse x, ch'è anche l'origine delle anomalie θ ed è in nostro arbitrio. Invero, se si sostituisce al primitivo asse x un nuovo asse x' formante col primo l'angolo α, la (33) viene sostituita dall'altra

$$\varphi_2(\theta'+\alpha) = \frac{1}{\sin\theta'}\int_0^{\theta'} f_2(\theta'+\alpha)\,d\theta' \qquad (\theta' = \theta - \alpha)$$

e quindi, affinchè sparisca l'infinito di 1° ordine di $\varphi_2(\theta)$ per $\theta = \pi$, basterà che α sia scelto in modo che si abbia

$$\int_0^{\pi} f_2(\theta' + \alpha)\, d\theta' = 0$$

il che, tenuto conto della (7) del § 1, è sempre possibile[10]).

Se ne conclude che è sempre possibile rappresentare la funzione M_2 mediante la (32).

Avvalendoci della (32) e indicando con c_ε un cerchietto di centro R e raggio ε, potremo porre ovviamente

$$\iint_C^{*} M_2(R, Q)\, dS_Q = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{C - c_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_1(\theta)}{r}\, dS_Q$$

da cui, applicando il lemma di Gauss, avremo

$$\iint_C^{*} M_2(R, Q)\, dS_Q = -\int_\Gamma \frac{\varphi_2(\theta)}{r} \cos(x, n_Q)\, ds_Q - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varphi_2(\theta)}{r} \cos(x, n_Q)\, ds_Q,$$

dove Γ e γ_ε denotano rispettivamente le circonferenze di C e c_ε, n_Q la direzione della normale interna (cioè rivolta verso l'interno del campo $C - c_\varepsilon$) all'una o all'altra di queste due curve in un loro punto qualsiasi Q, e ds_Q l'elemento d'arco intorno Q. Ma nella integrazione lungo γ_ε si ha evidentemente

$$r = \varepsilon, \qquad \operatorname{ang}(x, n_Q) = \operatorname{ang}(x, RQ) = \theta + \pi, \qquad ds_Q = \varepsilon\, d\theta;$$

quindi la precedente formula può scriversi più semplicemente

$$\iint_C^{*} M_2(R, Q)\, dS_Q = -\int_\Gamma \frac{\varphi_2(\theta)}{r} \cos(x, n_Q)\, ds_Q + \int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta) \cos\theta\, d\theta.$$

Finalmente moltiplichiamo per

$$M_1(P, R)\, dS_R$$

ed integriamo «con asterisco» in C, avremo così

$$I_1^{(0)} = -\iint_C^{*} M_1(P, R)\, dS_R \int_\Gamma \frac{\varphi_2(\theta)}{r} \cos(x, n_Q)\, ds_Q + \int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta) \cos\theta\, d\theta \iint_C^{*} M_1(P, R)\, dS_R,$$

---

[10]) Supposto che la funzione $f_2(\theta)$ sia sviluppabile in serie di Fourier e posto

$$f_2(\theta) = a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta + \ldots$$

basta prendere α in modo che sia

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b_1}{a_1}.$$

ma, dette ϱ ed ω le coordinate polari di R rispetto a P, in virtù della (7) del § 1, si ha

$$(34) \qquad \overset{*}{\iint_C} M_1(P,R)\,dS_R = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^a \frac{dr}{r}\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\,d\omega = 0;$$

quindi resta semplicemente

$$(35) \qquad I_1^{(0)} = -\overset{*}{\iint_C} M_1(P,R)\,dS_R \int_\Gamma \frac{\varphi_2(\theta)}{r}\cos(x,n_Q)\,ds_Q.$$

Per mettere anche l'integrale $I_2^{(0)}$ sotto una forma analoga, osserviamo anzitutto che, in virtù della formula di derivazione (13) e della (32), si ha

$$(36) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\overset{*}{\iint_C} M_1(P,R)\frac{\varphi_2(\theta)}{r}\,dS_R$$

$$= \overset{*}{\iint_C} M_1(P,R)\,M_2(R,Q)\,dS_R - M_1(P,Q)\int_0^{2\pi}\varphi_2(\theta)\cos\theta\,d\theta;$$

avremo dunque

$$I_2^{(0)} = \overset{*}{\iint_C} dS_Q \frac{\partial}{\partial x}\overset{*}{\iint_C} M_1(P,R)\frac{\varphi_2(\theta)}{r}\,dS_R$$

$$+\int_0^{2\pi}\varphi_2(\theta)\cos\theta\,d\theta\overset{*}{\iint_C} M_1(P,Q)\,dS_Q,$$

da cui, tenendo conto della (34) e applicando la definizione d'integrale con asterisco, si trae

$$I_2^{(0)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{C-c_\varepsilon'} dS_Q\frac{\partial}{\partial x}\overset{*}{\iint_C} M_1(P,R)\frac{\varphi_2(\theta)}{r}\,dS_R,$$

avendo indicato con c_ε' un cerchietto di centro P e raggio ε.

Applichiamo ora nuovamente il lemma di Gauss: con notazioni perfettamente analoghe a quelle più sopra usate avremo

$$I_2^{(0)} = -\int_\Gamma \cos(x,n_Q)\,ds_Q\overset{*}{\iint_C} M_1(P,R)\frac{\varphi_2(\theta)}{r}\,dS_R$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon'}\cos(x,n_Q)\,ds_Q\overset{*}{\iint_C} M_1(P,R)\frac{\varphi_2(\theta)}{r}\,dS_R.$$

Finalmente osserviamo che — potendo sempre invertirsi l'ordine di una integrazione ordinaria e di una con asterisco — gli integrali costi-

tuenti i primi termini dei secondi membri della (35) e dell'ultima formula trovata sono uguali, di guisa che, sottraendo membro a membro queste due uguaglianze, si avrà

$$(37)\quad I_2^{(0)} - I_1^{(0)} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon'} \cos(x, n_Q)\, ds_Q \iint_C^{*} M_1(P,R)\frac{\varphi_2(\theta)}{r}\, dS_R .$$

§ 3.

Formula d'inversione dell'ordine di due successive integrazioni doppie «con asterisco». (Continuazione e fine.)

Nel § precedente abbiamo indicate con (r, θ) le coordinate polari di R rispetto a Q e con (ϱ, ω) quelle rispetto a P. Se ora indichiamo inoltre con ψ l'anomalia di Q rispetto a P (il raggio vettore è ε perchè Q si muove sulla circonferenza γ_ε' di centro P e raggio ε) la formula (37) assumerà la forma

$$I_2^{(0)} - I_1^{(0)} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \iint_C^{*} \frac{f_1(\omega+\pi)}{\varrho}\,\frac{\varphi_2(\theta)}{r}\, d\varrho\, d\omega .$$

Per calcolare quest'integrale triplo conviene tener distinto il contributo portato dalla porzione di C interna a γ_ε' $(\varrho < \varepsilon)$ da quello portato dalla parte esterna $(\varepsilon < \varrho < a)$; conviene cioè porre

$$(38)\quad \begin{cases} \mathfrak{R}' = \varepsilon \lim\limits_{\eta\to 0} \int\limits_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\, d\omega \int\limits_\eta^{\varepsilon} \dfrac{d\varrho}{\varrho} \int\limits_0^{2\pi} \varphi_2(\theta)\,\dfrac{\cos\psi}{r}\, d\psi \\ \mathfrak{R}'' = \varepsilon \int\limits_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\, d\omega \int\limits_\varepsilon^{a} \dfrac{d\varrho}{\varrho} \int\limits_0^{2\pi} \varphi_2(\theta)\,\dfrac{\cos\psi}{r}\, d\psi \end{cases}$$

di guisa che sarà poi

$$(39)\quad I_2^{(0)} - I_1^{(0)} = -\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathfrak{R}' + \mathfrak{R}'').$$

Ciò posto osserviamo che fra le 5 variabili ϱ, θ, r, ω e ψ intervengono le due relazioni

$$(40)\quad \begin{cases} \varepsilon\cos\psi = \varrho\cos\omega - r\cos\theta \\ \varepsilon\sin\psi = \varrho\sin\omega - r\sin\theta \end{cases}$$

dalle quali, quadrando e sommando, si ha anzitutto

$$\varepsilon^2 = \varrho^2 - 2\varrho r\cos(\theta-\omega) + r^2,$$

e, risolvendo rispetto ad r,

$$(41)\quad r = \varrho\cos(\theta-\omega) \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \varrho^2\sin^2(\theta-\omega)}.$$

In secondo luogo osserviamo che la forma stessa delle (38) suggerisce — sia nel caso di $\Re'$ sia in quello di $\Re''$ — di compiere la prima delle tre integrazioni successive sostituendo alla variabile ψ la variabile θ. La relazione fra $d\psi$ e $d\theta$ all'uopo occorrente, potrà ottenersi differenziando totalmente le (40) nell'ipotesi che, oltre ad ε, anche ϱ ed ω restino costanti. Precisamente con l'operazione indicata si hanno le due uguaglianze

$$\begin{cases} -\varepsilon \sin\psi\, d\psi = \quad r \sin\theta\, d\theta - \cos\theta\, dr \\ \varepsilon \cos\psi\, d\psi = -r\cos\theta\, d\theta - \sin\theta\, dr, \end{cases}$$

delle quali, moltiplicando la prima per $\sin\theta$ e la seconda per $-\cos\theta$ e sommando, si trae

$$-(\varepsilon \sin\psi \sin\theta + \varepsilon\cos\psi\cos\theta)\, d\psi = r\, d\theta$$

ovvero, sostituendo ad $\varepsilon\cos\psi$ ed $\varepsilon\sin\psi$ i loro valori tratti dalle (40),

$$[r - \varrho\cos(\theta-\omega)]\, d\psi = r\, d\theta;$$

ovvero ancora, tenendo conto della (41),

$$d\psi = \frac{r\, d\theta}{\pm\sqrt{\varepsilon^2 - \varrho^2 \sin^2(\theta-\omega)}}. \tag{42}$$

Per compiere il cambiamento di variabile — che, come si sarà già osservato, non differisce sostanzialmente dalla trasformazione di Landen per gli integrali ellittici — non resta ulteriormente da osservare che, nel caso dell'integrale $\Re'$, allorchè Q percorre l'intera circonferenza γ_ε', θ varia fra 0 e 2π. Invece nel caso dell'integrale $\Re''$, detti γ_1, e γ_2 i due archi della circonferanza in parola determinati dai due punti di contatto T_1 e T_2 delle tangenti menate da R, supposto che γ_1 sia il più lontano da R di questi due, e detto α l'angolo $PT_1R = PT_2R$ (il cui seno è evidentemente ε/ϱ); θ varia fra $\omega-\alpha$ ed $\omega+\alpha$ allorchè Q percorre l'arco γ_1 [sul quale dovrà scegliersi il segno $+$ davanti al radicale che figura nella (42)] e fra $\omega+\alpha$ ed $\omega-\alpha$ allorchè Q percorre l'arco γ_2 [sul quale dovrà scegliersi il segno $-$ davanti al radicale].

Le considerazioni ora svolte conducono senz'altro alle seguenti formule:

$$\Re' = \lim_{\eta\to 0} \int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\, d\omega \int_\eta^\varepsilon \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta)\, \frac{\varrho\cos\omega - r\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon^2 - \varrho^2\sin^2(\theta-\omega)}}\, d\theta$$

$$= \lim_{\eta\to 0} \int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\, d\omega \int_\eta^\varepsilon d\varrho \int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta)\, \frac{\cos\omega - \cos(\theta-\omega)\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon^2 - \varrho^2\sin^2(\theta-\omega)}}\, d\theta$$

$$+ \lim_{\eta\to 0} \int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\, d\omega \int_\eta^\varepsilon \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta)\cos\theta\, d\theta,$$

$$\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\,d\omega \int_\varepsilon^a \frac{d\varrho}{\varrho} \int_{\varphi-\alpha}^{\varphi+\alpha} \varphi_2(\theta)\, \frac{\varrho\cos\omega - \cos\theta\,[\varrho\cos(\theta-\omega) + \sqrt{\varepsilon^2-\varrho^2\sin^2(\theta-\omega)}]}{\sqrt{\varepsilon^2-\varrho^2\sin^2(\theta-\omega)}}\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\,d\omega \int_\varepsilon^a \frac{d\varrho}{\varrho} \int_{\varphi+\alpha}^{\varphi-\alpha} \varphi_2(\theta)\, \frac{\varrho\cos\omega - \cos\theta\,[\varrho\cos(\theta-\omega) - \sqrt{\varepsilon^2-\varrho^2\sin^2(\theta-\omega)}]}{-\sqrt{\varepsilon^2-\varrho^2\sin^2(\theta-\omega)}}\,d\theta$$

$$2\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\,d\omega \int_\varepsilon^a d\varrho \int_{\varphi-\alpha}^{\varphi+\alpha} \varphi_2(\theta)\, \frac{\cos\omega - \cos(\theta-\varphi)\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon^2-\varrho^2\sin^2(\theta-\omega)}}\,d\theta.$$

Ciò posto si osservi che, in virtù della solita condizione (7) del § 1, si ha

$$\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\,d\omega \int_\eta^\varepsilon \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$= \log\frac{\varepsilon}{\eta} \int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta)\cos\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\,d\omega = 0,$$

di guisa che il secondo termine dell'espressione di $\mathfrak{R}'$ è nullo; pertanto eseguendo la trasformazione $\varrho = \varepsilon t$ e tenendo conto inoltre che è

$$\cos\omega - \cos(\theta-\omega)\cos\theta = \sin\theta\sin(\theta-\omega),$$

la prima delle precedenti formule potrà scriversi

$$\mathfrak{R}' = \lim_{\eta\to 0} \int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\,d\omega \int_{\eta/\varepsilon}^1 dt \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_2(\theta)\sin\theta\sin(\theta-\omega)}{\sqrt{1-t^2\sin^2(\theta-\omega)}}\,d\theta$$

ovvero, eseguendo il passaggio al limite,

$$(43) \qquad \mathfrak{R}' = \int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\,d\omega \int_0^1 dt \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_2(\theta)\sin\theta\sin(\theta-\omega)}{\sqrt{1-t^2\sin^2(\theta-\omega)}}\,d\theta.$$

Similmente, la formula che dà $\mathfrak{R}''$ potrà scriversi

$$\mathfrak{R}'' = 2\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\,d\omega \int_1^{a/\varepsilon} dt \int_{\varphi-\alpha}^{\varphi+\alpha} \frac{\varphi_2(\theta)\sin\theta\sin(\theta-\omega)}{\sqrt{1-t^2\sin^2(\theta-\omega)}}\,d\theta, \qquad \left(\sin\alpha = \frac{1}{t}\right)$$

ovvero, tenendo conto che a è un numero in nostro arbitrio e che quindi possiamo anche farlo tendere all'infinito,

$$(44) \quad \mathfrak{R}'' = 2\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\,d\omega \int_1^{\infty} dt \int_{\varphi-\alpha}^{\varphi+\alpha} \frac{\varphi_2(\theta)\sin\theta\sin(\theta-\omega)}{\sqrt{1-t^2\sin^2(\theta-\omega)}}\,d\theta, \quad \left(\sin\alpha = \frac{1}{t}\right).$$

Notiamo che le formule (43) e (44) presentano il vantaggio di non contenere più ε, perciò facendo uso di questi valori di $\mathfrak{R}'$ ed $\mathfrak{R}''$, invece della (39), si avrà semplicemente

$$I_2^{(0)} - I_1^{(0)} = -(\mathfrak{R}' + \mathfrak{R}'').$$

Per semplificare le formule trovate, cominciamo con l'osservare che, avendosi ovviamente

$$\int_0^1 \frac{\sin(\theta-\omega)\,dt}{\sqrt{1-t^2\sin^2(\theta-\omega)}} = [\operatorname{arc\,sin} t \sin(\theta-\omega)]_0^1$$

$$= \begin{cases} \theta-\omega, & \left(\omega - \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \omega + \frac{\pi}{2}\right) \\ \pi - (\theta-\omega), & \left(\omega + \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \omega + \frac{3\pi}{2}\right), \end{cases}$$

potremo porre

$$\mathfrak{R}' = \int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\left\{ \int_{\omega-\pi/2}^{\omega+\pi/2} (\theta-\omega)\,\varphi_2(\theta)\sin\theta\,d\theta \right.$$

$$\left. + \int_{\omega+\pi/2}^{\omega+3\pi/2} (\pi-\theta+\omega)\,\varphi_2(\theta)\sin\theta\,d\theta \right\} d\omega,$$

da cui, ricordando che

$$\frac{d}{d\theta}[\varphi_2(\theta)\sin\theta] = f_2(\theta),$$

con due integrazioni per parti, a riduzioni effettuate, si deduce

$$\mathfrak{R}' = -\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\,d\omega \int_{\omega-\pi/2}^{\omega+\pi/2} - \int_{\omega+\pi/2}^{\omega+3\pi/2} f_2(\theta)\,d\theta. \tag{45}$$

Nel calcolo di $\mathfrak{R}''$ bisogna badare alla circostanza che i limiti dell'integrazione rispetto a θ dipendono da t pel tramite di α. Avuto riguardo a ciò, invertendo l'ordine delle due integrazioni rispetto a θ e a t, si ha

$$\mathfrak{R}'' = 2\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\,d\omega \int_{\omega-\pi/2}^{\omega+\pi/2} \varphi_2(\theta)\sin\theta\,d\theta \int_1^{\frac{1}{\sin|\theta-\omega|}} \frac{\sin(\theta-\omega)\,dt}{\sqrt{1-t^2\sin^2(\theta-\omega)}};$$

pertanto, essendo

$$\int_1^{\frac{1}{\sin|\theta-\omega|}} \frac{\sin(\theta-\omega)\,dt}{\sqrt{1-t^2\sin^2(\theta-\omega)}} = \begin{cases} -(\theta-\omega)+\frac{\pi}{2}, & (\theta-\omega>0) \\ -(\theta-\omega)-\frac{\pi}{2}, & (\theta-\omega<0), \end{cases}$$

avremo

$$\Re'' = -2\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\,d\omega \int_{\omega-\pi/2}^{\omega+\pi/2} (\theta-\omega)\,\varphi_2(\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$-\pi\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\,d\omega \int_{\omega-\pi/2}^{\omega} - \int_{\omega}^{\omega+\pi/2} \varphi_2(\theta)\sin\theta\,d\theta,$$

da cui, tenendo conto della relazione fra φ_2 ed f_2 e trasformando il primo termine mediante un' integrazione per parti, si trae

$$\Re'' = -2\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\Big\{\pi f_2(\omega) - \int_{\omega-\pi/2}^{\omega+\pi/2} f_2(\theta)\,d\theta\Big\}\,d\omega. \tag{46}$$

Finalmente sommiamo la (45) con la (46), avremo così

$$I_2^{(0)} - I_1^{(0)} = \int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\Big\{2\pi f_2(\omega) - \int_{\omega-\pi/2}^{\omega+3\pi/2} f_2(\theta)\,d\theta\Big\}\,d\omega;$$

ma l' integrale di $f_2(\theta)$ esteso da $\omega - \frac{\pi}{2}$ ad $\omega + \frac{3\pi}{2}$, e cioè ad un intero giro è nullo in virtù della (7) del § 1, dunque resta semplicemente

$$I_2^{(0)} - I_1^{(0)} = 2\pi\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi) f_2(\omega)\,d\omega = 2\pi\int_0^{2\pi} f_1(\omega) f_2(\omega+\pi)\,d\omega$$

e se ne conclude che la formula d' inversione dell' ordine di due successive integrazioni doppie con asterisco è la seguente:

$$\begin{aligned}\iint_{S_2}^{*} M_1(P,R)\,dS_R \iint_{S_1}^{*} M_2(R,Q)\,F(P,Q,R)\,dS_Q \\ = \iint_{S_1}^{*} dS_Q \iint_{S_2}^{*} M_1(P,R)\,M_2(R,Q)\,F(P,Q,R)\,dS_R \\ + F(P,P,P)\,2\pi\int_0^{2\pi} f_1(\theta) f_2(\theta+\pi)\,d\theta.\end{aligned} \tag{47}$$

§ 4.

Composizione dei nuclei M nel piano indefinito.

Nell' Introduzione si è accennato al fatto che il problema della risoluzione di un' equazione integrale « con asterisco », si semplifica sostanzialmente allorchè l' integrale doppio è esteso all' intero piano indefinito. La ragione di ciò è da ricercarsi nella circostanza che i nuclei M considerati nei §§ precedenti, godono di proprietà gruppali nei riguardi della *composizione* nel piano indefinito. Invero, dimostreremo nel presente § che il prodotto della composizione dei due nuclei (27) nel campo predetto:

$$T(P,Q) = \iint_{\infty}^{*} M_1(P,R)\,M_2(R,Q)\,dS_R$$

è un nuovo nucleo M, e precisamente quello che corrisponde alla seguente funzione caratteristica:

$$(48)\qquad f(\psi)=\frac{d}{d\psi}\,{}^{*}\!\int_0^{2\pi}[\bar f_1(\psi)\bar f_2(\theta)+\bar f_1(\theta)\bar f_2(\psi) - \bar f_1(\theta)\bar f_2(\theta+\pi)]\cot g(\theta-\psi)\,d\theta,$$

dove i simboli $\bar f_1$ ed $\bar f_2$ denotano due primitive qualsiasi rispettivamente delle funzioni f_1 ed f_2.

Per pervenire al risultato indicato continueremo ad avvalerci della formula (32) del § 2 che permette di rappresentare il nucleo M_2 come una derivata rispetto all'ascissa x del punto Q, e precisamente ci serviremo della (36) del citato § dalla quale, con le solite notazioni, si ha

$$T(P,Q)=\frac{\partial}{\partial x}\,{}^{*}\!\iint_\omega M_1(P,R)\frac{\varphi_2(\theta)}{r}\,dS_R+M_1(P,R)\int_0^{2\pi}\varphi_2(\theta)\cos\theta\,d\theta,$$

od anche

$$(49)\qquad T=\frac{\partial W}{\partial x}+M_1(P,Q)\int_0^{2\pi}\varphi_2(\theta)\cos\theta\,d\theta,$$

avendo posto, per abbreviare,

$$(50)\qquad W=\,{}^{*}\!\iint_\omega M_1(P,R)\frac{\varphi_2(\theta)}{r}\,dS_R.$$

Nel calcolo di W conviene assumere come variabili d'integrazione θ e ω essendo ϱ ed ω — come precedentemente — le coordinate polari di R rispetto a P. All'uopo si osservi che, detta ancora ψ l'anomalia di R rispetto a P ed R il raggio vettore (che dianzi era costantemente uguale ad ε), sussistono le formule — analoghe alle (40) —

$$\begin{cases} R\cos\psi=\varrho\cos\omega-r\cos\theta,\\ R\sin\psi=\varrho\sin\omega-r\sin\theta \end{cases}$$

dalle quali, differenziando nell'ipotesi che R, ψ ed ω restino invariati, si ha

$$\begin{cases} 0=\cos\omega\,d\varrho-\cos\theta\,dr+r\sin\theta\,d\theta,\\ 0=\sin\omega\,d\varrho-\sin\theta\,dr-r\cos\theta\,d\theta \end{cases}$$

ovvero, eliminando dr,

$$d\theta=\frac{1}{\varrho}(\sin\omega\cos\theta-\cos\omega\sin\theta)\,d\varrho=\frac{R}{\varrho\,r}\sin(\psi-\theta)\,d\varrho,$$

dal che segue

$$dS_R=\varrho\,d\varrho\,d\omega=\frac{r\varrho^2}{R\,|\sin(\psi-\theta)|}\,d\theta\,d\omega.$$

Pertanto, detto E_ε il campo corrispondente nel piano (θ, ω) all'intero piano R meno il cerchietto di centro P e raggio ε, avremo

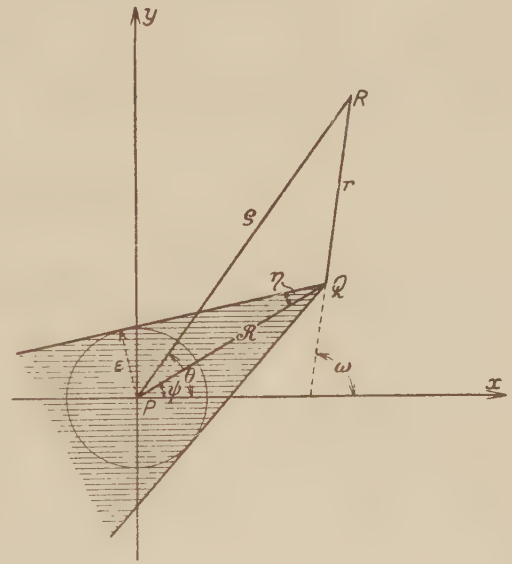
$$W = \lim_{\varepsilon=0} \iint_{E_\varepsilon} \frac{f_1(\omega+\pi)}{\varrho^2} \frac{\varphi_2(\theta)}{r} \frac{\varrho^2 r}{R\,|\sin(\psi-\theta)|}\, d\theta\, d\omega$$

cioè

$$W = \frac{1}{R} \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{E_\varepsilon} \frac{f_1(\omega+\pi)\,\varphi_2(\theta)}{|\sin(\psi-\theta)|}\, d\theta\, d\omega, \tag{51}$$

formula già interessantissima perchè lascia intravedere che W risulterà uguale al prodotto di $1/R$ per una funzione della sola ψ.

Per trasformare ulteriormente l'espressione di W evitando ogni discussione relativa al campo E_ε, possiamo considerare, accanto a W, l'integrale analogo — che diremo W^* — operante sulla medesima funzione integranda ma esteso, invece che all'intero piano R meno il cerchietto di centro P e raggio ε, all'intero piano R *meno la parte interna all'angolo formato dalle due tangenti menate da Q al cerchietto predetto* (avendo naturalmente, supposto che sia $\varepsilon < R$). Invero, detta 2η l'ampiezza dell'angolo predetto, posto cioè



$$\eta = \arcsin\frac{\varepsilon}{R}, \qquad \left(0 < \eta < \frac{\pi}{2}\right);$$

si avrà in primo luogo che

$$W^* = \frac{1}{R} \lim_{\eta\to 0} \left\{ \int_{\psi}^{\psi+\pi-\eta} d\theta \int_{\psi}^{\theta} \frac{f_1(\omega+\pi)\,\varphi_2(\theta)\,d\omega}{\sin(\theta-\psi)} + \int_{\psi+\pi+\eta}^{\psi} d\theta \int_{\theta}^{\psi} \frac{f_1(\omega+\pi)\,\varphi_2(\theta)\,d\omega}{-\sin(\theta-\psi)} \right\}$$

$$= \frac{1}{R} \int_{0}^{*2\pi} d\theta \int_{\psi}^{\theta} \frac{f_1(\omega+\pi)\,\varphi_2(\theta)\,d\omega}{\sin(\theta-\psi)},$$

e in secondo luogo, tenuto conto che l'equazione polare del contorno

dell' angolo 2η è

$$\varrho = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{\sin(\omega-\psi+\eta)}, & (\psi < \omega < \psi+\pi) \\ \dfrac{\varepsilon}{\sin(\psi-\omega+\eta)}, & (\psi+\pi < \omega < \psi+2\pi) \end{cases}$$

da cui segue

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varrho}{\varepsilon} = \frac{1}{|\sin(\omega-\psi)|},$$

in virtù della (10) del § 1, si avrà che

$$W^* = W - \int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\frac{\varphi_2(\psi+\pi)}{R}\log\frac{1}{|\sin(\omega-\psi)|}\,d\omega.$$

Se ne conclude che

$$(52)\qquad W = \frac{1}{R}\,{}^*\!\int_0^{2\pi} d\theta \int_\psi^\theta \frac{f_1(\omega+\pi)\,\varphi_2(\theta)\,d\omega}{\sin(\theta-\psi)} - \frac{\varphi_2(\psi+\pi)}{R}\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\log|\sin(\omega-\psi)|\,d\omega.$$

Semplificheremo la formula ottenuta osservando che, se con $\bar f_1(\theta)$ denotiamo una qualsiasi primitiva della funzione $f_1(\theta)$, avremo evidentemente

$$\int_\psi^\theta \frac{f_1(\omega+\pi)\,\varphi_2(\theta)}{\sin(\theta-\psi)}\,d\omega = \frac{\varphi_2(\theta)}{\sin(\theta-\psi)}\,[\bar f_1(\theta+\pi) - \bar f_1(\psi+\pi)];$$

inoltre — tenuto conto che, in virtù della condizione

$$\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,d\theta = 0,$$

la funzione $\bar f_1(\theta)$ risulta anch' essa periodica col periodo 2π — con un' integrazione per parti avremo che

$${}^*\!\int_0^{2\pi} f_1(\omega+\pi)\log|\sin(\omega-\psi)|\,d\omega = -\,{}^*\!\int_0^{2\pi} \bar f_1(\omega+\pi)\operatorname{cotg}(\omega-\psi)\,d\omega;$$

dunque la (52) potrà scriversi

$$W = \frac{1}{R}\,{}^*\!\int_0^{2\pi}\Big\{\frac{\varphi_2(\theta)}{\sin(\theta-\psi)}\,[\bar f_1(\theta+\pi) - \bar f_1(\theta+\pi)] + \varphi_2(\psi+\pi)\,\bar f_1(\theta+\pi)\operatorname{cotg}(\theta-\psi)\Big\}\,d\theta.$$

Deriviamo ora rispetto ad x tenendo presente che

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \cos\psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\sin\psi}{R},$$

avremo così

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{R^2}\frac{d}{d\psi}\left[\sin\psi \overset{*}{\int_0^{2\pi}} \left\{\frac{\varphi_2(\theta)}{\sin(\theta-\psi)}\left[\bar{f}_1(\theta+\pi) - \bar{f}_1(\psi+\pi)\right]\right.\right.$$
$$\left.\left. + \varphi_2(\psi+\pi)\,\bar{f}_1(\theta+\pi)\cot g(\theta-\psi)\right\} d\theta\right],$$

ma d'altra parte si ha

$$M_1(P,Q)\int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta)\cos\theta\, d\theta = \frac{f_1(\psi+\pi)}{R^2}\int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta)\cos\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{R^2}\frac{d}{d\psi}\left[\bar{f}_1(\psi+\pi)\int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta)\cos\theta\, d\theta\right],$$

quindi, sostituendo nella (49), avremo infine

$$T = \frac{1}{R^2}\frac{d}{d\psi}\left[\bar{f}_1(\psi+\pi)\int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta)\cos\theta\, d\theta - \sin\psi \overset{*}{\int_0^{2\pi}} \left\{\frac{\varphi_2(\theta)}{\sin(\theta-\psi)} \times\right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left[\bar{f}_1(\theta+\pi) - \bar{f}_1(\psi+\pi)\right] + \varphi_2(\psi+\pi)\,\bar{f}_1(\theta+\pi)\cot g(\theta-\psi)\right\} d\theta\right]$$

ovvero, cambiando ψ in $\psi'+\pi$ (e θ in $\theta'+\pi$) onde ottenere che ψ' rappresenti l'anomalia della retta QP:

$$(53) \qquad T = \frac{1}{R^2}\frac{d}{d\psi'}\overset{*}{\int_0^{2\pi}}\left[\sin\psi'\left\{\frac{\varphi_2(\theta'+\pi)}{\sin(\theta'-\psi')}\left[\bar{f}_1(\theta') - \bar{f}_1(\psi')\right]\right.\right.$$
$$\left.\left. + \varphi_2(\psi')\,\bar{f}_1(\theta')\cot g(\theta'-\psi')\right\} - \bar{f}_1(\psi')\,\varphi_2(\theta'+\pi)\cos\theta'\right] d\theta'.$$

La formula ottenuta dimostra che l'integrale T, cioè il prodotto della composizione dei due nuclei M_1 e M_2 nel piano indefinito, è anch'esso un nucleo M, e precisamente quello che ha come funzione caratteristica la derivata dell'integrale che figura nella (53).

Non resta ora che da trasformare opportunamente l'espressione di detta funzione caratteristica. A tal fine conviene anzitutto osservare che, posto

$$(54) \qquad \int_0^{\theta} f_2(\theta)\, d\theta = \bar{f}_2(\theta),$$

dalla (33) del § 2 si trae

$$\varphi_2(\theta)\sin\theta = \bar{f}_2(\theta);$$

pertanto — detta f la funzione caratteristica del nucleo T — dalla (53) potremo ricavare che

$$f(\psi) = \frac{d}{d\psi} \int_0^{*2\pi} \left\{ \frac{\sin\psi}{-\sin\theta} \frac{\bar{f}_2(\theta+\pi)}{\sin(\theta-\psi)} [\bar{f}_1(\theta) - \bar{f}_1(\psi)] + \bar{f}_2(\psi)\bar{f}_1(\theta)\operatorname{cotg}(\theta-\psi) \right.$$
$$\left. + \bar{f}_1(\psi)\bar{f}_2(\theta+\pi)\operatorname{cotg}\theta \right\} d\theta.$$

Ciò posto osserviamo ulteriormente che regge l'identità

$$-\frac{\sin\psi}{\sin\theta\sin(\theta-\psi)} = \operatorname{cotg}\theta - \operatorname{cotg}(\theta-\psi),$$

di guisa che la precedente formula può anche scriversi sotto la forma

$$f(\psi) = \frac{d}{d\psi} \int_0^{*2\pi} \{\operatorname{cotg}\theta\, \bar{f}_2(\theta+\pi)\bar{f}_1(\theta)$$
$$+ \operatorname{cotg}(\theta-\psi)[\bar{f}_1(\psi)\bar{f}_2(\theta+\pi) - \bar{f}_1(\theta)\bar{f}_2(\theta+\pi) + \bar{f}_1(\theta)\bar{f}_2(\psi)]\}\, d\theta,$$

ma si ha evidentemente

$$\frac{d}{d\psi} \int_0^{*2\pi} \operatorname{cotg}\theta\, \bar{f}_2(\theta+\pi)\bar{f}_1(\theta)\, d\theta = 0,$$

$$\int_0^{*2\pi} \operatorname{cotg}(\theta-\psi)\bar{f}_1(\psi)\bar{f}_2(\theta+\pi)\, d\theta = \int_0^{*2\pi} \operatorname{cotg}(\theta-\psi)\bar{f}_1(\psi)\bar{f}_2(\theta)\, d\theta,$$

quindi avremo in definitiva

$$f(\psi) = \frac{d}{d\psi} \int_0^{*2\pi} [\bar{f}_1(\psi)\bar{f}_2(\theta) + \bar{f}_1(\theta)\bar{f}_2(\psi) - \bar{f}_1(\theta)\bar{f}_2(\theta+\pi)] \operatorname{cotg}(\theta-\psi)\, d\theta,$$

conformemente a quanto si era annunciato. L'unica differenza è che, mentre noi avevamo detto che la funzione $\bar{f}_2$ era una primitiva *qualsiasi* di f_2, ora parrebbe che si trattasse invece di una primitiva ben determinata e cioè precisamente quella data dalla (54). È però facile persuadersi che il 2° membro della espressione di $f(\psi)$ resta invariato allorchè si aggiunge alla funzione $\bar{f}_2$ (com'anche alla $\bar{f}_1$) un termine costante qualsiasi; quindi la limitazione suaccennata può essere benissimo eliminata.

Osserviamo finalmente che da quanto è stato più sopra stabilito si deduce in particolare che, nel caso in cui il campo d'integrazione sia il piano indefinito, l'integrale denotato con $I_2^{(0)}$ nei §§ precedenti è sempre nullo.

Si osservi pure che il prodotto della composizione di due nuclei M è indipendente dall'ordine in cui questi sono considerati.

§ 5.

Risoluzione delle equazioni integrali « con asterisco » nel caso del piano indefinito.

Vogliamo ora occuparci — utilizzando i risultati conseguiti nel § precedente — della risoluzione dell'equazione (25) del § 2 nel caso del piano indefinito, cioè dell'equazione

$$\Phi(P) - \lambda \overset{*}{\iint_{\infty}} M(P,Q)\,\Phi(Q)\,dS_Q = F(P), \quad M(P,Q) = \frac{f[\text{ang}(x,QP)]}{\overline{PQ}^2} \tag{55}$$

A tale scopo indichiamo con $N(P,Q)$ un altro di questi nuclei M:

$$N(P,Q) = \frac{\varphi[\text{ang}(x,QP)]}{\overline{PQ}^2}$$

e, lasciando pel momento imprecisata la funzione φ, *componiamo* l'equazione (55) con N, nel piano indefinito; avremo così

$$\overset{*}{\iint_{\infty}} N(P,Q)\,\Phi(Q)\,dS_Q - \lambda \overset{*}{\iint_{\infty}} N(P,R)\,dS_R \overset{*}{\iint_{\infty}} M(R,Q)\,\Phi(Q)\,dS_Q$$
$$= \overset{*}{\iint_{\infty}} N(P,Q)\,F(Q)\,dS_Q$$

da cui, invertendo l'ordine delle due successive integrazioni doppie con asterisco con l'ausilio della (47), si trae

$$\overset{*}{\iint_{\infty}} [N(P,Q) - \lambda T(P,Q)]\,\Phi(Q)\,dS_Q - 2\lambda\pi\alpha\,\Phi(P)$$
$$= \overset{*}{\iint_{\infty}} N(P,Q)\,F(Q)\,dS_Q, \tag{56}$$

essendosi posto

$$\overset{*}{\iint_{\infty}} N(P,R)\,M(R,Q)\,dS_R = T(P,Q), \qquad \int_0^{2\pi} f(\theta+\pi)\,\varphi(\theta)\,d\theta = \alpha. \tag{57}$$

A questo punto l'analogia con la teoria delle ordinarie equazioni integrali suggerisce di cercare di determinare il nucleo N — e per esso la funzione φ — in modo tale che si abbia

$$N(P,Q) + M(P,Q) = \lambda T(P,Q), \tag{58}$$

chè, se questa relazione è verificata, dalla (55) e dalla (56) potrà dedursi che

$$\frac{1}{\lambda}[F(P) - \Phi(P)] - 2\lambda\pi\alpha\,\Phi(P) = \overset{*}{\iint_{\infty}} N(P,Q)\,F(Q)\,dS_Q$$

equazione da cui, purchè la quantità

$$\mu = 1 + 2\lambda^2\pi\alpha \tag{59}$$

non sia nulla, si trae senz' altro

$$(60) \qquad \Phi(P) = \frac{1}{1+2\lambda^2\pi\alpha}\left[F(P) - \lambda \overset{*}{\iint_{\omega}} N(P,Q)\,F(Q)\,dS_Q\right].$$

Come si vede, il nocciolo della questione sta nel soddisfare l'equazione (58) che — facendo uso delle solite notazioni e della formula di composizione (48) — potremo scrivere

$$\frac{\varphi(\psi')}{R^2} + \frac{f(\psi')}{R^2}$$

$$= \frac{\lambda}{R^2}\frac{d}{d\psi'}\overset{*}{\int_0^{2\pi}} [\bar{\varphi}(\psi')\bar{f}(\theta) + \bar{\varphi}(\theta)\bar{f}(\psi') - \bar{\varphi}(\theta)\bar{f}(\theta+\pi)]\operatorname{cotg}(\theta-\psi')\,d\theta$$

$$(\psi' = \psi + \pi),$$

ovvero, moltiplicando per R^2 e sopprimendo l'apice di ψ',

$$\varphi(\psi) + f(\psi) = \lambda\frac{d}{d\psi}\overset{*}{\int_0^{2\pi}} [\bar{\varphi}(\psi)\bar{f}(\theta) + \bar{\varphi}(\theta)\bar{f}(\psi) - \bar{\varphi}(\theta)\bar{f}(\theta+\pi)]\operatorname{cotg}(\theta-\psi)\,d\theta,$$

da cui, integrando e denotando con C una costante arbitraria, si trae

$$\bar{\varphi}(\psi) + \bar{f}(\psi) = \lambda\overset{*}{\int_0^{2\pi}} [\bar{\varphi}(\psi)\bar{f}(\theta) + \bar{\varphi}(\theta)\bar{f}(\psi) - \bar{\varphi}(\theta)\bar{f}(\theta+\pi)]\operatorname{cotg}(\theta-\psi)\,d\theta + C.$$

L' equazione ottenuta, che può meglio scriversi sotto la forma

$$(61) \qquad \left[1 - \lambda\overset{*}{\int_0^{2\pi}} \bar{f}(\theta)\operatorname{cotg}(\theta-\psi)\,d\theta\right]\bar{\varphi}(\psi)$$

$$- \lambda\overset{*}{\int_0^{2\pi}} [\bar{f}(\psi) - \bar{f}(\theta+\pi)]\operatorname{cotg}(\theta-\psi)\,\bar{\varphi}(\theta)\,d\theta = C - f(\psi),$$

è un' equazione con integrale *semplice* con asterisco alla cui risoluzione è ricondotta quella della proposta. Essa è analoga ma sostanzialmente distinta dall' equazione

$$a(x)\,u(x) - \lambda\overset{*}{\int_{-1}^{1}} \frac{u(y)}{y-x}\,dy = f(x)$$

così magistralmente studiata dal Carleman nella Nota ricordata in principio, perchè — mentre il nucleo

$$\frac{1}{y-x}$$

diviene infinito soltanto per $x = y$ — invece il nucleo

$$[\bar{f}(\psi) - \bar{f}(\theta+\pi)]\operatorname{cotg}(\theta-\psi),$$

anche supponendo la funzione $\bar{f}$ lipschitziana, oltre che per $\psi = \theta$, diviene infinito di prim' ordine anche nei due punti

$$(\psi = 0, \quad \theta = 2\pi) \quad \text{e} \quad (\psi = 2\pi, \quad \theta = 0).$$

In altre parole il nucleo della (61) ha le stesse singolarità della funzione

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\theta - \psi),$$

e quindi la risoluzione dell' equazione in parola — da immaginarsi anzitutto divisa pel coefficiente di $\varphi(\psi)$ nel termine esterno — può farsi dipendere da quella dell' equazione canonica

$$(62) \qquad \varphi(x) - \lambda g(x) \overset{*}{\int_0^{2\pi}} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x-y)\varphi(y)\,dy = h(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi),$$

dove $g(x)$ ed $h(x)$ sono due funzioni assegnate (periodiche col periodo 2π), λ una costante numerica e $\varphi(x)$ la funzione incognita. È quasi superfluo avvertire che, in generale, questa λ e questa φ non avranno niente a che vedere con le quantità denotate con le medesime lettere in quanto precede.

L' equazione (62) può agevolmente ricondursi ad un' ordinaria equazione di Fredholm di seconda specie *componendola* col suo stesso nucleo. Invero, con l' operazione indicata (che equivale a sostituire, nell' integrale, a φ la sua espressione tratta dall' equazione stessa) si ha

$$\varphi(x) - \lambda g(x) \overset{*}{\int_0^{2\pi}} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x-y)h(y)\,dy$$

$$- \lambda^2 g(x) \overset{*}{\int_0^{2\pi}} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x-z)g(z)\,dz \overset{*}{\int_0^{2\pi}} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(z-y)\varphi(y)\,dy = h(x)$$

da cui, invertendo l' ordine delle due integrazioni semplici con asterisco mediante la (26) e ponendo

$$(63) \qquad \overset{*}{\int_0^{2\pi}} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x-z) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(z-y)\, g(z)\,dz = G(x,y),$$

si trae

$$(64) \qquad [1 + 4\lambda^2\pi^2 g^2(x)]\varphi(x) - \lambda^2 g(x) \int_0^{2\pi} G(x,y)\varphi(y)\,dy$$

$$= h(x) + \lambda g(x) \overset{*}{\int_0^{2\pi}} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x-y)h(y)\,dy,$$

ch' è un' ordinaria equazione di Fredholm di 2ª specie, perchè la funzione

$$1 + 4\lambda^2\pi^2 g^2(x)$$

non è mai nulla e la funzione G — supposto che $g(x)$ abbia derivate prima e seconda circolarmente continue[11]) — è sempre finita, come ora dimostreremo.

Infatti, supposto che lo sviluppo di $g(x)$ in serie di Fourier sia il seguente

$$g(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n x + \beta_n \sin n x),$$

dalle note formule

$$(65)\qquad \begin{cases} \overset{*}{\int_0^{2\pi}} \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(x-y)\cos n y\, dy = 2\pi \sin n x, \\ \overset{*}{\int_0^{2\pi}} \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(x-y)\sin n y\, dy = -2\pi\cos n x, \end{cases}$$

si ha successivamente (supponendo m ed n non nulli):

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} G(x,y)\cos m x\cos n y\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\cos m x\left\{\overset{*}{\int_0^{2\pi}} g(z)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(x-z)\,dz \overset{*}{\int_0^{2\pi}}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(z-y)\cos n y\, dy + 4\pi^2 g(x)\cos n x\right\}$$

$$= 4\int_0^{2\pi} g(x)\cos m x\cos n x\, dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos m x\, dx \overset{*}{\int_0^{2\pi}}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(x-z)\sin n z\cdot g(z)\, dz$$

$$= 4\int_0^{2\pi} g(x)\cos m x\cos n x\, dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} g(z)\sin n z\, dz \overset{*}{\int_0^{2\pi}}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(x-z)\cos m x\, dx$$

$$= 4\int_0^{2\pi} g(x)\cos m x\cos n x\, dx - 4\int_0^{2\pi} g(z)\sin n z\sin m z\, dz$$

$$= 4\int_0^{2\pi} g(x)\cos(m+n)x\, dx = 4\pi\alpha_{m+n}.$$

Similmente si calcolano gli altri coefficienti dello sviluppo di $G(x,y)$ in serie doppia di Fourier, trovando i risultati seguenti

---

[11]) Imponiamo queste condizioni, che s' intuiscono esuberanti, per rendere la dimostrazione la più semplice possibile.

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} G(x,y)\cos mx \sin ny\, dx\, dy = 4\pi\beta_{m+n},$$

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} G(x,y)\sin mx \cos ny\, dx\, dy = 4\pi\beta_{m+n},$$

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} G(x,y)\sin mx \sin ny\, dx\, dy = -4\pi\alpha_{m+n};$$

dunque la funzione G può rappresentarsi mediante la serie

$$4\pi\sum_{m,n}(\alpha_{m+n}\cos mx\cos ny + \beta_{m+n}\cos mx\sin ny + \beta_{m+n}\sin mx\cos ny - \alpha_{m+n}\sin mx\sin ny)$$

cioè

$$4\pi\sum_{m,n}[\alpha_{m+n}\cos(mx+ny) + \beta_{m+n}\sin(mx+ny)]$$

che, tenendo conto della forma speciale dei coefficienti corrispondenti ad $m=0$ ed $n=0$, scriveremo meglio sotto la forma

$$G(x,y) = 2\pi[g(x)+g(y)-\alpha_0] + 4\pi\sum_{m,n=1}^{\infty}[\alpha_{m+n}\cos(mx+ny)+\beta_{m+n}\sin(mx+ny)]. \tag{66}$$

La formula trovata mostra senz'altro che la funzione G è limitata. Infatti, stante le ipotesi fatte sulla funzione $g(x)$ esisterà certamente un numero positivo Ω tale da aversi, qualunque sia n,

$$|\alpha_n| < \frac{\Omega}{n^3}, \quad |\beta_n| < \frac{\Omega}{n^3}$$

e conseguentemente

$$\left|\sum_{m,n=1}^{\infty}[\alpha_{m+n}\cos(mx+ny)+\beta_{m+n}\sin(mx+ny)]\right| < 2\Omega\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)^3},$$

il che dimostra l'assunto, essendo la serie doppia del secondo membro convergente.

Dalle considerazioni precedenti risulta che ogni soluzione dell'equazione canonica (62) è soluzione dell'equazione di **Fredholm** (64), ma vale anche la reciproca, cioè le soluzioni della (64) sono sempre soluzioni della (62)?

È facile persuadersi che a questo quesito non può darsi senz'altro risposta affermativa chè, fra i passaggi che dalla (62) ci hanno condotti alla (64), ve n'è uno: il primo che non è senz'altro reversibile.

In altri termini, se $\varphi_0(x)$ è una determinata soluzione dell'equazione di **Fredholm** (64), non si può asserire ch'essa soddisfa certamente all'equazione (62) ma soltanto all'altra

$$\int_0^{*2\pi} \left[\varphi(z) - \lambda g(z) \int_0^{*2\pi} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(z-y)\,\varphi(y)\,dy - f(z)\right] \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(z-x)\,dz = 0$$

da cui notoriamente si trae che la funzione entro [ ] deve ridursi a una costante. Dunque, sostituendo $\varphi_0(x)$ nel primo membro dell'equazione proposta (62), o si troverà per risultato $f(x)$ o $f(x)+C$ dove C è una costante. In questo secondo caso basterà considerare in luogo di $\varphi_0(x)$ la funzione

$$\varphi_0(x) - C$$

per avere una soluzione della (62).

Un'obbiezione analoga — e che si elimina analogamente — può anche sollevarsi a proposito del metodo da noi seguito per risolvere l'equazione con integrale doppio (55). Infatti, fra i passaggi coi quali siamo pervenuti alla formula di risoluzione (60) ve n'è uno: la composizione con N, che non è reversibile. Perciò, se indichiamo (a scanso di equivoci) con $\Phi_0(P)$ una soluzione tratta dalla (60), non si può asserire che sostituendola nel primo membro dalla (55) si ottenga per risultato proprio $F(P)$, ma soltanto

$$F(P) + \Psi_0(P),$$

dove $\Psi_0(P)$ denota una certa soluzione dell'equazione di prima specie omogenea

$$\iint_\sigma^* N(P,Q)\,\Psi(Q)\,dS_Q = 0. \tag{67}$$

È facile vedere che l'equazione (67) ammette come soluzioni tutte le *costanti*, ma non è parimenti facile indagare se esistano eventualmente anche altre soluzioni non identicamente nulle. Comunque noi possiamo evitare queste discussioni facendo vedere come, in ogni caso, la funzione

$$\Phi_1(P) = \Phi_0(P) - \frac{1}{\mu}\Psi_0(P) \tag{68}$$

sia una soluzione della (55).

Infatti si ha anzitutto

$$\Phi_1(P) - \lambda \iint_\sigma^* M(P,Q)\,\Phi_1(Q)\,dS_Q = \Phi_0(P) - \lambda \iint_\sigma^* M(P,Q)\,\Phi_0(Q)\,dS_Q$$
$$- \frac{1}{\mu}\Psi_0(P) + \frac{\lambda}{\mu} \iint_\sigma^* M(P,Q)\,\Psi_0(Q)\,dS_Q$$

cioè

$$\Phi_1(P) - \lambda \iint_\sigma^* M(P,Q)\,\Phi_1(Q)\,dS_Q = F(P) + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\Psi_0(P) \tag{69}$$
$$+ \frac{\lambda}{\mu} \iint_\sigma^* M(P,Q)\,\Psi_0(Q)\,dS_Q.$$

In secondo luogo osserviamo che, essendo $\Psi_0(P)$ una soluzione dell'equazione (67) — e quindi pure di quella che si ottiene componendo questa con M — dovrà essere

$$\overset{*}{\iint_\omega} M(P, R)\, dS_R \overset{*}{\iint_\omega} N(R, Q)\, \Psi_0(Q)\, dS_Q = 0,$$

da cui, invertendo l'ordine delle due integrazioni con asterisco, si trae

$$\overset{*}{\iint_\omega} T(P, Q)\, \Psi_0(Q)\, dS_Q + 2\pi\alpha\, \Psi_0(P) = 0;$$

moltiplichiamo ora per λ e teniamo conto della (58), avremo così

$$\overset{*}{\iint_\omega} [M(P, Q) + N(P, Q)]\, \Psi_0(Q)\, dS_Q + 2\pi\alpha\lambda\, \Psi_0(P) = 0,$$

ma è

$$\overset{*}{\iint_\omega} N(P, Q)\, \Psi_0(Q)\, dS_Q = 0$$

quindi resta semplicemente

$$\overset{*}{\iint_\omega} M(P, Q)\, \Psi_0(Q)\, dS_Q = -\, 2\pi\alpha\lambda\, \Psi_0(P)$$

e sostituendo nella (69) si avrà

$$\Phi_1(P) - \lambda \overset{*}{\iint_\omega} M(P, Q)\, \Phi_1(Q)\, dS_Q = F(P) + \left(1 - \frac{1 + 2\pi\alpha\lambda^2}{\mu}\right) \Psi_0(P)$$

ovvero, ricordando la (59),

$$\Phi_1(P) - \lambda \overset{*}{\iint_\omega} M(P, Q)\, \Phi_1(Q)\, dS_Q = F(P),$$

come era da dimostrare.

Per applicare le formule ottenute ad un esempio concreto possiamo considerare il caso particolarmente interessante in cui il nucleo M è quello stesso dell'equazione del «disco», cioè il caso in cui si ha

$$f(\theta) = \cos\theta.$$

In tal caso, ponendo

$$\bar{f}(\theta) = \sin\theta,$$

l'equazione (61) diviene

$$\left[1 - \lambda \overset{*}{\int_0^{2\pi}} \operatorname{cotg}(\theta - \psi) \sin\theta\, d\theta\right] \bar{\varphi}(\psi)$$

$$- \lambda \overset{*}{\int_0^{2\pi}} (\sin\psi + \sin\theta) \operatorname{cotg}(\theta - \psi)\, \bar{\varphi}(\theta)\, d\theta = C - \sin\psi;$$

ma la funzione $\sin\theta$ cambia di segno quando θ aumenta di π mentre $\operatorname{cotg}(\theta - \psi)$ resta inalterata sicchè è

$$\overset{*}{\int_0^{2\pi}} \operatorname{cotg}(\theta - \psi) \sin\theta\, d\theta = 0,$$

e d'altra parte si ha identicamente

$$(\sin\psi + \sin\theta)\operatorname{cotg}(\theta - \psi) = \sin\psi \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\theta - \psi) + \cos\theta;$$

dunque — detta C' una nuova costante arbitraria — l'equazione in $\bar\varphi(x)$ può scriversi

$$(70) \qquad \bar\varphi(\psi) + \lambda \sin\psi \,{}^{*}\!\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\psi - \theta)\,\bar\varphi(\theta)\,d\theta = C' - \sin\psi$$

cioè essa, nel caso in esame, risulta già di per sè ridotta alla forma canonica (62); precisamente — identificando la (70) con l'equazione ora ricordata — si vede che ci troviamo nel caso di

$$g(x) = -\sin x, \qquad h(x) = C' - \sin x.$$

Conseguentemente, in virtù della (66), si avrà

$$G(x, y) = -2\pi(\sin x + \sin y)$$

e quindi l'equazione di Fredholm (64) si presenterà sotto la forma

$$(1 + 4\lambda^2\pi^2 \sin^2 x)\,\bar\varphi(x) - 2\pi\lambda^2 \sin x \int_0^{2\pi} (\sin x + \sin y)\,\bar\varphi(y)\,dy$$

$$= C' - \sin x - \lambda \sin x \,{}^{*}\!\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(x - y)(C' - \sin y)\,dy$$

ovvero

$$(71) \quad \bar\varphi(x) - \frac{2\pi\lambda^2 \sin x}{1 + 4\lambda^2\pi^2 \sin^2 x} \int_0^{2\pi} (\sin x + \sin y)\,\bar\varphi(y)\,dy = \frac{C' - \sin x - \lambda\pi \sin 2x}{1 + 4\lambda^2\pi^2 \sin^2 x}.$$

L'equazione (71) è un'equazione di Fredholm di seconda specie nel così detto «*caso elementare*», cioè avente per nucleo la somma di un numero finito di prodotti di funzioni della sola x per funzioni della sola y. Ora, com'è noto, la risoluzione di un'equazione siffatta:

$$(72) \qquad \varphi(x) - \lambda' \int_a^b \sum_{r=1}^{n} \alpha_r(x)\,\beta_r(y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

dipende da quella del sistema di n equazioni lineari

$$(73) \quad \begin{cases} (1 - \lambda' a_{11})\,\xi_1 - \lambda' a_{12}\,\xi_2 - \ldots - \lambda' a_{1n}\,\xi_n = b_1, \\ -\lambda' a_{21}\,\xi_1 + (1 - \lambda' a_{22})\,\xi_2 - \ldots - \lambda' a_{2n}\,\xi_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\lambda' a_{n1}\,\xi_1 - \lambda' a_{n2}\,\xi_2 - \ldots + (1 - \lambda' a_{nn})\,\xi_n = b_n \end{cases}$$

essendosi posto

$$\xi_r = \int_a^b \beta_r(x)\varphi(x)\,dx, \qquad a_{rs} = \int_a^b \alpha_s(x)\beta_r(x)\,dx, \qquad b_r = \int_a^b \beta_r(x)f(x)\,dx,$$

$$(r, s = 1, 2, \ldots, n);$$

e precisamente — supposto che il determinante del sistema (73) non sia nullo — si ha che la (72) ammette una ed una sola soluzione data dalla formula

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda' \sum_{r=1}^{n} \xi_r \alpha_r(x).$$

Pertanto, essendo nel caso nostro:

$$n = 2, \quad \lambda' = 1, \quad \alpha_1(x) = \frac{2\pi\lambda^2 \sin^2 x}{1 + 4\lambda^2\pi^2 \sin^2 x}, \quad \alpha_2(x) = \frac{2\pi\lambda^2 \sin x}{1 + 4\lambda^2\pi^2 \sin^2 x},$$

$$\beta_1(y) = 1, \quad \beta_2(y) = \sin y, \quad a = 0, \quad b = 2\pi,$$

e avendosi conseguentemente

$$a_{11} = \int_0^{2\pi} \frac{2\pi\lambda^2 \sin^2 x}{1 + 4\lambda^2\pi^2 \sin^2 x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 - \frac{1}{1 + 4\lambda^2\pi^2 \sin^2 x}\right]dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\lambda^2\pi^2}},$$

$$a_{12} = \int_0^{2\pi} \frac{2\pi\lambda^2 \sin x}{1 + 4\lambda^2\pi^2 \sin^2 x}\,dx = 0, \qquad a_{21} = \int_0^{2\pi} \frac{2\pi\lambda^2 \sin^3 x}{1 + 4\lambda^2\pi^2 \sin^2 x}\,dx = 0,$$

$$a_{22} = \int_0^{2\pi} \frac{2\pi\lambda^2 \sin^2 x}{1 + 4\lambda^2\pi^2 \sin^2 x} = a_{11} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2\lambda^2}},$$

$$b_1 = \int_0^{2\pi} \frac{C' - \sin x - \lambda\pi \sin 2x}{1 + 4\lambda^2\pi^2 \sin^2 x}\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{C'\,dx}{1 + 4\lambda^2\pi^2 \sin^2 x} = \frac{2\pi C'}{\sqrt{1 + 4\lambda^2\pi^2}},$$

$$b_2 = \int_0^{2\pi} \frac{C' \sin x - \sin^2 x - 2\lambda\pi \sin^2 x \cos x}{1 + 4\lambda^2\pi^2 \sin^2 x}\,dx$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{1 + 4\lambda^2\pi^2 \sin^2 x} = -\frac{1}{2\pi\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\lambda^2\pi^2}}\right),$$

la risoluzione della (71) dipenderà da quella del sistema lineare con determinante non nullo:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4\lambda^2\pi^2}}\,\xi_1 = \dfrac{2\pi C'}{\sqrt{1 + 4\lambda^2\pi^2}}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4\lambda^2\pi^2}}\,\xi_2 = -\dfrac{1}{2\pi\lambda^2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4\lambda^2\pi^2}}\right), \end{cases}$$

da cui si trae

$$(74) \qquad \xi_1 = 2\pi C', \qquad \xi_2 = -\frac{\sqrt{1+4\lambda^2\pi^2}-1}{2\pi\lambda^2}.$$

Se ne conclude che la (71) ha come unica soluzione la funzione

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{C' - \sin x - \lambda\pi \sin 2x}{1+4\lambda^2\pi^2\sin^2 x} + \frac{4\pi^2\lambda^2 C' \sin^2 x}{1+4\lambda^2\pi^2\sin^2 x} - \frac{(\sqrt{1+4\lambda^2\pi^2}-1)\sin x}{1+4\lambda^2\pi^2\sin^2 x}$$

cioè

$$(75) \qquad \bar{\varphi}(x) = C' - \sin x \frac{\sqrt{1+4\lambda^2\pi^2}+2\lambda\pi\cos x}{1+4\lambda^2\pi^2\sin^2 x};$$

da questa formula — con una semplice derivazione si trae subito la funzione $\varphi(x)$, dalla cui espressione sparisce ogni traccia di costanti arbitrarie. Determinata che sia $\varphi(x)$ la (60) fornisce la richiesta funzione $\Phi(P)$, chè nel caso attuale si ha

$$\alpha = -\int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos x\, dx = -\int_0^{2\pi} \bar{\varphi}(x)\sin x\, dx = -\xi_2 = \frac{\sqrt{1+4\lambda^2\pi^2}-1}{2\pi\lambda^2}$$

e quindi risulta

$$\mu = 1 + 2\lambda^2\pi\alpha = \sqrt{1+4\lambda^2\pi^2},$$

cioè la costante μ è certamente non nulla.

§ 6.

Su di una particolare equazione con integrale doppio «con asterisco» esteso ad un campo finito.

Per dare un'idea delle questioni che possono presentarsi allorchè si ha da fare con un'equazione contenente un integrale doppio «con asterisco» *esteso ad un campo d'integrazione finito*, dedicheremo quest'ultimo paragrafo ad un rapido studio di una particolare equazione della specie in discorso, che non ci sembra priva d'interesse stante i suoi legami con la teoria del potenziale logaritmico.

Intendiamo alludere precisamente all'equazione (25) nel caso in cui la funzione caratteristica $f(\psi)$ del nucleo M sia $\cos 2\psi$, cioè all'equazione

$$(76) \quad \Phi(P) - \lambda \overset{*}{\iint_S} M(P,Q)\Phi(Q)\,dS_Q = F(P), \quad M(P,Q) = \frac{\cos 2(x, QP)}{\overline{PQ}^2}.$$

Per scorgere i legami intercedenti fra l'equazione (76) e la teoria del potenziale logaritmico, indichiamo con x e y le coordinate di P rispetto ad una qualsiasi coppia di assi cartesiani ortogonali, con r e ψ le coordinate polari di Q rispetto a P come polo e all'asse x come asse

polare e con V il potenziale logaritmico dovuto ad una distribuzione superficiale entro S con la densità Φ, cioè poniamo

$$V(P) = \iint_S^* \log \frac{1}{r} \Phi(Q)\, dS_Q ; \tag{77}$$

in virtù delle (19) del § 1 avremo allora

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \iint_S^* \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\log \dfrac{1}{r}\right) \Phi(Q)\, dS_Q - \pi \Phi(P), \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \iint_S^* \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\log \dfrac{1}{r}\right) \Phi(Q)\, dS_Q - \pi \Phi(P) \end{cases}$$

ma si ha notoriamente

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\log \frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\log \frac{1}{r}\right) = \frac{\cos 2\psi}{r^2} = M(P, Q),$$

dunque le precedenti formule possono scriversi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \iint_S^* M(P, Q)\, \Phi(Q)\, dS_Q - \pi \Phi(P),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\iint_S^* M(P, Q)\, \Phi(Q)\, dS_Q - \pi \Phi(P)$$

e conseguentemente l'equazione (76) si può mettere sotto la forma

$$(1 + \lambda\pi)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (1 - \lambda\pi)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -2\pi F(P). \tag{78}$$

Da quanto precede segue che il potenziale corrispondente ad una qualsiasi soluzione dell'equazione integrale (76) deve soddisfare all'equazione a derivate parziali (78). Viceversa, affinchè, data una soluzione V della (78), possa trarsene, per mezzo della formula

$$\Phi(P) = -\frac{1}{2\pi} \Delta_2 V, \tag{79}$$

una soluzione della (76), è manifestamente necessario e sufficiente che la funzione V sia atta a rappresentare i valori entro S di un potenziale logaritmico dovuto ad una distribuzione superficiale entro l'area medesima. Ma, dal teorema di Green, si deduce notoriamente che la condizione necessaria e sufficiente affinchè si verifichi la circostanza indicata è che, detto s il contorno di S e P e Q due suoi punti qualsiasi, si abbia (con ovvie notazioni)

$$(80) \qquad \int_s \left[V(Q) \frac{d \log \frac{1}{r}}{d n_Q} - \log \frac{1}{r} \left(\frac{dV}{dn} \right)_Q \right] ds_Q + \pi V(P) = 0;$$

dunque: *l'equazione integrale* (76) *è equivalente all'equazione a derivate parziali* (78) *unita alla condizione al contorno* (80).

Il problema di equazioni a derivate parziali che così ci si presenta non è uno di quelli classici ma si scorge facilmente la via per cui può essere affrontato in tutti e tre i casi che possono presentarsi relativamente all'equazione (78), e cioè il *caso ellittico* $\left(\lambda^2 < \frac{1}{\pi^2}\right)$, il *caso iperbolico* $\left(\lambda^2 > \frac{1}{\pi^2}\right)$ ed il *caso parabolico* $\left(\lambda^2 = \frac{1}{\pi^2}\right)$. Comunque, noi ci limiteremo qui ad occuparci del *caso parabolico* ch'è forse il più interessante per certe considerazioni fisico-matematiche. Inoltre, per metterci nelle condizioni più semplici possibili, *supporremo che il campo S sia un cerchio* (col centro nell'origine degli assi e raggio uguale ad 1) la cui circonferenza continueremo ad indicare con la lettera s.

Il caso di cui vogliamo occuparci si scinde nei due sottocasi

$$\lambda = \frac{1}{\pi} \quad \text{e} \quad \lambda = -\frac{1}{\pi}$$

nei quali l'equazione (78) diviene rispettivamente

$$(81) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\pi F(P), \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\pi F(P);$$

ma la seconda equazione non differisce dalla prima se non per un insignificante scambio fra la x e la y, dunque possiamo limitarci soltanto al primo sottocaso, cioè alla prima delle due equazioni (81), che dovremo risolvere rispettando la condizione al contorno (80).

Allo scopo indicato osserviamo che, detto V_0 un integrale particolare qualsiasi dell'equazione in parola e posto

$$V = V_0 + z$$

la funzione z soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

di cui tutte le soluzioni sono comprese nella formula

$$z = \varphi(y) + x\psi(y)$$

dove φ e ψ denotano due funzioni arbitrarie. Pertanto il problema che a noi interessa risolvere può enunciarsi così: *determinare le due funzioni* φ *e* ψ *in modo che la funzione*

$$V_0 + \varphi(y) + x\psi(y)$$

soddisfi alla condizione (80), *cioè in modo che la funzione*

$$z = \varphi(y) + x\psi(y)$$

soddisfi all' equazione

$$(82) \qquad \int_s \left[z(Q) \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn_Q} - \log \frac{1}{r} \left(\frac{dz}{dn} \right)_Q \right] ds_Q + \pi z(P) = f(P),$$

essendosi posto

$$(83) \qquad \int_s \left[V_0(Q) \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn_Q} - \log \frac{1}{r} \left(\frac{dV_0}{dn} \right)_Q \right] ds_Q + \pi V_0(P) = -f(P).$$

Indichiamo rispettivamente con α e θ le anomalie dei due punti P e Q della circonferenza s, cioè poniamo

$$x_P = \cos\alpha, \quad y_P = \sin\alpha; \quad x_Q = \cos\theta, \quad y_Q = \sin\theta;$$

avremo allora immediatamente

$$z(P) = \varphi(\sin\alpha) + \psi(\sin\alpha)\cos\alpha, \qquad z(Q) = \varphi(\sin\theta) + \psi(\sin\theta)\cos\theta,$$

$$ds_Q = d\theta,$$

$$\log \frac{1}{r} = \log \left| 2 \sin \frac{\theta - \alpha}{2} \right|, \qquad \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} = \frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{dz}{dn} \right)_Q = -\cos\theta \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_Q - \sin\theta \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_Q$$

$$= -\psi(\sin\theta)\cos\theta - [\varphi'(\sin\theta) + \psi'(\sin\theta)\cos\theta]\sin\theta,$$

di guisa che, ponendo inoltre

$$\frac{1}{2} \int_s z\, ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(\sin\theta)\, d\theta = C,$$

l'equazione (82) potrà scriversi

$$(84) \quad \pi[\varphi(\sin\alpha) + \psi(\sin\alpha)\cos\alpha] + C - \int_0^{2\pi} \log \left| 2 \sin \frac{\theta - \alpha}{2} \right| \{\varphi'(\sin\theta)\sin\theta$$

$$+ [\psi(\sin\theta) + \psi'(\sin\theta)\sin\theta]\cos\theta\}\, d\theta = f(\alpha),$$

da cui, cambiando α in $\pi - \alpha$ e nel contempo θ in $\pi - \theta$, si deduce

$$(85) \quad \pi[\varphi(\sin\alpha) - \psi(\sin\alpha)\cos\alpha] + C - \int_0^{2\pi} \log \left| 2 \sin \frac{\theta - \alpha}{2} \right| \{\varphi'(\sin\theta)\sin\theta$$

$$- [\psi(\sin\theta) + \psi'(\sin\theta)\sin\theta]\cos\theta\}\, d\theta = f(\pi - \alpha).$$

Fra le due equazioni (84) e (85) — che ovviamente sussistono simultaneamente — possiamo facilmente eliminare una volta la funzione ψ e una altra la φ sommandole e sottraendole fra loro, con che si ottengono le due equazioni integro-differenziali in φ e ψ:

$$(86)\quad \begin{cases} \pi\varphi(\sin\alpha) + C - \int_0^{2\pi} \log\left|2\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\right| \varphi'(\sin\theta)\sin\theta\, d\theta = f_1(\sin\alpha), \\ \pi\psi(\sin\alpha)\cos\alpha - \int_0^{2\pi} \log\left|2\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\right| \frac{d}{d\theta}[\psi(\sin\theta)\sin\theta]\, d\theta \\ \qquad\qquad = f_2(\sin\alpha)\cos\alpha \\ \qquad\qquad (0 \leqq \alpha \leqq 2\pi) \end{cases}$$

dove si è posto

$$(87)\quad \begin{cases} f_1(\sin\alpha) = \frac{1}{2}[f(\alpha) + f(\pi-\alpha)] \\ f_2(\sin\alpha)\cos\alpha = \frac{1}{2}[f(\alpha) - f(\pi-\alpha)], \end{cases}$$

il che è lecito perchè la prima parentesi quadra è una funzione uniforme di $\sin\alpha$ e la seconda è uguale al prodotto di una funzione siffatta per $\cos\alpha$.

Le equazioni integro-differenziali (86) possono agevolmente ricondursi ad equazioni integrali « con asterisco ». Invero, derivando la prima equazione rispetto ad α, si ottiene subito

$$(88)\quad \pi\varphi'(\sin\alpha)\cos\alpha + \frac{1}{2}\,{}^{*}\!\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\varphi'(\sin\theta)\sin\theta\, d\theta = f_1'(\sin\alpha)\cos\alpha,$$

e similmente, trasformando la seconda equazione con un' integrazione per parti, si ha

$$(89)\quad \pi\psi(\sin\alpha)\cos\alpha + \frac{1}{2}\,{}^{*}\!\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\psi(\sin\theta)\sin\theta\, d\theta = f_2(\sin\alpha)\cos\alpha$$

che — salvo il cambiamento della funzione a secondo membro — è la stessa equazione precedente. Dunque *le due funzioni incognite* φ' *e* ψ *soddisfano ad una medesima equazione con integrale semplice « con asterisco »*, della cui risoluzione dobbiamo ora occuparci.

Prendendo in considerazione p. es. l' equazione (89), cominciamo con l' osservare che può porsi

$$\int_0^{*2\pi} \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\,\psi(\sin\theta)\sin\theta\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{*\pi/2} \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\,\psi(\sin\theta)\sin\theta\,d\theta + \int_{\pi/2}^{*3\pi/2} \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\,\psi(\sin\theta)\sin\theta\,d\theta,$$

ma, eseguendo la trasformazione $\theta = \pi - \theta'$ il secondo integrale diventa

$$\int_{-\pi/2}^{*\pi/2} \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta'+\alpha)\,\psi(\sin\theta')\sin\theta'\,d\theta',$$

dunque avremo che

$$\int_0^{*2\pi} \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\,\psi(\sin\theta)\sin\theta\,d\theta = \int_{-\pi/3}^{*\pi/2} \left[\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\theta-\alpha) + \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta+\alpha)\right]\psi(\sin\theta)\sin\theta\,d\theta,$$

ossia

$$\int_0^{*2\pi} \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\,\psi(\sin\theta)\sin\theta\,d\theta = 2\cos\alpha \int_{-\pi/2}^{*\pi/2} \frac{\sin\theta}{\sin\theta-\sin\alpha}\,\psi(\sin\theta)\,d\theta.$$

Ne segue che l'equazione (89) potrà scriversi

$$\pi\psi(\sin\alpha)\cos\alpha + \cos\alpha \int_{-\pi/2}^{*\pi/2} \frac{\sin\theta}{\sin\theta-\sin\alpha}\,\psi(\sin\theta)\,d\theta = f_2(\sin\alpha)\cos\alpha$$

da cui, dividendo per $\cos\alpha$ e ponendo

$$\sin\alpha = x, \qquad \sin\theta = y \ ^{12}),$$

si trae finalmente

$$\pi\psi(x) + \int_{-1}^{*1} \frac{y}{y-x}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\psi(y)\,dy = f_2(x), \qquad (-1 \leqq x \leqq 1). \tag{90}$$

L'equazione ottenuta, cui è opportuno sostituire l'altra più generale

$$\pi\psi(x) - \lambda \int_{-1}^{*1} \frac{y}{y-x}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\psi(y)\,dy = \mathfrak{F}(x), \qquad (-1 \leqq x \leqq 1), \tag{91}$$

---

12) È quasi superfluo avvertire che questi x ed y non hanno nulla a che vedere con quelli di prima.

[la (90) corrisponde a $\lambda = -1$, $\mathfrak{F}(x) = f_2(x)$], può subito ridursi alla forma di Carleman[13]) ponendo

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\psi(x) = u(x), \qquad \pi\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = a(x), \tag{92}$$

con che la (91) diviene

$$a(x)u(x) - \lambda \overset{*1}{\int_{-1}} \frac{u(y)}{y-x}\,dy = \mathfrak{F}(x). \tag{93}$$

Non è però possibile applicare i risultati cui è pervenuto il Carleman perchè nel caso attuale la funzione $a(x)$ diviene infinita di prim' ordine nel punto $x = 0$. Bisognerà dunque cercare di risolvere e discutere direttamente l'equazione (91).

Allo scopo indicato componiamo l'equazione (91) col suo medesimo nucleo, ossia — ciò che vale lo stesso — sostituiamo alla $\psi(y)$ sotto integrale la sua espressione tratta dall'equazione medesima; avremo così

$$\pi\psi(x) - \frac{\lambda^2}{\pi}\overset{*1}{\int_{-1}} \frac{z}{z-x}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz \overset{*1}{\int_{-1}} \frac{y}{y-z}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\psi(y)\,dy$$
$$= \mathfrak{F}(x) + \frac{\lambda}{\pi}\overset{*1}{\int_{-1}} \frac{y}{y-x}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathfrak{F}(y)\,dy$$

da cui, invertendo l'ordine delle due successive integrazioni con asterisco e moltiplicando per π, si trae

$$\pi^2\left(1 + \frac{\lambda^2 x^2}{1-x^2}\right)\psi(x) - \lambda^2 \overset{*1}{\int_{-1}} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\psi(y)\,dy \overset{*1}{\int_{-1}} \frac{z}{(z-x)(y-z)}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \tag{94}$$
$$= \pi\mathfrak{F}(x) + \lambda\overset{*1}{\int_{-1}} \frac{y}{y-x}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathfrak{F}(y)\,dy.$$

Osserviamo ora anzitutto che è

$$\frac{1}{(z-x)(y-z)} = \frac{1}{y-x}\left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y}\right),$$

e secondariamente che è

$$\overset{*1}{\int_{-1}} \frac{z}{z-x}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + x\overset{*1}{\int_{-1}} \frac{1}{z-x}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi + x\overset{*1}{\int_{-1}} \frac{1}{z-x}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

[13]) V. la Nota citata nell'Introduzione.

dunque il calcolo dell' integrale rispetto a z che figura nella (94) è ridotto al calcolo dell' integrale

$$\int_{-1}^{*1} \frac{1}{z-x} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_{0}^{*1} \frac{1}{z-x} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_{0}^{*1} \frac{1}{z+x} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

che, ponendo $z = \cos\varphi$, diviene

$$\int_{0}^{*\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos\varphi - x} - \int_{0}^{*\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos\varphi + x};$$

ma allorchè è $|x| < 1$, come si verifica nel caso nostro, si ha notoriamente

$$\int_{0}^{*\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos\varphi - x} = \int_{0}^{*\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos\varphi + x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \log(1 + \sqrt{1-x^2});$$

dunque l' integrale precedente è nullo e ne segue che

$$\int_{-1}^{*1} \frac{z}{z-x} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi, \qquad \int_{-1}^{*1} \frac{z}{(z-x)(y-z)} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 0.$$

Pertanto il primo membro della (94) si riduce a contenere il solo termine in $\psi(x)$, e se ne conclude che

$$(95) \qquad \psi(x) = -\frac{1-x^2}{\pi^2[1+(\lambda^2-1)x^2]}\left[\pi\mathfrak{F}(x) + \lambda\int_{-1}^{*1} \frac{y}{y-x} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathfrak{F}(y)\,dy\right].$$

Le formula ottenuta è infirmata dalla stessa obiezione che abbiamo vista in casi analoghi nel § precedente, in quanto, fra i passaggi con cui abbiamo dedotta la (95) dalla (91), vi è il primo che non è reversibile. Può quindi asserirsi soltanto che la funzione data dalla (95) soddisfa all' equazione

$$\int_{-1}^{*1} \frac{z}{z-x} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left[\pi\psi(z) - \lambda\int_{-1}^{*1} \frac{y}{y-z} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\psi(y)\,dy - \mathfrak{F}(z)\right] dz = 0,$$

ma non alla proposta. La questione è, come sappiamo, legata alla eventuale esistenza di soluzioni non identicamente nulle dell' equazione di prima specie omogenea

$$(96) \qquad \int_{-1}^{*1} \frac{y}{y-x} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\psi(y)\,dy = 0,$$

che — avvalendoci della posizione (92) — possiamo scrivere più opportunamente sotto la forma

$$(97) \qquad \int_{-1}^{*1} \frac{u(y)}{y-x}\,dy = 0.$$

L'equazione (97) può riguardarsi come un caso particolare ($\alpha = 0$) dell'equazione omogenea di seconda specie

$$\alpha u(x) - \lambda \int_{-1}^{*1} \frac{u(y)}{y-x}\,dy = 0,$$

cui possono applicarsi con facilità le formule del Carleman deducendone ch'essa ha soltanto le soluzioni non identicamente nulle

$$u(x) = \frac{C}{1-x}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\theta},$$

dove C denota una costante arbitraria e si è posto

$$\theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{\alpha}\,\pi \qquad (0 < \theta < 1).$$

Ne segue, per $\alpha = 0$ (cui corrisponde $\theta = \frac{1}{2}$), che la (97) ha le sole soluzioni non identicamente nulle date dalla formula

$$u(x) = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}},$$

cui corrispondono per la (97) le soluzioni

$$\psi(x) = \frac{C}{x}.$$

Se ne conclude che — detta $\psi_0(x)$ la funzione $\psi(x)$ data dalla (95) — sostituendola nel primo membro dell'equazione proposta, o si troverà per risultato $\mathfrak{F}(x)$, oppure

$$\mathfrak{F}(x) + \frac{C}{x},$$

dove C denota una costante. In questo secondo caso basterà porre

$$(98) \qquad \psi(x) = \psi_0(x) - \frac{C}{\pi x}$$

per ottenere una soluzione della (91).

Un'altra questione che può sollevarsi relativamente alla (91) è d'indagare se essa ha solo la soluzione (98), oppure se ne esistono eventualmente anche delle altre, o, ciò che vale lo stesso, indagare se la corrispondente equazione omogenea

$$(99) \qquad \pi\psi(x) - \lambda \int_{-1}^{*1} \frac{y}{y-x}\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\psi(y)\,dy = 0$$

ammette delle soluzioni non identicamente nulle.

Per compiere tale indagine conviene considerare l'equazione (99) sotto la forma trigonometrica analoga alla (89) e cioè sotto la forma

$$(100) \qquad \pi\psi(\sin\alpha)\cos\alpha - \frac{\lambda}{2}\,{}^{*}\!\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\,\psi(\sin\theta)\sin\theta\,d\theta = 0.$$

Supponendo che la funzione $\psi(\sin\theta)$ sia sviluppabile in serie di Fourier integrabile termine a termine:

$$\psi(\sin\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta),$$

e ricordando le (65) del § precedente, si vede facilmente che l'equazione (100) può scriversi sotto la forma

$$\begin{aligned}&\alpha_1 + 2\alpha_0(1-\lambda)\cos\alpha + \alpha_1(1-\lambda)\cos 2\alpha + \beta_1(1-\lambda)\sin 2\alpha\\ &+\sum_{n=2}^{\infty}\{\alpha_n[(1-\lambda)\cos(n+1)\alpha + (1+\lambda)\cos(n-1)\alpha]\\ &+\beta_n[(1-\lambda)\sin(n+1)\alpha + (1+\lambda)\sin(n-1)\alpha]\} = 0,\end{aligned}$$

pertanto, affinchè essa sia soddisfatta, è necessario e sufficiente che (supposto $\lambda \neq -1$) si abbia

$$\begin{cases}\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}2\alpha_0\\ \beta_2 = 0\end{cases}, \qquad \begin{cases}\alpha_{n+2} = \dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\alpha_n\\ \beta_{n+2} = \dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\beta_n\end{cases} \qquad (n \geqq 1),$$

formule da cui si deduce

$$(101) \quad \begin{cases}\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = 0,\ \alpha_0 = \dfrac{C}{2}\\ \beta_2 = \beta_4 = \beta_6 = \ldots = 0,\ \beta_1 = C'\end{cases}, \quad \begin{cases}\alpha_{2m} = \left(\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^m C\\ \beta_{2m+1} = \left(\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^m C'\end{cases} \quad (m \geqq 1),$$

avendo indicato con C e C' due costanti arbitrarie.

I risultati ottenuti mostrano anzitutto che *se λ non è positiva, la funzione ψ non può essere che identicamente nulla.*

Infatti nel caso indicato si ha

$$\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right| \geqq 1, \qquad |\alpha_{2m+2}| \geqq |\alpha_{2m}|, \qquad |\beta_{2m+3}| \geqq |\beta_{2m+1}|$$

epperò, non tendendo a zero i coefficienti di Fourier al crescere del l'indice, non corrisponde ad essi alcuna soluzione effettiva.

Se invece *λ è positiva,* allora è

$$\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right| < 1$$

e, a prescindere dai due coefficienti arbitrari C e C', l'equazione (100) ammette le due soluzioni rappresentate dalle due serie di Fourier uniformemente convergenti:

$$\frac{1}{2}+\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\cos 2\alpha+\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^2\cos 4\alpha+\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^3\cos 6\alpha+\ldots,$$

$$\sin\alpha+\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\sin 3\alpha+\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^2\sin 5\alpha+\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^3\sin 7\alpha+\ldots$$

che, sempre a meno di coefficienti costanti, hanno per somma le due funzioni linearmente indipendenti

$$\frac{1}{1+(\lambda^2-1)\sin^2\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{\sin\alpha}{1+(\lambda^2-1)\sin^2\alpha}.$$

Finalmente resta da esaminare il caso finora escluso di $\lambda=-1$, che è quello che a noi più interessa perchè l'equazione (90) corrisponde proprio a tale valore di λ. In questo caso l'equazione (109), sviluppata in serie, assume la forma

$$\alpha_1+4\alpha_0\cos\alpha+2\alpha_1\cos 2\alpha+2\beta_1\sin 2\alpha$$
$$+2\sum_{n=2}^{\infty}[\alpha_n\cos(n+1)\alpha+\beta_n\sin(n+1)\alpha]=0$$

da cui si ricava

$$\alpha_0=\alpha_1=\beta_1=0, \qquad \alpha_n=\beta_n=0 \qquad (n\geqq 2);$$

dunque non esistono soluzioni non identicamente nulle.

Se ne conclude che *l'equazione omogenea* (99) *ammette soluzioni non identicamente nulle, allora e solo allora che è* $\lambda>0$ *e in questo caso essa ammette le due soluzioni linearmente indipendenti*:

$$(102) \qquad \psi_1(x)=\frac{1}{1+(\lambda^2-1)x^2}, \quad \psi_2(x)=\frac{x}{1+(\lambda^2-1)x^2}.$$

Queste soluzioni possono essere facilmente verificate per sostituzione diretta.

In particolare dunque l'equazione (90) possiede soltanto la soluzione data dalla (95) in cui si sia fatto $\lambda=-1$ o, più esattamente, dalla (98).

Da tutto quanto precede si conclude che le equazioni (88) e (89) determinano univocamente le funzioni φ' e ψ. Pertanto la funzione

$$V=V_0+\varphi(y)+x\,\psi(y)$$

risulta determinata a meno di una costante additiva che non ha alcuna influenza sul valore della funzione,

$$\Phi=-\frac{1}{2\pi}\Delta_2 V$$

che fornisce la soluzione dell'equazione integrale (76).

Aggiungeremo infine, a titolo di notizia, che abbiamo verificato come anche nel *caso iperbolico*, purchè il campo cui è esteso l'integrale doppio sia sempre circolare, la risoluzione dell'equazione (76) dipende dalla equazione (90) medesima.

(Eingegangen am 23. Juli 1926.)

(Nota aggiunta nella correzione delle bozze:) Il Sig.r Prof. Lichtenstein, che qui pubblicamente ringrazio per l'interessamento che ha voluto prendere al mio presente lavoro, mi ha fatto gentilmente rilevare come il concetto di valor principale di un integrale doppio, si trovi già implicitamente usato nei noti lavori del Petrini sulle derivate del potenziale [Acta Math. **31** (1908), pg. 127 — 332; Journ. de Math. (6) **5** (1909), pg. 127 — 223]. In epoca successiva lo stesso concetto è stato esplicitamente adoperato dal Müntz [Crelle **139** (1910), pg. 5 — 32].

Anche le formule (19), che danno le derivate seconde di un potenziale logaritmico di campo, non sono sostanzialmente diverse da altre analoghe che trovansi in Petrini e in Müntz. Dette formule sono valide sotto l'ipotesi che esistano i due integrali «con asterisco». Similmente, la funzione $F(P)$ considerata a pg. 27, va supposta tale che esista l'integrale «con asterisco» di $N(P,Q)\,F(Q)\,dS_Q$ esteso all'intero piano Q.

Eine Kennzeichnung der Flächen konstanten Krümmungsmaßes.

Von

W. Haack in Hamburg.

Es handelt sich hier um eine Verallgemeinerung des von Beltrami gestellten und gelösten Problems: die Flächen zu bestimmen, die sich so in die Ebene abbilden lassen, daß die geodätischen Linien in die Geraden der Ebene übergehen. Solche Verallgemeinerungen liegen schon mehrfach vor, so setzte Kasner (Americ. Trans. **6** (1905), S. 141—158) statt der Geraden die Parabeln

$$y = a x^2 + b x + c.$$

Busse setzte in seiner Dissertation (Berlin 1899) die Kreise und machte die einschränkende Annahme, daß die Abbildung der Flächen in die Ebene konform sei.

Jules Drach stellte 1909 (Comptes Rendus **148**, S. 150) die allgemeinere Aufgabe: *diejenigen Flächen zu bestimmen, die sich so in die Ebene abbilden lassen, daß ihre geodätischen Linien in Kreise übergehen*; gab aber keine Lösung.

Im folgenden wird gezeigt, *daß die Flächen konstanten Krümmungsmaßes die einzigen sind, die die verlangte Eigenschaft besitzen.*

I.

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung der geodätischen Linien einer Fläche mit dem Linienelement

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

läßt sich immer in der Form schreiben:

$$y'' = A y'^3 + B y'^2 + C y' + D; \tag{1}$$

dabei sind A, B, C, D Ausdrücke in E, F, G und deren partiellen Ableitungen nach x und y.

II.

Es seien u, v rechtwinklig-geradlinige Koordinaten der Ebene; dann werden die Kreise dieser Ebene gegeben durch

$$a(u^2+v^2)+bu+cv+d=0. \tag{2}$$

Gehen wir in eine (x, y)-Ebene über durch

$$x=u+iv, \quad y=u-iv,$$

dann werden die Kreise

$$\alpha xy+\beta x+\gamma y+\delta=0. \tag{3}$$

Dies sind die Integralkurven der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$2y'y'''-3y''^2=0. \tag{4}$$

Unser Problem kann man jetzt in die beiden Fragen fassen: I. Besitzt Gleichung (4) ein Zwischenintegral zweiter Ordnung von der Form (1)? Ist diese Frage beantwortet und sind A, B, C, D als Funktionen von x und y bestimmt, dann kommt II.: Welches sind die Kreisnetze?

III.

Zur ersten Frage: Wir differentiieren (1) vollständig nach (x) und erhalten:

$$y'''=A_1y'^5+B_1y'^4+C_1y'^3+D_1y'^2+E_1y'+F_1; \tag{5}$$

dabei sind:

$$A_1=3A^2; \qquad B_1=5AB+A_y;$$
$$C_1=4AC+A_x+2B^2+B_y; \qquad D_1=3AD+3BC+B_x+C_y;$$
$$E_1=2BD+C^2+C_x+D_y; \qquad F_1=CD+D_x.$$

Mit (1) und (5) gehen wir in (4). Ist (1) ein Zwischenintegral von (4), so muß dadurch eine Identität entstehen. Man erhält eine Gleichung der Form:

$$\bar{A}_1y'^6+\bar{A}_2y'^5+\bar{A}_3y'^4+\bar{A}_4y'^3+\bar{A}_5y'^2+\bar{A}_6y'+\bar{A}_7=0.$$

Diese Gleichung wird zur Identität, wenn alle $\bar{A}_i$ einzeln Null sind. So kommt man zu den sieben Gleichungen:

$$3A^2=0; \quad 4AB+2A_y=0;$$
$$3D^2=0; \quad 4CD-2D_x=0;$$
$$2AC+2A_x+B^2+2B_y=0;$$
$$2BD-2D_y+C^2-2C_x=0;$$
$$B_x+C_y=0.$$

Da nach den beiden ersten

$$A = D = 0$$

ist, so bleiben nur:

$$\begin{aligned} B^2 + 2B_y &= 0; \\ C^2 - 2C_x &= 0; \\ B_x + C_y &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Intergration dieses Systems ist leicht ausführbar. Die dritte Gleichung besagt: B und $-C$ sind die partiellen Ableitungen einer Funktion $\varphi(x, y)$ nach y bzw. x:

$$B = \varphi_y, \quad C = -\varphi_x. \tag{7}$$

Dann werden die ersten beiden Gleichungen:

$$\varphi_y^2 + 2\varphi_{yy} = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_x^2 + 2\varphi_{xx} = 0.$$

Beide lassen sich sofort integrieren, man bekommt

$$\text{I.} \quad \varphi_y = \frac{2}{U+y} \qquad \text{II.} \quad \varphi_x = \frac{2}{V+x}$$

und

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad \varphi &= 2\lg(U+y) + \overline{U}_1 \\ &= 2\lg\{U_1(U+y)\}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{II.} \quad \varphi &= 2\lg(V+x) + \overline{V}_1 \\ &= 2\lg\{V_1(V+x)\}. \end{aligned}$$

Dabei sind U, U_1 und V, V_1 zunächst willkürliche Funktionen von x bzw. y allein, die durch Vergleichen von I und II bestimmt werden. Man erhält:

$$\varphi = 2\lg(a + bx + cy + dxy); \tag{8}$$

a, b, c, d sind Integrationskonstanten.

Die Differentialgleichung (1) der geodätischen Linien ist dann:

$$(a + bx + cy + dxy) \cdot y'' = 2(c + dx)y'^2 - 2(b + dy)y'. \tag{9}$$

Dies ist das gesuchte Zwischenintegral der Differentialgleichung (4), das die Form (1) hat.

Setzt man $x = (x_1 - c)$, $y = (y_1 - b)$ und danach $x_1 = (a - bc)x_2$, und dazu $d = 1$, was ohne Einschränkung gestattet ist, dann geht (9) über in

$$(1 + xy)y'' = 2xy'^2 - 2yy'. \tag{10}$$

IV.

Das Kreisnetz. Die Integralkurven von (10) genügen nach II einer Gleichung der Form:

$$xy + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Durch Einsetzen in (10) bekommt man

$$\gamma = -1.$$

Das Bild der geodätischen Linien in der (x, y)-Ebene wird also gegeben durch die Kurven:

$$x y - 1 + \alpha x + \beta y = 0.$$

Geht man durch $x = u + i v$, $y = u - i v$ wieder in die (u, v)-Ebene zurück (vgl. II), dann erhält man die Kreise:

$$u^2 + v^2 - 1 + a u + b v = 0. \tag{11}$$

Diese Kreise sind, wie man leicht übersieht, gerade das Bild der Großkreise der Einheitskugel, das die stereographische Projektion vom Pol auf die Äquatorebene liefert. Daraus folgt: sämtliche Flächen, die sich so in die Ebene abbilden lassen, daß die geodätischen Linien in Kreisbogen übergehen, sind auf die Kugel geodätisch abbildbar, das heißt aber: *die Flächen müssen konstantes Krümmungsmaß besitzen.*

Hamburg, den 28. Juli 1926.

(Eingegangen am 7. August 1926.)

Über konvexe Polygone in der Ebene der komplexen Zahlen.

Von

E. Schönhardt in Tübingen.

---

1. Hat ein System von $n \geqq 4$ Punkten in der Ebene der komplexen Zahlen die Beschaffenheit, daß keine vier dieser Punkte auf einem Kreise liegen so kann ihm eindeutig ein System von n positiven ganzen Zahlen zwischen 3 und $n-1$ auf folgende Weise zugeordnet werden:

Man unterwirft das System einer linearen Abbildung, welche einen der Punkte, z_ν, ins Unendliche transformiert. Um die Menge der Bildpunkte der übrigen beschreibt man ein geradliniges konvexes Polygon derart, daß seine Ecken der Menge angehören. Dieses Polygon ist dann bei gegebenem Punktsystem seiner Gestalt nach bis auf eine Ähnlichkeitstransformation bestimmt. Wir nennen es das zum Punkt z_ν gehörige Polygon oder kurz das Polygon $[z_\nu]$. Die Anzahl seiner Ecken sei a_ν. Dann gilt:

$$3 \leqq a_\nu \leqq n-1.$$

Dem Punkt z_ν wird nun die Zahl a_ν zugeordnet. Für jeden der n Punkte des Systems ist eine solche Zahl eindeutig bestimmt.

Hätte man vor Ausführung dieser Konstruktion das ursprüngliche System einer allgemeinen linearen Substitution unterworfen, so wäre man zu einem ähnlichen Polygon gelangt, denn es würde sich von obigem nur durch eine ganze lineare Transformation unterschieden haben. Die Gestalt des Polygons $[z_\nu]$ und insbesondere die Zahl a_ν ist somit invariant gegenüber linearer Transformation des Punktsystems.

Bezüglich der so bestimmten invarianten Zahlen a_ν gilt

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 6\ (n-2),$$

oder in Worten der Satz:

Die Gesamtzahl der Ecken aller zu n vorgelegten Punkten gehörigen Polygone ist von der Lage dieser Punkte unabhängig, nämlich gleich $6(n-2)$.

Der Beweis des Satzes geschieht durch vollständige Induktion. Seine Richtigkeit für $n = 4$ erkennt man sofort, denn hier kommen als Polygone nur *Dreiecke* in Betracht, die Gesamtzahl der Ecken ist also zwölf. Der Satz ist folglich bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß σ_n beim Übergang von n auf $n+1$ Punkte gerade um 6 zunimmt. Hierzu beweisen wir zuerst, daß diese Zunahme unabhängig davon ist, wo der $(n+1)$-te Punkt angenommen wird, und bestimmen sie sodann bei einer bequemen Lage desselben.

Eine Bemerkung sei noch vorausgeschickt. Statt des geradlinigen Polygons $[z_\nu]$ hätte man dem Punkt z_ν auch das Kreisbogenpolygon (z_ν) zuordnen können, welches aus $[z_\nu]$ hervorgeht, wenn die Transformation, die z_ν nach Unendlich warf, nachträglich rückgängig gemacht wird. Seine Seiten sind Bögen von Kreisen, welche alle durch den Punkt z_ν gehen. Als das Innere dieses Polygons bezeichnen wir denjenigen Teil der Ebene, in dem sich z_ν nicht befindet, und als positiven Umlauf um seine Berandung einen solchen, bei dem das Innere zur Linken liegt. Sind dann z_1 und z_2 zwei in positivem Sinn aufeinanderfolgende Ecken von (z_ν), so liegen alle übrigen $n-3$-Punkte links des orientierten Kreises $z_\nu z_1 z_2$. Dasselbe gilt für den Kreis $z_\nu z_2 z_3$, wenn z_3 die nächstfolgende Ecke des Polygons ist usw. Auf diese Weise hätte man direkt das Kreisbogenpolygon (z_ν) definieren können, und zwar invariant gegenüber linearer Transformation des Systems. Im folgenden werden wir meist das Polygon (z_ν) verwenden und nur, wo es zweckmäßig erscheint, auf seine geradlinige Erscheinungsform $[z_\nu]$ zurückgreifen. Die entsprechenden Punkte in beiden Polygonen werden dabei in gleicher Weise bezeichnet.

2. Um zu beweisen, daß die Zunahme der Eckensumme σ_n von der Lage des $(n+1)$-ten Punktes z_{n+1} unabhängig ist, bewegen wir diesen Punkt stetig in der Ebene, ohne ihn je mit einem der übrigen n Punkte zusammenfallen zu lassen, und untersuchen die entstehende Änderung bei den einzelnen Polygonen. Ein Punkt z_λ kann dabei die Eigenschaft, Ecke des Polygons (z_ν) zu sein, nur gewinnen oder verlieren beim Durchgang durch eine Zwischenlage, wo er auf einer Polygonseite zwischen zwei Ecken $z_\varkappa$ und z_μ liegt. Um dies einzusehen, nehmen wir für einen Augenblick z_λ aus dem System weg und bezeichnen das neue zu z_ν gehörige Polygon mit $(z_\nu)_\lambda$. Der Punkt z_λ liegt dann außerhalb oder innerhalb von $(z_\nu)_\lambda$, je nachdem er Ecke oder innerer Punkt von (z_ν)

ist. Da sich nun z_{n+1} stetig bewegt, so muß auch der Übergang zwischen diesen beiden Zuständen stetig erfolgen, und das ist nur möglich, indem z_λ die Berandung des Polygons $(z_\nu)_\lambda$ zwischen zwei Ecken passiert, da wir das Zusammenfallen zweier Punkte ausgeschlossen haben. Dabei bleibt es gleichgültig, ob z_λ mit dem bewegten Punkt z_{n+1} identisch ist oder nicht. Während im ersten Fall das Polygon $(z_\nu)_\lambda$ fest bleibt und z_λ sich stetig von seinem Inneren ins Äußere oder umgekehrt bewegt, wird im zweiten das Polygon $(z_\nu)_\lambda$ stetig deformiert, wobei eine seiner Seiten einmal über den Punkt z_λ hinwegstreicht. Wir hatten gleich zu Beginn über das Punktsystem die Voraussetzung gemacht, daß keine vier Punkte desselben auf einem Kreise liegen, können also jetzt sagen:

Bei stetigem Übergang des Punkts z_{n+1} von einer zulässigen Lage zu einer anderen kann eine Änderung der Eckeneigenschaft des Punkts z_λ bezüglich des Polygons (z_ν) nur eintreten, wenn mindestens einmal eine Zwischenlage passiert wird, wo z_λ mit z_ν zusammen zwei andere Punkte des Systems, $z_\varkappa$ und z_μ, auf einem Kreise trennt.

Daraus folgt: Solange z_{n+1} keinen der Kreise K durch je drei der übrigen Punkte überschreitet, tritt in keinem Polygon an den Ecken eine wesentliche Änderung ein, da dann nie vier Punkte auf einem Kreis liegen. Es ist nun möglich, daß z_{n+1} auf seinem Weg durch eine Lage kommt, wo er gleichzeitig auf mehreren der Kreise K liegt. Diese Möglichkeit besteht nicht mehr, wenn wir die Schnittpunkte der Kreise K aus dem Bewegungsgebiet des Punkts z_{n+1} ausschließen, was keine Beschränkung bedeutet, indem z_{n+1} immer noch stetig von jeder zulässigen Lage in jede andere gelangen kann. Es wird dadurch aber bewirkt, daß z_{n+1} in einem bestimmten Moment seiner Bewegung nur einen der Kreise K überschreitet. Es genügt also vollkommen, die Änderung zu untersuchen, die entsteht, wenn z_{n+1} über einen einzigen der Kreise K hinübertritt.

3. Der Punkt z_{n+1} möge den Kreis K durch die Punkte z_1, z_2, z_3 und sonst keinen überschreiten. Aus den Betrachtungen in **2.** folgt dann, daß die Punkte $z_\varkappa, z_\lambda, z_\mu, z_\nu$ in irgendeiner Reihenfolge mit z_1, z_2, z_3, z_{n+1} identisch sein müssen für alle Polygone (z_ν) und alle Punkte z_λ, die von einer Änderung betroffen werden. Dabei waren $z_\varkappa$ und z_μ vor und nach dem Übergang Ecken des Polygons $(z_\nu)_\lambda$, also auch Ecken von (z_ν), die entweder direkt aufeinander folgen oder lediglich durch z_λ getrennt sind.

Daraus geht hervor:

I. Die Änderung betrifft:

a) in jedem Polygon höchstens einen Punkt,

b) nur die Polygone (z_1), (z_2), (z_3), (z_{n+1}),

c) nur die Punkte z_1, z_2, z_3, z_{n+1}.

II. Eine Änderung tritt überhaupt nur ein, wenn im Augenblick des Durchgangs alle übrigen Punkte auf derselben Seite des Kreises K liegen, d. h. wenn z_2 und z_3 aufeinanderfolgende Ecken des Polygons $(z_1)_{n+1}$ sind.

Um eine bestimmte Vorstellung zu haben, nehmen wir jetzt an, die Überschreitung von K durch z_{n+1} erfolge zwischen z_2 und z_3 und das Polygon $(z_1)_{n+1}$ liege links des im Sinne $z_1\, z_2\, z_3$ orientierten Kreises K. Beides kann durch passende Wahl der Bezeichnung stets erreicht werden. Über die Richtung des Durchganges können wir dann eigentlich nicht mehr verfügen. Bei ihrer Umkehrung ändern sich aber einfach die Vorzeichen der Zahlen, welche die Verschiebung in der Anzahl der Ecken der einzelnen Polygone angeben, die Richtung ist also hier nicht wesentlich. Wir setzen fest, daß der Übergang von der linken auf die rechte Seite des orientierten Kreises K stattfindet.

Die weitere Untersuchung wird beträchtlich vereinfacht durch folgenden Hilfssatz:

z_α ist dann und nur dann Ecke von (z_β), wenn z_β Ecke von (z_α) ist.

Ist nämlich z_β Ecke von (z_α) und z_γ eine Nachbarecke, so liegen alle übrigen Punkte auf ein und derselben Seite des Kreises durch $z_\alpha\, z_\beta\, z_\gamma$. Also sind z_γ und z_α Nachbarecken von (z_β). Ist umgekehrt der Punkt z_β nicht Ecke des Polygons (z_α), so liegt er in seinem Innern, also kann man durch z_α und z_β keinen Kreis legen, der durch einen weiteren Punkt geht und alle übrigen auf derselben Seite läßt, d. h. z_α kann nicht Ecke von (z_β) sein.

Betrachten wir jetzt zuerst das Polygon (z_1). z_{n+1} liegt vorher im Innern und tritt durch die Seite $z_2\, z_3$ aus, wird also Ecke. Wegen des Hilfssatzes wird im Polygon (z_{n+1}) der Punkt z_1 Ecke. Im Polygon (z_2) sind ursprünglich $z_{n+1}\, z_3\, z_1$ aufeinanderfolgende Ecken, nachher z_{n+1} und z_1, also geht die Ecke z_3 verloren. Wegen des Hilfssatzes ebenso in (z_3) die Ecke z_2. Insgesamt werden zwei Ecken gewonnen und zwei verloren.

Wir haben somit das Ergebnis:

> Überschreitet z_{n+1} einen einzigen der Kreise K, so wird die Gesamtzahl der Polygonecken dadurch nicht geändert.

Und weiterhin:

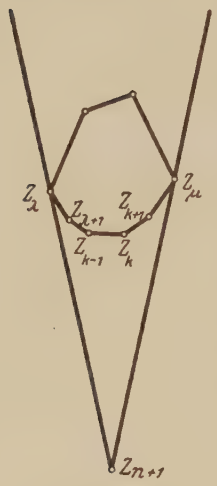
> Die Zunahme der Eckensumme σ_n beim Übergang von n auf $n+1$ Punkte ist von der Lage des neuen Punktes unabhängig.

Schließlich folgt daraus auch allgemein unmittelbar die Unabhängigkeit der Polygoneckensumme σ_n von der Lage der Punkte des Systems.

4. Wir beweisen jetzt den Satz:

Der Zuwachs von σ_n bei Vermehrung von n um eins ist gleich sechs.

Zu diesem Zweck denken wir uns für die n ursprünglichen Punkte das geradlinige Polygon $[z_1]$ mit a_1 Ecken konstruiert. Nach dem Ergebnis von 3. ist der Zuwachs unabhängig davon, wo der neue Punkt z_{n+1} angenommen wird. Man kann ihn also so wählen, daß er außerhalb aller Kreise liegt, die durch je drei der $n-1$ Punkte $z_2, z_3, \ldots, z_n$ gehen. Nach Voraussetzung darf er auf keiner der Geraden des Polygons liegen. Es gibt dann zwei Ecken z_λ und z_μ von $[z_1]$ derart, daß alle übrigen Punkte rechts von $z_{n+1} z_\lambda z_1$ und links von $z_{n+1} z_\mu z_1$ liegen (Figur). Von den restlichen Ecken mögen sich ϱ auf der z_{n+1} zugewendeten Hälfte des Polygonrandes befinden. Sie sind, wenn z_{n+1} weit genug vom Polygon entfernt ist, samt z_λ und z_μ auch Ecken von (z_{n+1}). Dazu tritt noch die weitere Ecke z_1, das Polygon (z_{n+1}) hat also $\varrho + 3$ Ecken. Die Zahl der Ecken von $[z_1]$ vermindert sich um $\varrho - 1$, denn an Stelle der eben genannten ϱ Ecken tritt die einzige Ecke z_{n+1}.



Wir untersuchen jetzt die Änderung bei den Polygonen (z_λ) und (z_μ). Die in $[z_1]$ in positivem Sinne auf z_λ folgende Ecke sei $z_{\lambda+1}$. Dann folgen in (z_λ) ursprünglich die Ecken $z_{\lambda+1}$ und z_1 positiv aufeinander. Nun liegen aber alle Punkte links der orientierten Kreise $z_\lambda z_{\lambda+1} z_{n+1}$ und $z_\lambda z_{n+1} z_1$, also folgen nach Hinzutreten von z_{n+1} in (z_λ) die Ecken $z_{\lambda+1} z_{n+1} z_1$ positiv aufeinander. Die Ecke z_{n+1} ist zwischen die schon vorhandenen $z_{\lambda+1}$ und z_1 eingeschaltet worden, sonst hat sich nichts geändert. Die Eckenzahl von (z_λ) hat sich somit um eins vermehrt und dasselbe gilt aus Symmetriegründen für das Polygon (z_μ). Nun seien $z_{\varkappa-1} z_\varkappa z_{\varkappa+1}$ drei positiv aufeinanderfolgende Ecken des Polygons $[z_1]$, welche dem z_{n+1} zugewendeten Teil seines Randes angehören. Dann folgen ursprünglich in $(z_\varkappa)$ die Ecken $z_{\varkappa+1} z_1 z_{\varkappa-1}$ aufeinander. Es liegen aber alle übrigen Punkte links der orientierten Kreise $z_\varkappa z_{\varkappa+1} z_{n+1}$ und $z_\varkappa z_{n+1} z_{\varkappa-1}$. Demnach folgen in $(z_\varkappa)$ nach Hinzutreten von z_{n+1} die Ecken $z_{\varkappa+1} z_{n+1} z_{\varkappa-1}$ aufeinander, an die Stelle von z_1 ist z_{n+1} getreten, somit hat sich an der Eckenzahl nichts geändert. In den Polygonen, die zu den auf dieser Seite des Randes von $[z_1]$ befindlichen Eckpunkten gehören, ist folglich keine Änderung in der Anzahl der Ecken zu verzeichnen.

Da die übrigen Eckpunkte des Polygons $[z_1]$, sowie die anderen Punkte des Systems nicht Ecken von (z_{n+1}) sind, so kann wegen des Hilfssatzes z_{n+1} nicht Ecke der zu ihnen gehörigen Polygone sein, also wird in diesen überhaupt nichts geändert.

Daraus geht hervor, daß die Gesamtänderung von σ_n gleich

$$\varrho + 3 - \varrho + 1 + 2 = 6$$

ist, w. z. b. w.

5. Der Beweis des Satzes von Nr. 1 ist damit geliefert. Gilt er für n Punkte, so ist er nach dem Vorigen auch für $n+1$ Punkte richtig. Für $n = 4$ wurde seine Richtigkeit direkt erkannt, also gilt er für alle

$$n \geqq 4.$$

Er ist auch noch für $n = 3$ richtig, wenn man Zweiecke als Polygone zuläßt. Die Zahlen a_ν sind dann alle gleich zwei, $\sigma_3 = 6$. Für $n = 2$ wird der Satz unrichtig.

Durch unseren Satz wird das Problem, wieviel Polygone der verschiedenen Eckenzahlen bei bestimmten n auftreten können, zwar stark reduziert, aber nicht vollständig gelöst. Bezeichnet man die Zahl der auftretenden p-Ecke mit x_p, so müssen diese ganzen positiven Zahlen den Gleichungen:

$$\sum_{p=3}^{n-1} x_p = n; \qquad \sum_{p=3}^{n-1} p\, x_p = 6(n-2) = \sigma_n$$

genügen. Die Lösungen dieses Systems diophantischer Gleichungen sind zwar leicht anzugeben, aber nicht alle sind zugleich Lösungen des genannten Problems.

Für $n = 4$ ist die einzige Lösung, vier Dreiecke, schon bekannt. Eine einzige Lösung erhält man auch für $n = 5$, nämlich zwei Dreiecke und drei Vierecke. Für $n = 6$ ergeben die Gleichungen vier Lösungen, nämlich:

x_3	0	1	2	3
x_4	6	4	2	0
x_5	0	1	2	3,

aber nur die erste und die dritte sind, wie sich zeigen läßt, zugleich Lösungen des Problems.

Wir beweisen zunächst die Unmöglichkeit der zweiten Lösung. Die Punkte seien jetzt der Einfachheit wegen durch die Ziffern 1 bis 6 bezeichnet. Wir verfügen über die Bezeichnung in der Weise, daß zu 1 das Fünfeck, zu 2 das Dreieck mit den inneren Punkten 5 und 6 gehört. Dann ergibt sich aus dem Hilfssatz, abgesehen von der Anordnung der Ecken, eindeutig folgende Verteilung:

Polygon	Ecken	Innere Punkte
1	23456	—
2	134	56
3	1256	4
4	1256	3
5	1346	2
6	1345	2

Nun kann die Bezeichnung nur noch innerhalb der Punktepaare (34) und (56) vertauscht werden. Wir legen sie bei dem Paar (34) fest durch die Annahme, daß die Reihenfolge 134 einem positiven Umlauf des Dreiecks entspricht. Dann liegen 56 links und 2 rechts des Kreises 134. Über das Paar (56) verfügen wir so, daß ein positiver Umlauf um das Fünfeck der Reihe nach die Punkte 24653 berührt. Es liegen dann alle übrigen Punkte links der Kreise 531 und 516, also entspricht die Folge 3164 einem positiven Umlauf um das Polygon [5]. In ähnlicher Weise erkennt man die positive Umlaufsfolge 1562 im Polygon [3]. Dort liegen aber die Punkte 124 links des Kreises 356, während sie im Polygon [5] durch denselben Kreis getrennt werden. Infolge dieses Widerspruchs ist die Lösung unbrauchbar.

Der entsprechende Nachweis für die vierte Lösung gestaltet sich noch einfacher. Wir wählen die Bezeichnung so, daß die drei Fünfecke zu den Punkten 1, 2, 3 gehören. Aus dem Hilfssatz folgt dann, daß alle drei Dreiecke dieselben Ecken 1, 2, 3 besitzen, während 56 bzw. 64 bzw. 45 ihre inneren Punkte sind. Innerhalb des Tripels 123 kann über die Bezeichnung noch verfügt werden. Wir tun dies in der Weise, daß die Folge 123 einem positiven Umlauf des Dreiecks [4] mit den inneren Punkten 5 und 6 entspricht. Es liegen also 5 und 6 links, dagegen 4 rechts des Kreises 123. Im Dreieck [5] ist aber 6 innerer Punkt, also folgen auch hier 123 positiv aufeinander und deshalb muß auch der zweite innere Punkt 4 links des Kreises 123 liegen. Der hieraus entstehende Widerspruch zeigt wieder die Unbrauchbarkeit der angenommenen Lösung.

Allgemein läßt sich hieraus leicht folgender Satz beweisen:

Für $n \geqq 6$ können höchstens zwei $(n-1)$-Ecke auftreten.

Zu den Punkten z_1, z_2 und z_3 mögen als Polygone $(n-1)$-Ecke gehören. Dann gibt es einen von diesen dreien verschiedenen Punkt z_ν des Systems, der bei allen drei Polygonen Ecke ist. Läßt man diesen aus dem System weg, so erhält man drei $(n-2)$-Ecke, die zu drei Punkten des Systems von nunmehr $n-1$ Punkten gehören. Gilt der Satz also für $n-1$ Punkte, so ist er auch für n Punkte richtig. Seine Gültigkeit für $n = 6$ wurde oben dargetan, also ist er für alle $n \geqq 6$ bewiesen.

6. Es liegt nahe, nach einem Analogon des Satzes von Nr. 1 für ein System von n Punkten im Raum zu fragen. Man wird dabei voraussetzen, daß keine fünf derselben auf einer Kugel oder Ebene liegen. Wählt man dann einen der Punkte als Zentrum einer Inversion, so ist durch die Bildpunkte der $(n-1)$ übrigen ein umschriebenes kleinstes konvexes

Polyeder bestimmt, dessen Begrenzung ausschließlich von Dreiecken gebildet wird. Jedem der n Punkte des Systems ist eindeutig ein solches Dreieckspolyeder zugeordnet. Die Gesamtzahl der Ecken aller n Polyeder ist jedoch keineswegs bei gegebenem n konstant, wie man schon bei $n = 6$ leicht sehen kann. Es kann sich hier höchstens darum handeln, eine obere bzw. untere Grenze für diese Zahl anzugeben, worauf ich bei anderer Gelegenheit näher einzugehen gedenke.

Tübingen, September 1926.

(Eingegangen am 22. September 1926.)

Komplexe Zahlen und konvexe Polyeder.

Von

Konrad Knopp in Tübingen.

Herr E. Schönhardt beweist in der vorstehenden Arbeit den folgenden Satz:

In der Ebene der komplexen Zahlen seien $n \geqq 4$ Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_n$ gegeben, von denen keine vier auf einem Kreise liegen. Es sei $l_\nu(z)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, eine lineare Abbildung, für die $l_\nu(z_\nu) = \infty$ ist, und es sei a_ν die Anzahl der Ecken des kleinsten konvexen Polygons π_ν, das die Bilder der übrigen $n-1$ Punkte enthält. Dann ist — unabhängig von der Lage der gegebenen Punkte und von der speziellen Form der benutzten linearen Abbildungen — die Gesamtanzahl der Ecken der entstehenden n Polygone

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 6(n-2).$$

Dieser Satz ist überraschend, weil er im besonderen aussagt, daß die Anzahl der Ecken der in Rede stehenden n Polygone im Durchschnitt < 6, also jedenfalls beschränkt und nicht, wie man bei willkürlicher Lage der Punkte zunächst vermuten könnte, von der Größenordnung n ist.

Der Beweis, den Herr Schönhardt für seinen Satz gibt, benutzt als Hilfsmittel ausschließlich die Kreisverwandtschaften in der Gaußschen Ebene. Ich will im folgenden zeigen, wie durch eine räumliche Deutung die Richtigkeit des Satzes sofort evident wird und wie sich darüber hinaus die in Nr. 5 der genannten Arbeit aufgeworfene Frage nach den im Sinne der Inversionsgeometrie verschiedenen Punktsystemen mit einem klassischen Problem der Polyedertheorie identifizieren läßt.

Dazu verlege man die gegebenen n Punkte auf die Riemannsche Zahlenkugel. Da sich zwei verschiedene lineare Transformationen, die beide z_ν nach ∞ werfen, nur um eine Ähnlichkeitstransformation unterscheiden, die an der Eckenanzahl a_ν nichts ändert, so genügt es, z_ν etwa

durch eine Drehung nach ∞ zu bringen. Des Polygon π_ν wird nun ersichtlich aus ∞ durch eine a_ν-kantige körperliche Ecke projiziert, die als kleinste konvexe körperliche Ecke mit der Spitze ∞ definiert werden kann, welche die Bilder der übrigen $n-1$ Punkte enthält. Da die Drehung der Kugel an den gestaltlichen Verhältnissen nichts ändern konnte, so durfte sie auch unterbleiben und die eben beschriebene körperliche Ecke bei allen n Punkten z_ν zugleich konstruiert werden. Diese haben dann ein konvexes Polyeder P_n gemeinsam, das genau die gegebenen n Punkte der Kugel zu Ecken und nur Dreiecke als Begrenzungsflächen hat, — letzteres, weil keine vier der gegebenen Punkte auf einem Kreise liegen sollten. Die gesuchte $\sum a_\nu$ ist nun offenbar nichts anderes als die doppelte Kantenanzahl des Polyeders P_n. Bezeichnet man diese mit $2k$, so ist, wenn f die Anzahl der Seitenflächen von P_n bedeutet, erstlich

$$2k = 3f,$$

weil alle Seitenflächen Dreiecke sind, und zweitens nach dem Eulerschen Polyedersatz

$$n + f = k + 2.$$

Aus beidem folgt sofort die Behauptung, daß

$$\sum a_\nu = 2k = 6(n-2)$$

ist. —

Die genannte Fragestellung läuft also, da die Beschränkung der Punkte auf die Kugel unwesentlich ist, auf die Bestimmung aller wesentlich verschiedenen Dreieckspolyeder hinaus, deren Theorie[1]) uns auch sofort die Antwort auf weitere Fragen liefert.

Wir bezeichnen dazu allgemein ein konvexes Dreieckspolyeder mit n Ecken ($n \geqq 4$) als ein P_n, und eine Ecke desselben, in der p Kanten zusammenstoßen, als eine solche von der p-ten Ordnung oder kurz als eine E_p. Ist x_p, $p = 3, 4, \ldots, n-1$, die *Anzahl* dieser E_p — oder also die Anzahl der p-Ecke unter den Polygonen π_ν unseres Satzes —, so ist nach dem Vorstehenden

$$(*) \qquad \begin{cases} x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} = n, \\ 3x_3 + 4x_4 + \ldots + (n-1)x_{n-1} = 6(n-2). \end{cases}$$

Aus diesen sogenannten *Fundamentalgleichungen der Polyedertheorie* folgt nun z. B. durch Subtraktion der mit 6 multiplizierten ersten Gleichung von der zweiten, daß

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 \geqq 12$$

[1]) Die gesamte Literatur hierüber, sowie die im folgenden benutzten Einzelheiten findet man in dem Encyklopädieartikel III AB 12 von E. Steinitz, Polyeder und Raumeinteilungen (1922).

sein muß, oder in Worten: Die Ecken eines P_n sind nicht sämtlich von höherer als der 5-ten Ordnung. Die n Polygone π_ν haben also — was ja auch aus dem Wortlaut unseres Satzes sofort folgt — nicht sämtlich 6 und mehr Ecken. Fehlen die Drei- und Vierecke gänzlich, so muß es mindestens 12 Fünfecke unter ihnen geben; fehlen die Drei- und Fünfecke, so gibt es mindestens 6 Vierecke; fehlen die Vier- und Fünfecke, so gibt es mindestens 4 Dreiecke.

Ein P_n kann schematisch dadurch aufgezeichnet werden, daß man in einem Dreieck noch $n-3$ Punkte markiert (doch etwa so, daß keine 3 der n Punkte auf einer Geraden liegen) und solange die Verbindungsstrecken je zweier Punkte zeichnet, als dies ohne Überschneidungen noch möglich ist. Die entstehende Figur enthält dann stets $3(n-2)$ Strecken und das Ausgangsdreieck ist in $2n-5$ Teildreiecke zerlegt, so daß diese mit jenem zusammen die $2(n-2)$ Seitenflächen des P_n repräsentieren.

Auf folgende drei Arten kann man nun aus dem Schema eines P_n dasjenige eines P_{n+1} herleiten:

1. Art. Man markiere im Innern eines der Teildreiecke[2]) einen neuen Punkt und verbinde ihn mit den drei Ecken des Teildreiecks. Die Ordnung dieser drei Ecken erhöht sich dabei um je 1 und eine E_3 ist neu hinzugekommen.

2. Art. Man lösche die gemeinsame Kante zweier Nachbardreiecke und wähle im Innern des entstandenen Vierecks einen neuen Punkt, den man mit den vier Ecken dieses Vierecks verbindet. Die Ordnung von zwei (nicht benachbarten) dieser Ecken erhöht sich dabei um je 1, die der beiden andern bleibt ungeändert und eine E_4 ist neu hinzugekommen.

3. Art. Man wähle an einer E_p mit $p \geqq 4$ drei aufeinanderfolgende der dort zusammenstoßenden Dreiecke, lösche in dem durch sie gebildeten Fünfeck die beiden Diagonalen und verbinde einen inneren Punkt des Fünfecks mit dessen fünf Ecken. Dabei geht die Ordnung dieser E_p um 1 zurück, die der beiden Nachbarecken im Fünfeck wird um je 1 erhöht, die der beiden übrigen Ecken bleibt ungeändert und eine E_5 ist neu hinzugekommen.

Führt man diese Konstruktionen bei den Schemata *aller* P_n durch, so entstehen diejenigen *aller* P_{n+1} (zum Teil mehrfach), da nach dem Vorhergesagten jedes P_{n+1} mindestens eine Ecke 3., 4. oder 5. Ordnung besitzen muß.

Damit ist ein einfaches konstruktives Prinzip gewonnen — es ist un-

---

[2]) Das Ausgangsdreieck braucht nicht besonders berücksichtigt zu werden, da man die Figur stets so anlegen kann, daß eine beliebig gegebene Seitenfläche des P_n durch das Ausgangsdreieck repräsentiert wird.

abhängig von Kirkman, Cayley und Möbius um 1860 angegeben worden —, um alle realisierbaren Lösungen des Gleichungssystems (*) zu erhalten und also alle bei gegebenem n wirklich auftretenden Verteilungen der π_ν nach ihrer Eckenanzahl zu ermitteln, — ein Prinzip, das es indessen bisher noch nicht ermöglicht hat, die *Anzahl* dieser realisierbaren Lösungen, sei es die genaue Anzahl oder auch nur ihren asymptotischen Verlauf, anzugeben.

Wir zeigen nur noch, wie die speziellen von Herrn Schönhardt in Nr. 5 seiner Arbeit gemachten Feststellungen sich nun unmittelbar anschaulich ergeben:

a) Hat ein P_6 überhaupt eine E_3, so muß es aus dem P_5 durch Ansetzen einer E_3 erhalten werden können. Da die Ecken der Seitendreiecke des P_5 sämtlich die Ordnungen 3, 4, 4 haben, so hat unser P_6 also notwendig die Eckenordnungen 3; 4, 5, 5; 3, 4, was der Lösung

$$x_3 = 2, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 2$$

von (*) entspricht. Die Lösungen 1, 4, 1 und 3, 0, 3 sind also beide unmöglich.

b) Hätte ein P_n drei E_{n-1}, so müßte

$$3x_3 + \ldots + (n-2)x_{n-2} + 3(n-1) = 6n - 12$$

oder

$$3x_3 + \ldots + (n-2)x_{n-2} \qquad\qquad = 3(n-3)$$

sein, woraus wegen $x_3 + \ldots + x_{n-2} = n - 3$ notwendig folgen würde, daß die $n - 3$ übrigen Ecken unseres P_n sämtlich von der 3. Ordnung wären. Da nun eine E_{n-1} mit allen übrigen $n - 1$ Ecken benachbart (d. h. durch eine Kante verbunden) ist, so müßten die drei E_{n-1} die Ecken eines Kantendreiecks bilden und von den übrigen $n - 3$ ($\geqq 3$) Ecken wären dann auch mindestens zwei einander benachbart. Das ist aber unmöglich, da aus dem Konstruktionsprinzip sofort folgt, daß bei einem P_n mit $n > 4$ niemals zwei E_3 einander benachbart sein können.

Tübingen, den 10. Oktober 1926.

(Eingegangen am 10. Oktober 1926.)

Bestimmung der Flächen, deren D-Linien gleichzeitig Böschungslinien sind.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Unter den „*Böschungslinien*“ oder, wie man auch sagt, „allgemeinen Schraubenlinien“ einer Fläche versteht man die Flächenkurven, deren Tangenten mit einer festen „Vertikalrichtung“ einen festen Winkel α einschließen. Für alle α, aber für dieselbe Vertikale, erhält man auf jeder Fläche, die keine Horizontalebene ist, bei gehörigen Regularitätsannahmen eine zweiparametrige Schar von Böschungslinien. Eine zweiparametrige Kurvenschar auf der Fläche bilden auch deren 1871 von G. Darboux eingeführte „*D-Linien*“, die dadurch gekennzeichnet sind, daß ihre Schmiegkugeln die Fläche jeweils im Kurvenpunkt berühren[1]). Herr H. Keiler hat kürzlich bemerkt[2]), daß auf jedem Drehellipsoid mit vertikaler Drehachse die D-Linien mit den Böschungslinien zusammenfallen und dasselbe gilt auch für die anderen Drehflächen zweiter Ordnung mit vertikaler Drehachse. Ich möchte hier umgekehrt zeigen: *Die Drehflächen zweiter Ordnung mit vertikaler Drehachse sind die einzigen Flächen, auf denen Böschungslinien und D-Linien zusammenfallen. Dazu kommen als Grenzfall noch die parabolischen Zylinder mit horizontaler Symmetrieebene. Auszuschließen sind hingegen die Kugeln.*

Legt man ein rechtwinkliges Achsenkreuz so, daß die x_1- und x_2-Achsen im Ursprung die Krümmungslinien einer Fläche an dieser Stelle berühren, so nimmt die Reihenentwicklung der Flächengleichung die Gestalt an

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{2}(k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2) \\ &\quad + \frac{1}{6}(k_{11} x_1^3 + 3k_{12} x_1^2 x_2 + 3k_{21} x_1 x_2^2 + k_{22} x_2^2) + \dots . \end{aligned}$$

[1]) Literaturangaben in der Enzyklopädie III D, 3, **39**, S. 181–182.

[2]) H. Keiler, D-Linien und L-Linien auf Ellipsoiden, Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 1927.

Darin sind k_1 und k_2 die Hauptkrümmungen im Ursprung, während, wie E. Beltrami 1866 (Opere I, S. 297) bemerkt hat, die Koeffizienten der kubischen Glieder mit den Ableitungen der Hauptkrümmungen so zusammenhängen:

$$(2) \qquad k_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1} k_1, \qquad k_{12} = \frac{\partial}{\partial x_2} k_1, \qquad k_{21} = \frac{\partial}{\partial x_1} k_2, \qquad k_{22} = \frac{\partial}{\partial x_2} k_2.$$

Nach der Erklärung der D-Linien schneiden die Berührungskugeln

$$(3) \qquad x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - h)^2 = h^2$$

aus unserer Fläche Kurven aus, die im Ursprung Doppelpunkte haben und deren beide Zweige hier die durchlaufenden D-Linien in zweiter Ordnung berühren. Aus (1) und (3) folgt für die Schnittkurve

$$(4) \qquad \frac{x_1^2 + x_2^2}{h} = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \frac{1}{3}(k_{11} x_1^3 + \ldots) + \ldots .$$

Stellt man jeden ihrer Zweige mittels eines Parameters ϱ dar, so finden wir Entwicklungen von der Gestalt

$$(5) \qquad x_1 = \varrho \cos\varphi + \frac{1}{2}\varrho^2 \alpha + \ldots, \qquad x_2 = \varrho \sin\varphi + \frac{1}{2}\varrho^2 \beta + \ldots .$$

Soll ϱ insbesondere die Bogenlänge sein, so gibt die Forderung $x_1'^2 + x_2'^2 = 1$ die Bedingung $\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi = 0$, so daß wir setzen können

$$(6) \qquad \alpha = -\tau \sin\varphi, \qquad \beta = +\tau \cos\varphi.$$

Durch Einsetzen in (4) und Koeffizientenvergleichung gewinnen wir neben der bekannten Gleichung Eulers

$$(7) \qquad \frac{1}{h} = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi$$

für τ den Wert

$$(8) \qquad \tau = \frac{1}{3} \frac{k_{11} \cos^3\varphi + 3 k_{12} \cos^2\varphi \sin\varphi + 3 k_{21} \cos\varphi \sin^2\varphi + k_{22} \sin^3\varphi}{(k_1 - k_2) \sin\varphi \cos\varphi}.$$

Für unsere Schnittkurven

$$(9) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \varrho \cos\varphi - \frac{1}{2}\varrho^2 \tau \sin\varphi + \ldots, \\ x_2 &= \varrho \sin\varphi + \frac{1}{2}\varrho^2 \tau \cos\varphi + \ldots, \\ x_3 &= \frac{1}{2}\varrho^2 (k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi) + \ldots \end{aligned}$$

ergibt sich daraus durch zweimalige Ableitung nach ϱ als Richtung ihrer Hauptnormalen im Ursprung

$$(10) \qquad x_1'' = -\tau \sin\varphi \qquad x_2'' = +\tau \cos\varphi, \qquad x_3'' = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi.$$

Sollen nun die D-Linien Böschungslinien sein, so müssen ihre Hauptnormalen zur festen Vertikalrichtung v_1, v_2, v_3 orthogonal sein[3]). Diese Forderung $x_1'' v_1 + x_2'' v_2 + x_3'' v_3 = 0$ gibt aber für τ die neue Gleichung

$$\tau = v_3 \frac{k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi}{v_1 \sin\varphi - v_2 \cos\varphi}. \tag{11}$$

Haben wir nicht den trivialen Fall einer Horizontalebene vor uns, so sind v_1 und v_2 nicht gleichzeitig Null und (11) hat daher einen Sinn. Bedenken wir ferner: Die Kugeln und Ebenen sind bekanntlich[4]) die einzigen Flächen, auf denen identisch $k_1 = k_2$ ist. Diese kommen aber als Lösung unserer Aufgabe nicht in Frage, wenn wir wieder Horizontalebenen ausschließen, da auf ihnen zwar jede Kurve als D-Linie, aber nicht jede als Böschungslinie angesehen werden kann. Es bedeutet somit keine wesentliche Einschränkung, wenn wir $k_1 \neq k_2$ nehmen, so daß auch in (8) der Nenner nicht identisch Null wird.

Jetzt haben wir daraus, daß (8) und (11) für alle φ übereinstimmen sollen, Folgerungen zu ziehen.

Aus dem Bruch in (8) muß sich entweder $\cos\varphi$ oder $\sin\varphi$ wegheben. Wir können, indem wir vielleicht die x_1- und x_2-Achse vertauschen, annehmen, es hebe sich der $\cos\varphi$ weg. Dann ist

$$k_{12} = k_{22} = 0 \quad \text{und} \quad v_2 = 0. \tag{12}$$

Ferner

$$3 k_1 k_{21} - k_2 k_{11} = 0. \tag{13}$$

Nennen wir die Parameter, die zu den Krümmungslinien unserer Fläche gehören, u, v, und zwar soll die Krümmungslinie, auf der sich u ändert, die Krümmung k_1 besitzen, so folgt aus $k_{12} = k_{22} = 0$, daß k_1 und k_2 wegen (2) nur von u, nicht von v abhängen. Somit gibt (13) die Differentialgleichung

$$3 k_1 k_2' - k_2 k_1' = 0, \tag{14}$$

aus der durch Integration

$$k_2^3 = c\, k_1 \tag{15}$$

folgt.

Diese Formeln lassen sich aber leicht geometrisch deuten. Weil k_2 nur von u abhängt, also längs der v-Linien fest bleibt, sind diese v-Linien Kreise und unsere Fläche ist eine Kanalfläche, deren Berührungskugeln sie längs dieser Kreise berühren. Aus (12) $v_2 = 0$ folgt aber, daß diese Kreise

[3]) Vgl. etwa W. Blaschke, Differentialgeometrie I, Berlin 1924, S. 24 (130).
[4]) Vgl. ebenda § 38, S. 64.

in Horizontalebenen liegen. Somit ist unsere Fläche eine Drehfläche mit vertikaler Drehachse. Für $c = 0$ und somit $k_2 = 0$ ergeben sich als Grenzfall Zylinder mit horizontalen Erzeugenden.

Bleiben wir zuerst beim Fall der Drehflächen $c \neq 0$! Zur Bestimmung des Meridians nehmen wir dann die Drehachse als x-Achse eines rechtwinkligen x, y-Achsenkreuzes und finden

$$k_1 = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}, \qquad k_2 = \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}}. \tag{16}$$

Aus (15) folgt somit

$$y^3 y'' = \frac{1}{c} \tag{17}$$

und daraus

$$y^2 = \alpha + 2\beta x + \gamma x^2, \qquad \alpha\gamma - \beta^2 = \frac{1}{c}. \tag{18}$$

Wir finden also tatsächlich Drehflächen zweiter Ordnung, insbesondere für $c = \infty$ Drehkegel.

Es ist nun noch der Fall $k_2 = 0$ der Zylinder mit horizontalen Erzeugenden zu besprechen. Wir finden dann durch den Vergleich von (8) und (11) neben $v_2 = k_{12} = k_{21} = k_{22} = 0$ noch die Beziehung

$$v_1 k_{11} - 3 v_3 k_1^2 = 0. \tag{19}$$

Nehmen wir eine Normalebene der Zylindererzeugenden als x, y-Ebene, so gibt (19) bei vertikaler x-Achse

$$\frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\frac{1}{k_1} - 3\frac{dy}{ds} = 0, \tag{20}$$

oder ausgerechnet $y''' = 0$. Somit wird y ein quadratisches Polynom in x, d. h. wir erhalten tatsächlich parabolische Zylinder mit horizontaler Symmetrieebene.

Daß die gefundenen Drehflächen und Zylinderflächen zweiter Ordnung wirklich Lösungen unserer Aufgabe sind, kann man aber leicht bestätigen.

Von den gefundenen Böschungslinien habe ich früher merkwürdige Eigenschaften angegeben[5]).

Hamburg, im Januar 1927.

---

[5]) W. Blaschke, Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien, Monatshefte 19 (1908), S. 188–204. Vgl. auch meine Differentialgeometrie I, §§ 16, 17, S. 25, 26.

(Eingegangen am 13. Januar 1927.)

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

Einleitung.

Es sei $k \geqq 5$ ganz; $Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$ sei eine positiv definite quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten (d. h. $a_{\mu\mu}$ und $2a_{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ seien ganz) und mit der Determinante D. Ich setze

$$M = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{2\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}; \qquad G(n) = \sum_{Q(m)=n} 1 \quad (n \geqq 0 \text{ ganz});$$

$$F(x) = \sum_{n \leqq x} G(n) \quad (x \geqq 0).$$

Es ist also $G(0) = 1$, und für ganzes $n > 0$ ist $G(n)$ gleich der Anzahl der Gitterpunkte auf der Oberfläche des Ellipsoids $Q(u) = n$.

Nach den Herren Walfisz und Landau[1]) ist

$$F(x) = \frac{4M}{k} x^{\frac{k}{2}} + \mathsf{P}(x),$$

wo

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

Daraus folgt für ganzes $n > 0$

$$G(n) = F(n) - F(n-1) = O\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right). \tag{1}$$

Nichttriviale Abschätzungen von $\mathsf{P}(x)$ nach unten haben die Herren

[1]) A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. 19 (1924), S. 300–307; E. Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 126–132.

Landau, Müntz und Walfisz angegeben[2]). Insbesondere lautet das Hauptresultat des Herrn Müntz:

$$F(n) - 2M\sum_{m=1}^{n} m^{\frac{k}{2}-1} = \frac{\Omega_R}{\Omega_L}\left(n^{\frac{k-1}{4}}\right), \tag{2}$$

wenn n über natürliche Zahlen läuft. Darin ist speziell enthalten:

B_1. *Für jedes $\mu < M$ ist jede der beiden Ungleichungen*

$$P(n) > \mu n^{\frac{k}{2}-1}, \quad P(n-0) < -\mu n^{\frac{k}{2}-1} \tag{3}$$

für unendlich viele natürliche Zahlen n erfüllt[3]).

Ich will in dieser Note folgenden Satz beweisen ($c_1, c_2, \ldots, c_1', c_2', \ldots$ sollen positive Konstanten bedeuten, die nur von der Form $Q(u)$ abhängen):

Satz 1. *Es gibt eine positive Konstante c_5, so daß jede der beiden Ungleichungen*

$$P(n) > (M + c_5) n^{\frac{k}{2}-1}, \quad P(n) < (M - c_5) n^{\frac{k}{2}-1}$$

für unendlich viele natürliche Zahlen n erfüllt ist.

Wegen der trivialen asymptotischen Gleichung[3])

$$P(n-1) - P(n-0) \sim 2Mn^{\frac{k}{2}-1} \tag{4}$$

folgt aus Satz 1 sofort der

Satz 2. *Für jedes $\varepsilon > 0$ ist jede der beiden Ungleichungen*

$$P(n-0) > (-M + c_5 - \varepsilon) n^{\frac{k}{2}-1}, \quad P(n-0) < -(M + c_5 - \varepsilon) n^{\frac{k}{2}-1}$$

für unendlich viele natürliche Zahlen n erfüllt.

Diese beiden Sätze sagen mehr aus, als der Satz des Herrn Müntz[3]).

Mein Beweis des Satzes 1 beruht auf einer Kombination eines Landauschen Kunstgriffes[4]) mit dem Beweis von B_1, wie ihn Herr Walfisz[5]) geführt hat.

---

[2]) E. Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, zweite Abhandlung, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 299–310; Ch. H. Müntz, Zur Gittertheorie n-dimensionaler Ellipsoide, Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 150–165; Ch. H. Müntz, Über den Gebrauch willkürlicher Funktionen in der analytischen Zahlentheorie. I. Sitzungsber. der Berl. Math. Gesellsch. 24, 2 (1925), S. 81–93; A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, zweite Abhandlung, Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 106–124.

[3]) Vgl. Walfisz, loc. cit. [2]), S. 108–109.

[4]) Loc. cit. [2]), § 4, 3.

[5]) Loc. cit. [2]), Satz 1.

§ 1.

Hilfssätze.

Hilfssatz 1[6]). *Es gibt drei positive Konstanten c_1, c_2, c_3, so daß für jedes ganze $x > c_1$ die Ungleichung*

$$\left| G(n) - 2Mn^{\frac{k}{2}-1} \right| > c_2 n^{\frac{k}{2}-1}$$

für mindestens $c_3 x$ ganze Zahlen n mit $0 < n \leqq x$ erfüllt ist.

Beweis. Es sei $N = 2^k D + 1$, also N ganz. r sei eine ganze Zahl. Es bedeute L_r die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$Q(m_1, m_2, \ldots, m_k) \equiv r \pmod N$$

im Würfel $0 \leqq m_\nu < N$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$; dann ist offenbar

$$\sum_{\substack{0 < Q(m) \leqq x \\ Q(m) \equiv r \pmod N}} 1 = \frac{4 L_r M}{k N^k} x^{\frac{k}{2}} + o\left(x^{\frac{k}{2}}\right). \tag{5}$$

Ich wähle $c_1 > 1$ so groß, daß das eben aufgeschriebene Glied $o\left(x^{\frac{k}{2}}\right)$ absolut genommen kleiner sei als

$$\frac{M x^{\frac{k}{2}}}{k N^k}$$

für alle $x > c_1$ und alle ganzen r; weiter sei c_1 noch so groß, daß

$$\left| \sum_{\substack{0 < n \leqq x \\ n \equiv r \pmod N}} n^{\frac{k}{2}-1} - \frac{2}{kN} x^{\frac{k}{2}} \right| < \frac{1}{2kN^k} x^{\frac{k}{2}} \tag{6}$$

für alle $x > c_1$ und alle ganzen r. Es sei endlich

$$c_2 = \frac{M}{k N^k}, \qquad c_3 = \frac{M}{c_4 k N^k}, \tag{7}$$

wo c_4 eine (nach (1) vorhandene) Zahl ist, für welche

$$\left| G(n) - 2Mn^{\frac{k}{2}-1} \right| < c_4 n^{\frac{k}{2}-1}$$

für alle ganzen $n > 0$.

Wäre nun die Behauptung falsch, so würde es ein ganzes $x_0 > c_1$ geben, so daß

$$\left| G(n) - 2Mn^{\frac{k}{2}-1} \right| \leqq c_2 n^{\frac{k}{2}-1}$$

für wenigstens $(1 - c_3) x_0$ ganze n der Strecke $0 < n \leqq x_0$. Es wäre also für jedes ganze r

[6]) Vgl. Landau, loc. cit. [2]), § 4, 3.

$$(8)\qquad \sum_{\substack{0<n\leqq x_0\\ n\equiv r \pmod N}} G(n) = \sum_{\substack{0<Q(m)\leqq x_0\\ Q(m)\equiv r}} 1 = \sum_{\substack{0<n\leqq x_0\\ n\equiv r}} 2M n^{\frac{k}{2}-1} + \theta\left(c_2 \sum_{n=1}^{x_0} n^{\frac{k}{2}-1} + c_4 x_0^{\frac{k}{2}-1}\cdot c_3 x_0\right),$$

wo $|\theta| \leqq 1$. Aus (5), (6), (7), (8) würde folgen

$$\left|\frac{4L_r M}{kN^k} - \frac{4M}{kN}\right| < \frac{2M}{2kN^k} + \frac{M}{kN^k} + c_2 + c_3 c_4, \qquad |L_r - N^{k-1}| < 1;$$

also

$$L_r = N^{k-1}.$$

Daraus würde sich aber ein Widerspruch ergeben, genau wie bei Landau, loc. cit. [2]), S. 308 Zeile 10 bis S. 309 Zeile 5 (sein M ist durch N zu ersetzen).

Hilfssatz 2. *Es gibt drei positive Konstanten c_1', c_2', c_3', so daß für jedes ganze $x > c_1'$ jede der beiden Ungleichungen*

$$G(n) > 2Mn^{\frac{k}{2}-1} + c_2' n^{\frac{k}{2}-1},$$
$$G(n) < 2Mn^{\frac{k}{2}-1} - c_2' n^{\frac{k}{2}-1}$$

für mindestens $c_3' x$ ganze Zahlen n mit $0 < n \leqq x$ erfüllt ist.

Beweis. Es ist bei wachsendem ganzen x

$$\sum_{n=1}^{x} G(n) \sim \frac{4M}{k} x^{\frac{k}{2}} \sim 2M \sum_{n=1}^{x} n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Wir wählen zunächst $c_2' < c_2$, $c_3' < c_3$ so, daß

$$-a = c_2' + c_3' c_4 - c_2 \frac{(c_3 - c_3')^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}-1} k} < 0.$$

Dann wählen wir $c_1' > c_1$ so, daß für alle ganzen $x > c_1'$ gilt

$$(9)\qquad (c_3 - c_3')\, x > 2, \qquad \left|\sum_{n=1}^{x} G(n) - \sum_{n=1}^{x} 2Mn^{\frac{k}{2}-1}\right| < a x^{\frac{k}{2}}.$$

Wir beweisen den auf das Auftreten der ersten Ungleichung bezüglichen Teil der Behauptung; der zweite Teil läßt sich ganz analog beweisen.

Gesetzt, der erste Teil der Behauptung sei falsch; dann würde es ein ganzes $x_0 > c_1'$ geben (also $x_0 > c_1$), so daß

$$G(n) \leqq 2Mn^{\frac{k}{2}-1} + c_2' n^{\frac{k}{2}-1}$$

für wenigstens $(1 - c_3')\, x_0$ ganze n der Strecke $0 < n \leqq x_0$.

Es ist aber nach Hilfssatz 1

$$\left| G(n) - 2Mn^{\frac{k}{2}-1} \right| > c_2 n^{\frac{k}{2}-1}$$

für mindestens $c_3 x_0$ ganze n mit $0 < n \leqq x_0$, also wäre (wegen $c_2' < c_2$)

$$G(n) < 2Mn^{\frac{k}{2}-1} - c_2 n^{\frac{k}{2}-1}$$

für wenigstens $(c_3 - c_3')\, x_0$ ganze n mit $0 < n \leqq x_0$. Für alle ganzen $n > 0$ ist endlich

$$G(n) < 2Mn^{\frac{k}{2}-1} + c_4 n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Also wäre

$$\sum_{n=1}^{x_0} G(n) < \sum_{n=1}^{x_0} 2Mn^{\frac{k}{2}-1} + c_2' \sum_{n=1}^{x_0} n^{\frac{k}{2}-1} + c_3' x_0 c_4 x_0^{\frac{k}{2}-1} - c_2 \sum_{n=1}^{[(c_3-c_3')x_0]} n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Wegen $(c_3 - c_3')\, x_0 > 2$ ist aber

$$\sum_{n=1}^{[(c_3-c_3')x_0]} n^{\frac{k}{2}-1} > \int_0^{[(c_3-c_3')x_0]} u^{\frac{k}{2}-1}\, du > \frac{(c_3-c_3')^{\frac{k}{2}}}{k\, 2^{\frac{k}{2}-1}} x_0^{\frac{k}{2}};$$

es wäre also

$$\sum_{n=1}^{x_0} G(n) < \sum_{n=1}^{x_0} 2Mn^{\frac{k}{2}-1} + \left(c_2' + c_3' c_4 - c_2 \frac{(c_3-c_3')^{\frac{k}{2}}}{k\, 2^{\frac{k}{2}-1}} \right) x_0^{\frac{k}{2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{x_0} 2Mn^{\frac{k}{2}-1} - a x_0^{\frac{k}{2}},$$

was mit (9) im Widerspruch steht.

§ 2.

Beweis des Satzes 1.

Ich beweise nur den auf das Auftreten der Ungleichung

$$\mathsf{P}(n) > (c_5 + M)\, n^{\frac{k}{2}-1}$$

bezüglichen Teil der Behauptung. Den zweiten Teil der Behauptung kann man ganz analog beweisen.

Es sei $c_6 = \frac{1}{4} c_2' c_3'^{\frac{k}{2}}$. Wäre der erste Teil der Behauptung falsch, so wäre für alle ganzen $n \geqq c_6$

$$\mathsf{P}(n) \leqq (c_5 + M)\, n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Weiter ist

$$\mathsf{P}(n) - \mathsf{P}(n-1) = G(n) - 2Mn^{\frac{k}{2}-1} + o\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

Nach Hilfssatz 2 gibt es zu jedem ganzen $x > c_1'$ mindestens $c_3' x$ ganze n mit

$$0 < n \leqq x, \quad G(n) < 2M n^{\frac{k}{2}-1} - c_2' n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Es wäre daher für jedes ganze x mit $x > c_4'$ die Ungleichung

$$\mathsf{P}(n) \leqq \left(M + c_5 - \frac{c_2'}{2}\right) n^{\frac{k}{2}-1}$$

für mindestens $c_3' x - c_5'$ ganze n der Strecke $c_6' \leqq n \leqq x$ erfüllt. Es ist aber[7]) für natürliche m

$$\int_m^{m+1} \mathsf{P}(u)\,du = \mathsf{P}(m) - M m^{\frac{k}{2}-1} + o\left(m^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

Es wäre daher für $x > 1$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \mathsf{P}(u)\,du &= \sum_{m=0}^{[x]-1} \int_m^{m+1} \mathsf{P}(u)\,du + \int_{[x]}^x \mathsf{P}(u)\,du \\
&= \sum_{m=0}^{[x]-1} \left(\mathsf{P}(m) - M m^{\frac{k}{2}-1} + o\left(m^{\frac{k}{2}-1}\right)\right) + O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \\
&\leqq c_5 \sum_{m=0}^{[x]-1} m^{\frac{k}{2}-1} - \frac{c_2'}{2} \sum_{m=0}^{[c_3'[x]-c_5']} m^{\frac{k}{2}-1} + o\left(x^{\frac{k}{2}}\right) \\
&\sim \frac{2}{k}\left(c_5 - \frac{c_2' c_3'^{\frac{k}{2}}}{2}\right) x^{\frac{k}{2}} = -\frac{c_2' c_3'^{\frac{k}{2}}}{2k} x^{\frac{k}{2}},
\end{aligned}$$

also

$$\int_0^x \mathsf{P}(u)\,du \leqq -\frac{2c_5}{k} x^{\frac{k}{2}} + o\left(x^{\frac{k}{2}}\right). \tag{10}$$

Es sei nun

$$\mathsf{P}^{(0)}(x) = \mathsf{P}(x), \qquad \mathsf{P}^{(\gamma+1)}(x) = \int_0^x \mathsf{P}^{(\gamma)}(u)\,du \quad (\gamma \geqq 0 \text{ ganz}).$$

Aus (10) würde folgen

$$\mathsf{P}^{(k)}(x) \leqq -\frac{c_5}{\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{k}{2}+k-1\right)} x^{\frac{k}{2}+k-1} + o\left(x^{\frac{k}{2}+k-1}\right),$$

was mit dem bekannten[7]) Ergebnis

$$\mathsf{P}^{(k)}(x) = O\left(x^{\frac{3k-1}{4}}\right)$$

wegen $\frac{3k-1}{4} < \frac{3k}{2} - 1$ im Widerspruch steht.

---

[7]) Vgl. Walfisz, loc. cit. [2]), S. 110.

Bemerkungen.

1. Aus unseren Sätzen folgen freilich sofort analoge Sätze für Formen mit nur rationalen Koeffizienten.

2. Die linke Seite der Müntzschen Gleichung (2) ist gleich

$$P(n) - M n^{\frac{k}{2}-1} + O\left(n^{\frac{k}{2}-2}\right);$$

unser Satz erlaubt also, den Exponenten $\frac{k-1}{4}$ auf der rechten Seite dieser Gleichung durch $\frac{k}{2}-1$ zu ersetzen.

3. Wir wollen noch zusehen, welche untere Abschätzungen von $P(n)$ trivial sind. Es ist

$$F(x) = \sum_{n \leqq x} G(n) \sim \frac{4M}{k} x^{\frac{k}{2}};$$

daher ist bei jedem $\mu < M$ für unendlich viele natürliche n

$$P(n) - P(n-0) = G(n) > 2\mu n^{\frac{k}{2}-1};$$

es ist also trivial, daß *mindestens eine* von den beiden Ungleichungen (3) für unendlich viele natürliche n erfüllt ist. Diese Aussage hört aber auf, trivial zu sein, wenn $\mu \geqq M$ gewählt wird.

4. Das wesentliche Ergebnis dieser Note lautet folgendermaßen: Es gibt ein $c_7 > M$, so daß jede der beiden Ungleichungen

$$P(n) > c_7 n^{\frac{k}{2}-1}, \qquad P(n-0) < -c_7 n^{\frac{k}{2}-1}$$

für unendlich viele natürliche n erfüllt ist. Daß *mindestens eine* von diesen Ungleichungen unendlich oft erfüllt ist, hat eigentlich implizite schon Herr Landau [8]) gezeigt. Er hat nämlich gezeigt, daß die Gleichung

$$G(n) = 2M n^{\frac{k}{2}-1} + o\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right)$$

falsch ist; es ist aber

$$P(n) - P(n-1) = G(n) - 2M n^{\frac{k}{2}-1} + o\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right);$$

es kann daher nicht

$$P(n) = M n^{\frac{k}{2}-1} + o\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right)$$

sein. Es gibt daher eine Konstante $c_8 > 0$, so daß mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$P(n) > (M + c_8) n^{\frac{k}{2}-1}, \qquad P(n) < (M - c_8) n^{\frac{k}{2}-1}$$

unendlich oft erfüllt ist. Aus der letzteren Ungleichung folgt aber wegen (4)

$$P(n-0) < -\left(M + \frac{c_8}{2}\right) n^{\frac{k}{2}-1},$$

wenn $n > c_9$.

---

[8]) Loc. cit. [2]), § 4, 3.

(Eingegangen am 4. Mai 1927.)

Über einige Eigenschaften der einfachen stetigen Kurven.

Teil I.

Von

Georg Feigl in Berlin.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.
§ 1. Bezeichnungen.
§ 2. Geradlinig erreichbare Punkte.
§ 3. Anwendungen der geradlinigen Erreichbarkeit.
§ 4. Die durch zwei punktfremde geschlossene einfache Kurven bestimmten Gebiete.
§ 5. Ein aus drei einfachen Bogen gebildetes Kurvensystem.
§ 6. Die Erreichbarkeit.
§ 7. Die Ergänzung des einfachen Bogens zu einer geschlossenen einfachen Kurve.

Einleitung.

Unter den zahlreichen Beweisen des Jordanschen Kurvensatzes[1]) sind diejenigen besonders hervorzuheben, die mit der *Ordnung eines Punktes in bezug auf eine stetige Kurve* operieren, weil es sich bei diesem Begriff um einen Spezialfall des von L. E. J. Brouwer entdeckten Abbildungs-

---

[1]) Bezüglich der Literatur sei auf den Enzyklopädieartikel von A. Rosenthal, Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen, II C 9, S. 916/17, hingewiesen. Dort noch nicht aufgeführt sind die Beweise von:

F. Hartogs, Beweis des Jordanschen Kurvensatzes, Math. Zeitschrift 22 (1925), S. 62—74;

B. v. Kerékjártó, Math.-naturw. Berichte der Ungar. Akad. d. Wiss. 38 (1919), S. 194—198; Vorlesungen über Topologie I, Berlin 1923, S. 59—64;

E. Schmidt (s. Fußnote [6]));

A. Schoenflies, Über das eineindeutige und stetige Abbild des Kreises, Jahresbericht der D.M.V. 33 (1924), S. 147—160.

grades[2]) handelt, der für die Beantwortung sehr vieler Fragen der Topologie das weitaus wichtigste Hilfsmittel bildet, und weil diese Beweise den entsprechenden Satz für Polygone nicht vorauszusetzen brauchen[3]). Beweise des Jordanschen Kurvensatzes, die sich der Ordnung eines Punktes in bezug auf eine stetige Kurve bedienen, sind u. a. die von A. Schoenflies[4]), J. Hadamard[5]) und Erhard Schmidt[6]), von denen nur der letztere vollständig und ohne einschränkende Voraussetzung durchgeführt ist.

Da die vorliegende Arbeit sich an den Schmidtschen Beweis anschließen wird, sei dessen Gang hier kurz skizziert; er gliedert sich, abgesehen von einem vorbereitenden, die Eigenschaften der Ordnung herleitenden Paragraphen, in drei Abschnitte: Im ersten wird der Nachweis geführt, daß die geschlossene einfache Kurve[7]) die Ebene in mindestens

---

[2]) L. E. J. Brouwer, Über die Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen **71** (1912), S. 97—115. Der von Brouwer für den Jordanschen Kurvensatz gegebene Beweis, Math. Annalen **69** (1910), S. 169—175, setzt den Polygonsatz voraus. Der Brouwersche Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum, Math. Annalen **71**, S. 314—319, operiert mit der Theorie des Abbildungsgrades; die Ordnung in bezug auf eine n-dimensionale Jordansche Mannigfaltigkeit als spezieller Abbildungsgrad wird erst später (Über Jordansche Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen **71**, S. 320—327) untersucht.

[3]) Die übrigen Beweise, mit Ausnahme desjenigen von O. Veblen, Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905), S. 92—98, operieren mit Hilfe von Polygonen und setzen den Satz für das Polygon voraus.

[4]) A. Schoenflies, Über einen Satz aus der Analysis situs, Göttinger Nachrichten 1896, S. 79—89. Der Beweis beschränkt sich, ebenso wie die Beweise von Ames und Bliss, auf Kurven, die aus endlich vielen differenzierbaren Stücken bestehen, deren Tangente sich stetig und monoton ändert. Die beiden den Polygonsatz verwendenden Beweise von Schoenflies [Bemerkung zur Analysis situs, Math. Annalen **68** (1910), S. 435—444 und Fußnote [1])] gelten dagegen allgemein.

[5]) J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable 2, 2e éd., 1910. Note de J. Hadamard: Sur quelques applications de l'indice de Kronecker, § 1, p. 437—440. Hadamard beweist nur einen Teil des Satzes, nämlich die Existenz eines Punktes mit von Null verschiedener Ordnung.

[6]) E. Schmidt, Über den Jordanschen Kurvensatz, Berliner Sitzungsber., phys.-math. Klasse, 1923, S. 318—329. Im folgenden als E. S. zitiert.

[7]) Unter einfachen Kurven sind im folgenden stets einfache stetige Kurven zu verstehen. Eine geschlossene einfache Kurve (in dieser Arbeit kurz als g. e. K. bezeichnet) ist also das topologische (d. h. eineindeutige stetige) Bild des Kreises $x^2+y^2=1$, ein einfacher Bogen (im folgenden als e. B. bezeichnet) das topologische Bild des abgeschlossenen Intervalls $\langle 0,1\rangle$. Der Name Jordansche Kurven (g. e. K. = geschlossene Jordansche Kurve; e. B. = Jordanbogen) soll hier überhaupt vermieden werden, da im Gegensatz zu dem bisher üblichen, auch im Enzyklopädieartikel von Rosenthal bestätigten Sprachgebrauch in einem Teil der neueren Literatur, z. B. durchweg in den Fundamenta Mathematicae, ferner bei K. Menger (Math. Annalen **95**), T. Ważewski (Ann. de la Soc. Polon. de Math. 2) u. a., die stetige, nicht notwendig einfache Kurve als Jordansche Kurve (courbe de Jordan, ligne de Jordan) bezeichnet wird.

zwei Komponenten zerlegt; da die Existenz von Punkten mit der Ordnung Null unmittelbar aus den Eigenschaften der Ordnung folgt[8]), so ist zu diesem Nachweis nur die Konstruktion eines Punktes mit von Null verschiedener Ordnung erforderlich. Im zweiten Abschnitt wird bewiesen, daß je zwei Punkte mit der Ordnung Null und ebenso je zwei Punkte mit von Null verschiedener Ordnung miteinander verbindbar sind. Aus beiden Abschnitten zusammen folgt, daß die g. e. K. die Ebene in genau zwei Komponenten zerlegt; die Komponente mit der Ordnung Null ist das Äußere, diejenige mit von Null verschiedener Ordnung das Innere, und zwar ist die Ordnung des Innern je nach der Wahl der Orientierung ± 1. Im zweiten Abschnitt wird die Tatsache benutzt, daß der einfache Bogen (e. B.) die Ebene nicht zerlegt; der Beweis dieser Tatsache wird im dritten Abschnitt nachgetragen.

Im ersten Teil meiner Arbeit sollen einige weitere, übrigens durchaus bekannte Eigenschaften der einfachen Kurven und zwar ausschließlich mit Hilfe der Ordnung hergeleitet werden. Nach Festsetzung einiger Bezeichnungen und Abkürzungen (§ 1) wird im § 2 bewiesen, daß die g. e. K. der gemeinsame Rand des Innern und des Äußern ist und daß die *geradlinig erreichbaren* Punkte auf der g. e. K. überall dicht liegen. Als Anwendungen werden einige häufig vorkommende Sätze über die g. e. K. (§ 3), die Zerlegung der Ebene durch zwei punktfremde g. e. K. (§ 4) und ein Satz über ein aus drei e. B. in spezieller Weise gebildetes Kurvensystem (§ 5) behandelt. Im § 6 wird der Satz von der *Erreichbarkeit*, den man Schoenflies[9]) verdankt, für die g. e. K. bewiesen; da das Beweisverfahren auf die Endpunkte eines e. B. übertragen werden kann, so ergibt sich auch der Satz, daß jeder e. B. sich zu einer g. e. K. ergänzen läßt (§ 7).

§ 1.

Bezeichnungen.

Eine Kurve (überhaupt jede Punktmenge) wird im folgenden durch einen deutschen, die Ordnung eines Punktes P in bezug auf diese Kurve durch den entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet; z. B.: Ordnung von P in bezug auf $\mathfrak{C}$ gleich $c(P)$. Hat ein e. B. $\mathfrak{B}$ die Endpunkte B_1, B_2, so wird das durch die Schreibweise $\mathfrak{B} = B_1 B_2$ angedeutet; die Reihenfolge der Endpunkte soll zugleich die Durchlaufung

[8]) Die g. e. K. $\mathfrak{C}$ ist als beschränkte Punktmenge ganz in einer Halbebene gelegen; jeder Punkt, der in bezug auf eine gerade Linie mit $\mathfrak{C}$ nicht derselben Halbebene angehört, hat in bezug auf $\mathfrak{C}$ die Ordnung Null.

[9]) A. Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, Teil II, Jahresbericht der D.M.V., Ergänzungsbd. 2 (1908) (im folgenden als Bericht II zitiert), S. 189/90; Math. Ann. 68, S. 439/40 (vgl. Fußnote [4])).

des e. B. angeben. Dagegen soll $\overline{B_1 B_2}$ die Länge der geradlinigen Strecke $B_1 B_2$ bedeuten. Wird der Bogen $\mathfrak{B}$ mit Ausschluß seiner Endpunkte genommen, so wird die Bezeichnung $\mathring{\mathfrak{B}}$ gebraucht. Sind auf $\mathfrak{B} = B_1 B_2$ die Punkte $D_1, D_2, \ldots, D_n$ gelegen, und zwar bei der Durchlaufung von B_1 nach B_2 in dieser Anordnung, so wird $\mathfrak{B} = B_1 D_1 D_2 \ldots D_n B_2$ geschrieben; enthält $\mathfrak{B}$ bei derselben Anordnung die Teilbögen $\mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2, \ldots, \mathfrak{j}_n$ $(\mathfrak{j}_\nu = D_{\nu 1} D_{\nu 2})$, so wird die Schreibweise $\mathfrak{B} = B_1 D_{11} \mathfrak{j}_1 D_{12} D_{21} \mathfrak{j}_2 D_{22} \ldots D_{n1} \mathfrak{j}_n D_{n2} B_2$ gebraucht. Die analogen Schreibweisen werden bei einer g. e. K. und auch bei nicht einfachen stetigen Kurven benutzt.

Der Durchschnitt zweier Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ wird als $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}$, die Vereinigungsmenge als $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}$, als $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ nur dann, wenn $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N} = 0$, d. h. die Nullmenge ist, bezeichnet [10]). Für einen Teil $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{M}$ wird $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{M}$, ebenso für einen Punkt P von $\mathfrak{M}$: $P \subset \mathfrak{M}$, für den zu $\mathfrak{T}$ komplementären Teil von $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} - \mathfrak{T}$ geschrieben. Für zwei Punkte P und Q, die in bezug auf eine ebene Punktmenge $\mathfrak{M}$ verbindbar bzw. getrennt sind, wird das Symbol

$$(1) \qquad \overset{P-Q}{\mathfrak{M}} \quad \text{bzw.} \quad \overset{P|Q}{\mathfrak{M}}$$

gebraucht. Als Weg PQ ist dabei zunächst ein e. B. mit den Endpunkten P und Q zu nehmen; ist $\mathfrak{M}$ eine stetige Kurve, so genügt es, statt des e. B. einen ebenen einfachen Polygonzug zu nehmen [11]). Die Symbole (1) haben folgende Eigenschaften:

(1^1) Aus $\overset{P-Q}{\mathfrak{M}}$ und $\overset{Q-R}{\mathfrak{M}}$ folgt $\overset{P-R}{\mathfrak{M}}$;

(1^2) aus $\overset{P-Q}{\mathfrak{M}}$ folgt $\overset{P-Q'}{\mathfrak{M}}$, wenn Q' ein Punkt des Weges PQ ist;

(1^3) aus $\overset{P-Q}{\mathfrak{M}}$ folgt $\overset{P-Q}{\mathfrak{M}'}$, aus $\overset{P|Q}{\mathfrak{M}'}$ folgt $\overset{P|Q}{\mathfrak{M}}$, wenn $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$;

(1^4) aus $\overset{P-Q}{\mathfrak{M}}$ und $\overset{P-Q}{\mathfrak{N}}$ folgt $\overset{P-Q}{\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}}$, wenn P und Q sich in bezug auf $\mathfrak{M}$ und in bezug auf $\mathfrak{N}$ durch denselben Weg verbinden lassen.

---

[10]) Diese Bezeichnungen benutzt C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig 1918.

[11]) E. S. S. 320. — Unter einem einfachen Polygonzug (kurz als e. P. bezeichnet) versteht man ein System von endlich vielen Strecken $C_1 C_2$, $C_2 C_3$, $\ldots$, $C_{n-1} C_n$, bei dem kein innerer Punkt einer Seite auf mehr als einer Seite liegt und bei dem durch keine Ecke mehr als zwei Seiten gehen.

Ist $\mathfrak{M}$ eine g. e. K. $\mathfrak{C}$, so folgt für die Ordnung c in bezug auf $\mathfrak{C}$:

(2) Aus $P \underset{\mathfrak{C}}{—} Q$: $c(P) = c(Q)$;

(2^1) aus $P \underset{\mathfrak{C}}{|} Q$: $c(P) \neq c(Q)$;

(2^2) aus $c(P) \neq 0$, $c(Q) \neq 0$: $c(P) = c(Q) = \pm 1$.

Ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige stetige Kurve, so bleibt im allgemeinen nur (2) bestehen. Unter den weiteren Eigenschaften der Ordnung[12]) ist die folgende hervorzuheben: Es seien $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ drei die Punkte A und B verbindende und auch sonst nicht notwendig punktfremde, stetige, nicht notwendig einfache Kurvenstücke, und es sei $\varkappa$, λ, μ eine zyklische Permutation der Indizes 1, 2, 3. Bedeutet $\mathfrak{U}_\varkappa$ die geschlossene stetige Kurve $A\,\mathfrak{S}_\lambda\,B\,\mathfrak{S}_\mu\,A$ und bedeutet $u_\varkappa$ die Ordnung in bezug auf $\mathfrak{U}_\varkappa$, so besteht zwischen den Ordnungen jedes Punktes P, der keinem der drei Kurvenstücke angehört, die Beziehung

$$u_1(P) + u_2(P) + u_3(P) = 0\,. \tag{3}$$

Versteht man unter einem Gebiet wie üblich eine offene, d. h. aus lauter inneren Punkten bestehende, zusammenhängende Punktmenge, so ist sowohl das Innere als auch das Äußere einer g. e. K. $\mathfrak{C}$ ein Gebiet; das Innere bzw. Äußere von $\mathfrak{C}$ möge im folgenden $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ bzw. $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ heißen. Einerseits lassen sich nämlich je zwei Punkte von $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ durch einen ganz in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ verlaufenden einfachen Polygonzug (e. P.) verbinden, und andererseits läßt sich um jeden Punkt von $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ eine Umgebung so angeben, daß sie ganz aus Punkten von $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ besteht. Ebenso verhält sich $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$. Ein beliebiges durch die g. e. K. $\mathfrak{C}$ bestimmtes Gebiet (also $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ oder $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$) soll $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ heißen.

(4) Unter einem Querschnitt[13])

$$(C_1\,C_2)_g^{\mathfrak{C}}$$

wird ein e. B. mit den Endpunkten C_1, C_2, der mit der g. e. K. $\mathfrak{C}$ nur die Punkte C_1 und C_2 gemein hat und sonst ganz dem Gebiet $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ angehört,

(4^1) unter einem Einschnitt

$$[G\,C]_g^{\mathfrak{C}}$$

---

[12]) E. S. § 1. E. Schmidt gebraucht statt des Wortes Ordnung das Wort Charakteristik und nimmt sie als das 2π-fache der Ordnung.

[13]) C. Carathéodory, Über die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Gebiets, Math. Annalen 73 (1913), S. 323—370. A. Winternitz [Über den Jordanschen Kurvensatz und verwandte Sätze der Analysis situs, Math. Zeitschrift 1 (1918), S. 329—340] gebraucht statt dessen das Wort Steg

ein e. B. mit den Endpunkten G, C verstanden, der mit $\mathfrak{C}$ nur den Punkt C gemein hat und sonst ganz $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ angehört.

In der Arbeit werden folgende Abkürzungen gebraucht:

g. e. K. = geschlossene einfache Kurve (geschlossene Jordansche Kurve, vgl. Fußnote [7]),
e. B. = einfacher Bogen (Jordanbogen, vgl. Fußnote [7]),
e. P. = einfacher ebener Polygonzug (vgl. Fußnote [11]),
e. S. = einfache ebene Streckenfolge (vgl. § 6).

§ 2.

Geradlinig erreichbare Punkte.

(5) *Auf der Peripherie jedes Kreises, der mit hinreichend kleinem Radius um einen vorgeschriebenen Punkt C einer g. e. K. $\mathfrak{C}$ geschlagen wird, liegt sowohl mindestens ein Punkt des Innern als auch mindestens ein Punkt des Äußern von $\mathfrak{C}$.*

Der Beweis (Fig. 1) werde für $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ gemeinsam, also für ein beliebiges durch $\mathfrak{C}$ bestimmtes Gebiet $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ geführt; G sei ein Punkt von $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$. Schlägt man um C den Kreis, dessen Peripherie mit $\mathfrak{k}$ bezeichnet werde, so möge, damit $\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{G} \neq 0$ ist, der Radius von $\mathfrak{k}$ kleiner als der Abstand $\overline{CG}$ und ferner so klein gewählt werden, daß $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{k}$ in mindestens zwei Punkten getroffen wird. Durchläuft man die Kurve $\mathfrak{C}$ von C aus in einem bestimmten Sinn und tritt dabei D_1 als erster, D_2 als letzter Schnittpunkt mit $\mathfrak{k}$ auf, so sind D_1 und D_2 gewiß voneinander verschieden, und es ist der Teilbogen $\mathfrak{b} = D_1 C D_2$ von $\mathfrak{C}$ mit Ausnahme der Endpunkte ganz in $\mathfrak{J}(\mathfrak{k})$ gelegen. Auf den zu $\mathfrak{b}$ komplementären Bogen $\mathfrak{b}^* = D_2 D_1$ von $\mathfrak{C}$, auf G und einen beliebigen auf $\mathfrak{k}$, aber nicht auf $\mathfrak{C}$ gelegenen Punkt P wende man den Satz vom e. B. [14]) an:

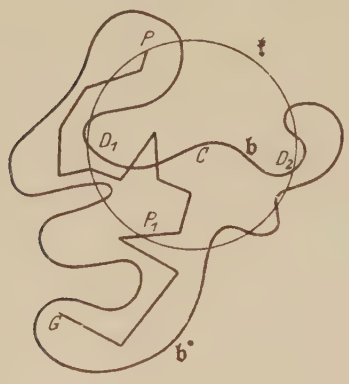


Fig. 1.

$$\begin{matrix} P\text{—}G \\ \mathfrak{b}^* \end{matrix}.$$

Ist P_1 der letzte Schnittpunkt des Weges PG mit $\mathfrak{k}$, so liegt das Stück $P_1 G$ des Weges mit Ausnahme von P_1 ganz in $\mathfrak{A}(\mathfrak{k})$; also:

$$\begin{matrix} P_1\text{—}G \\ \mathfrak{b} \end{matrix} \text{ und wegen } (1^2): \begin{matrix} P_1\text{—}G \\ \mathfrak{b}^* \end{matrix},$$

[14]) Der e. B. zerlegt die Ebene nicht; E. S. § 4.

folglich nach (1^4), da $\mathfrak{C} = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}^*$:

$$P_1 \underset{\mathfrak{C}}{—} G, \quad \text{d. h.:} \quad P_1 \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{C}).$$

Ist das Gebiet $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ speziell das Äußere von $\mathfrak{C}$, so braucht man den Radius von $\mathfrak{k}$ nicht zu beschränken.

Auf Grund von (5) ist jeder Punkt von $\mathfrak{C}$ Häufungspunkt sowohl für $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$ als auch für $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$. Nimmt man die Bemerkungen aus § 1 hinzu, so erhält man:

(6) *Eine g. e. K. bestimmt in der Ebene zwei Gebiete, das Innere und das Äußere, deren gemeinsamer Rand die g. e. K. selbst ist.*

Als Anwendung von (5) ergibt sich die folgende Konstruktion eines Einschnittes:

(7) *Vorgeschrieben*: $\varepsilon > 0$; eine g. e. K. $\mathfrak{C}$; $C \subset \mathfrak{C}$; $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$; $G \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{C})$.

Konstruierbar: *Ein Einschnitt* $[G C']_g^{\mathfrak{C}}$, *so daß* $\overline{C C'} < \varepsilon$ *ist, und zwar ist dieser Einschnitt ein e. P.*

Beweis. Man schlage um C den Kreis $\mathfrak{k}$, dessen Radius $\leqq \varepsilon$ ist und der Bedingung (5) genügt. Auf $\mathfrak{k}$ liegt ein Punkt $G_1 \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{C})$, der also mit G durch einen ganz in $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ verlaufenden e. P. $\mathfrak{P} = G G_1$ verbunden wird. Ist G_1' der erste Schnittpunkt von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{k}$ und ist C' der erste Schnittpunkt der Strecke $G_1' C$ mit $\mathfrak{C}$, so ist der e. P. $G \mathfrak{P} G_1' C'$ der gesuchte Einschnitt.

Ein Korollar zu (7) ist:

(8) *Vorgeschrieben*: $\varepsilon > 0$; eine g. e. K. $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$; $C_\nu \subset \mathfrak{C}$ $(\nu = 1, 2)$.

Konstruierbar: *Ein Querschnitt* $(C_1' C_2')_g^{\mathfrak{C}}$, *so daß* $\overline{C_\nu C_\nu'} < \varepsilon$ *ist, und zwar ist dieser Querschnitt ein e. P.*

Von einem Punkte C einer stetigen Kurve $\mathfrak{S}$ soll gesagt werden, er ist in einem Gebiet $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$ *geradlinig erreichbar*[15]), wenn man einen e. P. mit dem Endpunkt C so angeben kann, daß er mit Ausnahme von C ganz dem Gebiet $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$ angehört. Mit Hilfe dieser Terminologie ergibt sich aus (7):

(9) *Die geradlinig erreichbaren Punkte liegen auf jeder g. e. K. überall dicht.*

In einem Spezialfall kann man eine weitergehende Aussage machen:

---

[15]) Diese von F. Hausdorff (Grundzüge der Mengenlehre, 1. Aufl., Leipzig 1914, S. 347) stammende, von P. Urysohn [z. B. Fundamenta Math. 5 (1924), S. 337] u. a. übernommene Terminologie ist gebräuchlicher als die Ausdrücke „endlich erreichbar" (O. Veblen, loc. cit.) oder „einfach erreichbar".

(9¹) *Ist ein Stück $D_1 D_2$ der g. e. K. $\mathfrak{C}$ geradlinig, so ist jeder Punkt von $\mathfrak{C}$, der auf der Strecke $D_1 D_2$ zwischen D_1 und D_2 liegt, in jedem Gebiet $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ geradlinig erreichbar.*

Beweis. Ist C ein zwischen D_1 und D_2 auf der Strecke $D_1 D_2$ liegender Punkt, so hat C von dem zur Strecke $D_1 D_2$ komplementären Teilbogen $D_2 D_1$ von $\mathfrak{C}$ eine positive Entfernung. Schlägt man um C den Kreis $\mathfrak{k}$ mit einem Radius ϱ, der kleiner als diese Entfernung ist, so hat $\mathfrak{k}$ mit $\mathfrak{C}$ nur diejenigen Punkte E_1, E_2 der Strecke $D_1 D_2$ gemein, für die $\overline{CE}_1 = \overline{CE}_2 = \varrho$ ist. Also ist für jeden von E_1 und E_2 verschiedenen Punkt P des Kreises $\mathfrak{k}$ die Strecke PC mit Ausnahme von C frei von Punkten von $\mathfrak{C}$; ferner folgt aus (5), daß die Halbkreise $E_1 E_2$ von $\mathfrak{k}$ in bezug auf $\mathfrak{C}$ verschiedenen Gebieten angehören. Auf Grund dieser Bemerkungen ergibt sich die Richtigkeit von (9¹) nunmehr unmittelbar aus dem Beweis von (7).

§ 3.

Anwendungen der geradlinigen Erreichbarkeit.

Mit Hilfe von (7) und (8) lassen sich zwei häufig vorkommende Sätze über die g. e. K. beweisen:

(10) *Ein im Innern der g. e. K. $\mathfrak{C}$ verlaufender Querschnitt $\mathfrak{Q}$ bildet mit $\mathfrak{C}$ zwei g. e. K. $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ von folgender Beschaffenheit:*

I. $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C}_1)$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C}_2)$;

II. $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}_1) \cdot \mathfrak{J}(\mathfrak{C}_2) = 0$, $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}) - \mathring{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{J}(\mathfrak{C}_1) + \mathfrak{J}(\mathfrak{C}_2)$.

(In II ist der Querschnitt $\mathfrak{Q}$ ohne Endpunkt zu nehmen, was durch das Zeichen $\mathring{\mathfrak{Q}}$ angedeutet wird.)

Beweis von I: Die Endpunkte B_1, B_2 des Querschnitts $\mathfrak{Q} = (B_1 B_2)_i^{\mathfrak{C}}$ zerlegen bei einer auf $\mathfrak{C}$ festgelegten Umlaufungsweise $\mathfrak{C}$ in die beiden e. B.: $\mathfrak{B}_1 = B_1 B_2$, $\mathfrak{B}_2 = B_2 B_1$; dadurch entstehen zwei g. e. K.: $\mathfrak{C}_1 = B_1 \mathfrak{B}_1 B_2 \mathfrak{Q} B_1$, $\mathfrak{C}_2 = B_2 \mathfrak{B}_2 B_1 \mathfrak{Q} B_2$. Für die Ordnungen c, c_1, c_2 gilt nach (3):

$$(10^1) \qquad c(P) = c_1(P) + c_2(P),$$

und die Behauptung I lautet:

Aus $c(P) = 0$ folgt $c_1(P) = c_2(P) = 0$.

Es sei $\mathfrak{g}$ eine ganz in $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ gelegene Gerade; da $\mathring{\mathfrak{Q}}$ ganz aus Punkten von $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ besteht, so kann $\mathfrak{g}$ die g. e. K. $\mathfrak{C}_\nu$ $(\nu = 1, 2)$ nicht treffen. $\mathfrak{g}$ ist ganz in $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}_\nu)$ gelegen, weil jede durch einen Punkt des Innern gehende Gerade die g. e. K. trifft. Für einen Punkt P' von $\mathfrak{g}$ ist daher:

$$c(P') = c_1(P') = c_2(P') = 0$$

und ferner:

$$P—P'$$
$$\mathfrak{C}\ .$$

Da dieser Weg PP' ganz in $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ verläuft, kann er $\mathfrak{Q}$ nicht treffen:

$$P—P'$$
$$\mathfrak{C}_\nu\ ,$$

folglich:

$$c_1(P) = c_1(P') = 0, \quad c_2(P) = c_2(P') = 0.$$

Damit ist I bewiesen. Ferner ergibt sich, daß $\mathring{\mathfrak{B}}_1$ (d. h. $\mathfrak{B}_1$ mit Ausnahme der Endpunkte) zu $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}_2)$, $\mathring{\mathfrak{B}}_2$ zu $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}_1)$ gehört:

$$(10^2) \qquad c_2(\mathring{\mathfrak{B}}_1) = c_1(\mathring{\mathfrak{B}}_2) = 0.$$

Es genügt zu zeigen, daß c_2 in einem Punkte von $\mathring{\mathfrak{B}}_1$ gleich Null ist: Nach (7) kann man einen von einem beliebigen Punkt $A \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ ausgehenden Einschnitt $\mathfrak{E} = [AR_1]_a^{\mathfrak{C}}$ so angeben, daß er zu einem Punkt R_1 von $\mathring{\mathfrak{B}}_1$ führt. $\mathfrak{E}$ trifft $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{B}_2$ nicht:

$$A—R_1$$
$$\mathfrak{C}_2\ ,$$

mithin auf Grund von (2) und (10 I):

$$c_2(R_1) = 0.$$

Beweis von II: Für einen Punkt $J \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ ist auf Grund von (2^2):

$$c(J) = \pm 1$$

und mithin auf Grund von (10^1):

$$(10^3) \qquad c_1(J) + c_2(J) = \pm 1.$$

Da jede der Größen c_1. c_2 nach (2^2) nur die Werte $0, \pm 1$ annehmen kann, so läßt (10^3) nur die Beziehungen zu:

$$(10^4) \quad c_1(J) = \pm 1,\ c_2(J) = 0 \quad \text{oder} \quad c_1(J) = 0,\ c_2(J) = \pm 1,$$

aus denen die Richtigkeit der Behauptung II unmittelbar hervorgeht.

Eine weitere Folgerung aus (10^1) und (10^2) ist:

(11) *Jeder Querschnitt* $\mathfrak{Q}' = (C_1 C_2)_i^{\mathfrak{C}}$, $C_1 \subset \mathring{\mathfrak{B}}_1$, $C_2 \subset \mathring{\mathfrak{B}}_2$, *muß mit* $\mathfrak{Q}$ *mindestens einen Punkt gemein haben.*

Beweis. Wäre $\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{Q}' = 0$, so wäre für einen beliebigen Punkt $P \subset \mathfrak{Q}'$:

$$P—C_1 \quad \text{und} \quad P—C_2$$
$$\mathfrak{C}_2 \qquad\qquad \mathfrak{C}_1$$

und somit nach (10^2):

$$c_1(P) = c_2(P) = 0.$$

Wegen $P \subset \mathring{\mathfrak{Q}}'$, $\mathring{\mathfrak{Q}}' \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ ist aber $c(P) \neq 0$, so daß (10^1) nicht erfüllt wäre.

(12) *Von drei e. B.* $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, *die zwei Punkte A und B verbinden und einander sonst nicht treffen, liegt einer und nur einer im Innern der von den beiden anderen gebildeten g. e. K.*

Beweis. $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ bilden miteinander die g. e. K. $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$; dabei ist $\mathfrak{C}_\varkappa = A\mathfrak{B}_\lambda B\mathfrak{B}_\mu A$, wenn $\varkappa$, λ, μ eine zyklische Permutation von 1, 2, 3 bedeutet. In jedem Punkt, der keinem $\mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ angehört, besteht nach (3) für die Ordnungen c_1, c_2, c_3 die Relation:

$$(12^1) \qquad c_1(P) + c_2(P) + c_3(P) = 0.$$

Aus (10^2) folgt, daß $\mathring{\mathfrak{B}}_\varkappa \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{C}_\varkappa)$ für höchstens ein $\varkappa$ erfüllt ist. Es ist zu zeigen, daß diese Eigenschaft wirklich einem Bogen zukommt, daß also die Annahme

$$(12^2) \qquad \mathring{\mathfrak{B}}_1 \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C}_1), \quad \mathring{\mathfrak{B}}_2 \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C}_2)$$

nur die Folgerung

$$(12^3) \qquad \mathring{\mathfrak{B}}_3 \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{C}_3)$$

zuläßt. Nach (8) läßt sich ein Querschnitt $\mathfrak{Q} = (D_2 D_3)_i^{\mathfrak{C}_1}$ so angeben, daß $D_2 \subset \mathring{\mathfrak{B}}_2$, $D_3 \subset \mathring{\mathfrak{B}}_3$. Für $Y \subset \mathring{\mathfrak{Q}}$ ist $c_1(Y) \neq 0$ und daher nach (12^1):

$$(12^4) \qquad c_2(Y) + c_3(Y) \neq 0.$$

Es ist

$$D_2 \underset{\mathring{\mathfrak{B}}_1}{—} Y, \quad \text{weil } \mathring{\mathfrak{Q}} \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{C}_1),\ \mathring{\mathfrak{B}}_1 \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C}_1);$$

$$D_2 \underset{\mathfrak{B}_3}{—} Y, \quad \text{weil } \mathfrak{B}_3 \text{ und } \mathfrak{Q} \text{ nur den Punkt } D_3 \text{ gemein haben,}$$

und folglich nach (1^4) und (2):

$$c_2(Y) = c_2(D_2).$$

Nach (12^3) ist

$$c_2(Y) = 0$$

und mithin nach (12^4):

$$c_3(Y) \neq 0.$$

Da ebenso geschlossen werden kann, daß

$$c_3(Y) = c_3(D_3)$$

ist, so ist

$$c_3(D_3) \neq 0,$$

d. h.:

$$\mathring{\mathfrak{B}}_3 \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{C}_3).^{16, 17})$$

---

[16]) Systeme von e. B. wie die in (10), (11) und (12) betrachteten benutzt A. Winternitz (loc. cit.) bei seinem Beweis des Jordanschen Kurvensatzes.

[17]) Die Sätze (10) und (12) habe ich an anderer Stelle [Über die elementaren Anordnungssätze der Geometrie, Jahresbericht der D. M. V. **33** (1924), S. 2—24] für

§ 4.

Die durch zwei punktfremde g. e. K. bestimmten Gebiete.

Von zwei punktfremden g. e. K. $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ kann entweder eine im Innern der anderen oder jede im Äußern der anderen gelegen sein; der erstere Fall werde ausführlich behandelt.

(13) *Voraussetzung*: $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{C}' = 0$, $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{C})$.

Behauptung:

I. $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C}')$.

II. $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}') \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{C})$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C}')$; $\mathfrak{R} = \mathfrak{J}(\mathfrak{C}) \cdot \mathfrak{A}(\mathfrak{C}') \neq 0$.

III. $\mathfrak{R}$ *ist ein Gebiet.*

IV. *In* $\mathfrak{R}$ *kann man ein geschlossenes e. P.* $\mathfrak{P}$ *so angeben, daß*

$$\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{P}), \quad \mathfrak{C}' \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{P}).$$

Beweis von I: Bezeichnen c, c' die Ordnungen in bezug auf $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, so lautet die Voraussetzung

$$(13^1) \qquad c(\mathfrak{C}') \neq 0$$

und die Behauptung

$$(13^2) \qquad c'(\mathfrak{C}) = 0.$$

Ist C' ein Punkt von $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{h}$ ein von C' ausgehender Halbstrahl und B' der letzte Punkt des Durchschnitts $\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{C}'$, so muß, weil $B' \subset \mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{C})$, hinter B' auf $\mathfrak{h}$ noch mindestens ein Punkt von $\mathfrak{C}$ gelegen sein. Ist B der erste dieser Punkte, so ist $c'(B) = 0$, weil hinter B' auf $\mathfrak{h}$ kein Punkt von $\mathfrak{C}'$ liegt. Da je zwei Punkte von $\mathfrak{C}$ in bezug auf $\mathfrak{C}'$ mittels $\mathfrak{C}$ verbindbar sind, so ist I bewiesen.

Beweis von II: Die Strecke $\mathfrak{g} = BB'$ soll eine $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ verbindende *Brücke* heißen; $\mathring{\mathfrak{g}}$ (d. h. $\mathfrak{g}$ mit Ausnahme der Endpunkte) ist gegen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ fremd. Für $Q \subset \mathring{\mathfrak{g}}$ gilt:

$$\underset{\mathfrak{C}}{Q—B'}, \qquad \underset{\mathfrak{C}'}{Q—B}$$

und folglich nach (2), (13^1), (13^2):

$$(13^3) \quad c(\mathring{\mathfrak{g}}) \neq 0, \quad c'(\mathring{\mathfrak{g}}) = 0, \quad \text{d. h.:} \quad \mathring{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{R} = \mathfrak{J}(\mathfrak{C}) \cdot \mathfrak{A}(\mathfrak{C}').$$

Es bleibt bei II also nur noch zu zeigen: Aus $J' \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{C}')$ folgt $J' \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ aus $A \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ folgt $A \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C}')$.

---

e. P. bewiesen und zwar mit Hilfe einer nur die Axiomgruppen der Verknüpfung und Anordnung benutzenden, elementargeometrisch begründeten Theorie der Ordnung.

Ein von J' ausgehender Halbstrahl muß $\mathfrak{C}'$ treffen; ist E' der erste Schnittpunkt hinter J', so ist

$$J'—E'$$
$$\mathfrak{C} \quad ,$$

weil die Strecke $J'E'$ mit Ausnahme von E' ganz in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}')$, $\mathfrak{C}$ aber nach I ganz in $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}')$ gelegen ist. Aus $E' \subset \mathfrak{C}'$, (2) und (13[1]) folgt also:

$$c(J') \neq 0. \quad \text{d. h.} \quad J' \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{C}).$$

Den Punkt A verbindet man geradlinig mit einem Punkt von $\mathfrak{C}$ und schließt dann analog. Damit ist II bewiesen.

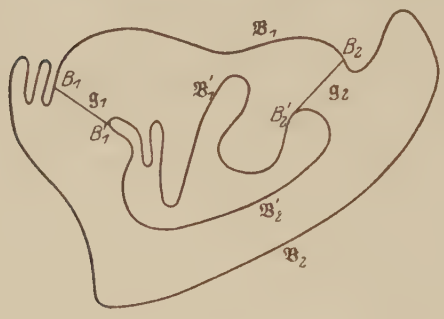


Fig. 2.

Beweis von III (Fig. 2): Die Punktmenge $\mathfrak{R}$ besteht als Durchschnitt der beiden Gebiete $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}')$ nur aus inneren Punkten; da deren Ränder, die Kurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$, beschränkt und gegeneinander fremd sind, da ferner $\mathfrak{R}$ nach II nicht leer ist, so ist $\mathfrak{R}$ nach einem allgemeinen Satz aus der Theorie der Punktmengen[18]) wieder ein Gebiet. Diese Tatsache soll hier ohne Benutzung jenes allgemeinen Satzes bewiesen werden; dazu genügt es zu zeigen:

(13[4]) Aus $X \subset \mathfrak{R}$ und $Y \subset \mathfrak{R}$ folgt $\dfrac{X—Y}{\mathfrak{C}+\mathfrak{C}'}$.

Es werden zwei gegeneinander punktfremde, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ verbindende Brücken $\mathfrak{g}_\nu = B_\nu B_\nu'$ $(\nu = 1, 2)$ konstruiert. B_1 und B_2 zerlegen $\mathfrak{C}$ in die e. B. $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$; B_1' und B_2' zerlegen $\mathfrak{C}'$ in die e. B. $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{B}_2'$. Es werden vier g. e. K. definiert:

$$\mathfrak{U}_1 = B_1' \mathfrak{g}_1 B_1 \mathfrak{B}_1 B_2 \mathfrak{g}_2 B_2' \mathfrak{B}_1' B_1', \text{ Ordnung } u_1;$$
$$\mathfrak{U}_1' = B_1' \mathfrak{g}_1 B_1 \mathfrak{B}_1 B_2 \mathfrak{g}_2 B_2' \mathfrak{B}_2' B_1', \quad \text{„} \quad u_1';$$
$$\mathfrak{U}_2 = B_2' \mathfrak{g}_2 B_2 \mathfrak{B}_2 B_1 \mathfrak{g}_1 B_1' \mathfrak{B}_2' B_2', \quad \text{„} \quad u_2;$$
$$\mathfrak{U}_2' = B_2' \mathfrak{g}_2 B_2 \mathfrak{B}_2 B_1 \mathfrak{g}_1 B_1' \mathfrak{B}_1' B_2', \quad \text{„} \quad u_2'.$$

Die Numerierung von $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ werde auf $\mathfrak{C}$ willkürlich und darauf auf $\mathfrak{C}'$

[18]) Vgl. z. B. bei F. Hausdorff, loc. cit. S. 343. Der genannte Satz ergibt sich aus einem anderen: Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei beschränkte, abgeschlossene, punktfremde Mengen, so folgt aus $\dfrac{X—Y}{\mathfrak{M}}$ und $\dfrac{X—Y}{\mathfrak{N}}$: $\dfrac{X—Y}{\mathfrak{M}+\mathfrak{N}}$. Diese Tatsache wird in III für den Fall, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei g. e. K. sind, nur mit Hilfe der Ordnung bewiesen (vgl. (13[4])).

folgendermaßen festgelegt: Zunächst sind $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{B}_2'$ und $B_1' \mathfrak{g}_1 B_1 \mathfrak{B}_1 B_2 \mathfrak{g}_2 B_2'$ drei die Punkte B_1', B_2' verbindende, den Voraussetzungen von (12) genügende e. B. Wegen (13^2) muß entweder $u_1(\mathring{\mathfrak{B}}_2') = 0$ und $u_1'(\mathring{\mathfrak{B}}_1') \neq 0$ oder $u_1(\mathring{\mathfrak{B}}_2') \neq 0$ und $u_1'(\mathring{\mathfrak{B}}_1') = 0$ sein. Die Numerierung auf $\mathfrak{C}'$ erfolge nun so, daß

$$(13^5) \quad u_1(\mathring{\mathfrak{B}}_2') = 0, \qquad (13^6) \quad u_1'(\mathring{\mathfrak{B}}_1') \neq 0$$

ist. Für u_2 und u_2' ergeben sich aus (13^5) und (13^6) die Relationen:

$$(13^7) \quad u_2(\mathring{\mathfrak{B}}_1') = 0, \qquad (13^8) \quad u_2'(\mathring{\mathfrak{B}}_2') \neq 0.$$

Durch Anwendung von (10^2) auf die in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ verlaufenden Querschnitte $B_1 \mathfrak{g}_1 B_1' \mathfrak{B}_\nu' B_2' \mathfrak{g}_2 B_2$ $(\nu = 1, 2)$ erhält man nämlich:

$$(13^9) \quad u_1(\mathring{\mathfrak{B}}_2) = 0, \qquad (13^{10}) \quad u_2(\mathring{\mathfrak{B}}_1) = 0.$$

Nach (8) kann man einen Querschnitt so angeben, daß er einen Punkt von $\mathring{\mathfrak{B}}_1$ mit einem Punkt von $\mathring{\mathfrak{B}}_1'$ verbindet, in $\mathfrak{J}(\mathfrak{U}_1)$ verläuft und somit $\mathfrak{U}_2$ wegen (13^5) und (13^9) nicht trifft. Also ist $u_2(\mathring{\mathfrak{B}}_1') = u_2(\mathring{\mathfrak{B}}_1)$, so daß man (13^7) aus (13^{10}) erhält. (13^7) zieht (13^8) nach sich, wie man durch Anwendung von (12) auf $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{B}_2'$ und $B_1' \mathfrak{g}_1 B_1 \mathfrak{B}_2 B_2 \mathfrak{g}_2 B_2'$ ohne weiteres erkennt.

Nach diesen Hilfsbemerkungen soll gezeigt werden:

$$(13^{11}) \quad \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_1) \cdot \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_2) = 0, \qquad (13^{12}) \quad \mathfrak{R} - (\mathring{\mathfrak{g}}_1 + \mathring{\mathfrak{g}}_2) = \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_1) + \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_2).$$

Der Querschnitt $\mathfrak{Q} = B_1 \mathfrak{g}_1 B_1' \mathfrak{B}_1' B_2' \mathfrak{g}_2 B_2$ bildet mit $\mathfrak{C}$ die g. e. K. $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2'$; daher ist nach (10):

$$(13^{13}) \quad \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_1) \cdot \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_2') = 0, \qquad (13^{14}) \quad \mathfrak{J}(\mathfrak{C}) - \mathring{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_1) + \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_2').$$

Ferner ist $\mathfrak{B}_2'$ ein wegen (13^8) in $\mathfrak{J}(\mathfrak{U}_2')$ verlaufender, mit $\mathfrak{U}_2'$ die g. e. K. $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{U}_2$ bildender Querschnitt; mithin nach (10):

$$(13^{15}) \quad \mathfrak{J}(\mathfrak{C}') \cdot \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_2) = 0, \qquad (13^{16}) \quad \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_2') - \mathfrak{B}_2' = \mathfrak{J}(\mathfrak{C}') + \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_2).$$

Aus (13^{13}) und (13^{16}) folgt ohne weiteres (13^{11}). (13^{14}) und (13^{16}) ergeben zusammen:

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_1) + \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_2) + \mathfrak{J}(\mathfrak{C}') + \mathring{\mathfrak{B}}_2' + \mathring{\mathfrak{Q}},$$

und wenn man berücksichtigt, daß

$$\mathring{\mathfrak{B}}_2' + \mathring{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{C}' + \mathring{\mathfrak{g}}_1 + \mathring{\mathfrak{g}}_2$$

ist:

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{C}) - \{\mathfrak{J}(\mathfrak{C}') + \mathfrak{C}'\} - (\mathring{\mathfrak{g}}_1 + \mathring{\mathfrak{g}}_2) = \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_1) + \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_2).$$

Die Punktmengen $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}') + \mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}')$ sind in bezug auf die Ebene zueinander komplementär; also ist nach einer bekannten Regel

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{C}) - \{\mathfrak{J}(\mathfrak{C}') + \mathfrak{C}'\} = \mathfrak{J}(\mathfrak{C}) \cdot \mathfrak{A}(\mathfrak{C}') = \mathfrak{R},$$

so daß auch (13^{12}) bewiesen ist.

Nunmehr ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit von (13^4):

$$\text{Aus } X \subset \mathfrak{R} \text{ und } Y \subset \mathfrak{R} \text{ folgt } \frac{X - - Y}{\mathfrak{C} + \mathfrak{C}'}.$$

Gehören X und Y beide dem Innern derselben Kurve $\mathfrak{U}_\nu$ $(\nu = 1, 2)$ an, so ist (13^4) wegen (13^5) und (13^9) bzw. wegen (13^7) und (13^{10}) richtig. Im Falle $X \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_1)$, $Y \subset \mathring{\mathfrak{g}}_1$ führe man auf Grund von (9^1) einen bis auf den Endpunkt in $\mathfrak{J}(\mathfrak{U}_1)$ gelegenen e. P. von X zum Punkt Y auf $\mathring{\mathfrak{g}}_1$. Ist endlich $X \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_1)$, $Y \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_2)$, so führe man von beiden Punkten einen e. P. zur selben Brücke.

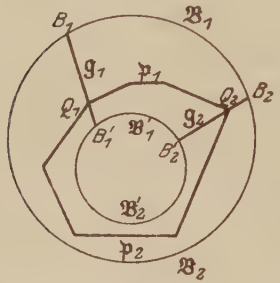


Fig. 3.

Durch Anwendung von (5) und (6) erkennt man schließlich, daß der Rand des Gebietes $\mathfrak{R}$ aus den Kurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ besteht.

Beweis von IV (Fig. 3): Die g. e. K. $\mathfrak{U}_\nu$ $(\nu = 1, 2)$ enthält die beiden geradlinigen Stücke $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$; ist Q_ν ein Punkt von $\mathring{\mathfrak{g}}_\nu$, so kann man nach (8) und (9^1) die Querschnitte $\mathfrak{p}_1 = (Q_1 Q_2)_i^{\mathfrak{U}_1}$, $\mathfrak{p}_2 = (Q_1 Q_2)_i^{\mathfrak{U}_2}$ herstellen, deren jeder ein e. P. ist. $\mathfrak{P} = Q_1 \mathfrak{p}_1 Q_2 \mathfrak{p}_2 Q_1$ ist auf Grund von (13^{11}) und (13^{12}) ein geschlossenes e. P., das ganz dem Gebiet $\mathfrak{R}$ angehört:

$$(13^{17}) \quad c(\mathfrak{P}) \neq 0, \qquad (13^{18}) \quad c'(\mathfrak{P}) = 0.$$

$\mathfrak{P}$ besitzt die Eigenschaft IV, d. h.: Bedeutet p die Ordnung in bezug auf $\mathfrak{P}$, so ist:

$$(13^{19}) \quad p(\mathfrak{C}) = 0, \qquad (13^{20}) \quad p(\mathfrak{C}') \neq 0.$$

(13^{19}) folgt unmittelbar aus (13^{17}) und (13I); (13^{20}) ergibt sich durch ähnliche Betrachtungen wie (13^4): Es werden folgende g. e. K. aufgestellt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= Q_1 \mathfrak{g}_1 B_1 \mathfrak{B}_1 B_2 \mathfrak{g}_2 Q_2 \mathfrak{p}_1 Q_1, \quad \text{Ordnung } v_1; \\ \mathfrak{B}_1' &= Q_1 \mathfrak{g}_1 B_1 \mathfrak{B}_1 B_2 \mathfrak{g}_2 Q_2 \mathfrak{p}_2 Q_1, \quad \text{„} \quad v_1'; \\ \mathfrak{B}_2 &= Q_2 \mathfrak{g}_2 B_2 \mathfrak{B}_2 B_1 \mathfrak{g}_1 Q_1 \mathfrak{p}_2 Q_2, \quad \text{„} \quad v_2. \end{aligned}$$

Da $\mathfrak{p}_\nu$ ein in $\mathfrak{J}(\mathfrak{U}_\nu)$ verlaufender Querschnitt ist, so ist nach (10^2):

$$v_\nu(\mathring{\mathfrak{B}}_\nu') = 0, \quad \nu = 1, 2.$$

Statt dessen kann wegen $\mathfrak{C}' = \mathfrak{B}_1' + \mathfrak{B}_2'$, $\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{B}_\nu = 0$ auch

$$(13^{21}) \quad v_1(\mathfrak{C}') = 0, \qquad (13^{22}) \quad v_2(\mathfrak{C}') = 0$$

geschrieben werden. Da $\mathfrak{p}_2$ in $\mathfrak{R}$, also in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ liegt, so ist $B_1 \mathfrak{g}_1 Q_1 \mathfrak{p}_2 Q_2 \mathfrak{g}_2 B_2$ ein in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ verlaufender Querschnitt, der mit $\mathfrak{C}$ die g. e. K. $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_1'$ bildet; (13^1), (13^{22}) und (10) liefern also:

$$(13^{23}) \qquad v_1'(\mathfrak{C}') \neq 0.$$

Ferner verläuft $\mathring{\mathfrak{p}}_2$ in $\mathfrak{A}(\mathfrak{U}_1)$ und mithin auch in $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1)$; die Anwendung von (12) auf die drei e. B. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ und $Q_1 \mathfrak{g}_1 B_1 \mathfrak{B}_1 B_2 \mathfrak{g}_2 Q_2$ liefert daher unter Benutzung von (13^{19}), daß $\mathring{\mathfrak{p}}_1$ ein $\mathfrak{J}(\mathfrak{B}_1')$ angehörender Querschnitt ist. $\mathfrak{p}_1$ bildet mit $\mathfrak{B}_1'$ die g. e. K. $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{P}$; aus (13^{23}) und (13^{21}) folgt mithin auf Grund von (10) die behauptete Beziehung (13^{30}).

Die in $\mathfrak{R}$ gelegenen g. e. K. zerfallen also in zwei Klassen: Der ersten Klasse gehören diejenigen an, in bezug auf die $\mathfrak{C}'$ die Ordnung Null, der zweiten diejenigen, in bezug auf die $\mathfrak{C}'$ eine von Null verschiedene Ordnung hat. $\mathfrak{P}$ ist eine Kurve der zweiten Klasse; daß es Kurven der ersten Klasse gibt, ist selbstverständlich.

Damit ist (13) vollständig bewiesen. Der Fall zweier punktfremder g. e. K., deren jede im Äußern der anderen liegt, ist analog zu behandeln. Beide Fälle lassen sich so zusammenfassen:

(14) *Zwei gegeneinander punktfremde g. e. K. bestimmen in der Ebene drei Gebiete.*

Die Betrachtungen des Satzes (13) lassen sich auf endlich viele, paarweise punktfremde g. e. K. $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_n$ (Ordnungen $c_1, c_2, \ldots, c_n$) ausdehnen, deren jede im Innern der vorhergehenden liegt:

$$(15^1) \qquad c_\nu(\mathfrak{C}_{\nu+1}) \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Zunächst folgt aus (15^1) nach (13):

$$(15^2) \qquad c_{\nu+1}(\mathfrak{C}_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ferner liegt jede Kurve im Innern jeder Kurve mit kleinerem und im Äußern jeder Kurve mit größerem Index:

$$(15^3) \quad c_\nu(\mathfrak{C}_{\nu+\mu}) \neq 0, \qquad (15^4) \quad c_{\nu+\mu}(\mathfrak{C}_\nu) = 0$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n-1;\ \mu = 1, 2, \ldots, n-\nu).$$

Durch die Aussage, daß eine Kurve im Innern der anderen liegt, wird also unter den Kurven des Systems eine asymmetrische, transitive Ordnungsbeziehung hergestellt.

Für $\mu = 1$ sind die Beziehungen (15^3) und (15^4) schon in (15^1) und (15^2) ausgesprochen; um sie für $\mu = 2$ zu beweisen, konstruiere man eine $\mathfrak{C}_{\nu+1}$ uud $\mathfrak{C}_{\nu+2}$ verbindende Brücke $\mathfrak{g}_{\nu+1} = B_{\nu+1} B_{\nu+2}$. Nach ($15^1$) ist $\mathfrak{C}_{\nu+2} \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{C}_{\nu+1})$ und folglich $\mathring{\mathfrak{g}}_{\nu+1} \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{C}_{\nu+1})$; nach ($15^2$) ist $\mathfrak{C}_\nu \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C}_{\nu+1})$. Mithin:

$$\mathfrak{g}_{\nu+1} \cdot \mathfrak{C}_\nu = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{B_{\nu+1} - B_{\nu+2}}{\mathfrak{C}_\nu}.$$

Daraus ergibt sich nach (15^1) und (2) die Beziehung (15^3) für $\mu = 2$. Um (15^4) für $\mu = 2$ zu beweisen, konstruiere man eine $\mathfrak{C}_\nu$ und $\mathfrak{C}_{\nu+1}$ ver-

bindende Brücke. Durch die beim Beweis von (13) benutzte Schlußweise gelangt man zu dem weiteren Ergebnis, daß die Kurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_n$ die Ebene in genau $n+1$ Gebiete zerlegen.

§ 5.

Ein aus drei e. B. gebildetes Kurvensystem.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wird u. a. die folgende Aufgabe behandelt werden: Ein e. B. $\mathfrak{B} = B_1 B_2$ habe mit den beiden gegeneinander punktfremden e. B. $\mathfrak{B}_\nu = D_\nu E_\nu$ $(\nu = 1, 2)$ nur den Punkt D_ν gemein, der von B_1 und B_2 verschieden ist. Es wird gefragt, wann $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{B}$ gelegen sind und wie bei einer vorgeschriebenen Durchlaufung des Bogens $\mathfrak{B}$ eine bestimmte Seite von $\mathfrak{B}$ zu definieren ist. Bei der Beantwortung dieser Frage bildet der jetzt zu beweisende Satz über das aus $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ zusammengesetzte Kurvensystem ein wichtiges Hilfsmittel.

Gegeben: Drei e. B. $\mathfrak{B} = B_1 C_1 D_1 D_2 C_2 B_2$; $\mathfrak{B}_\nu = D_\nu E_\nu$; $\nu = 1, 2$. Der Teilbogen $C_1 D_1 D_2 C_2$ von $\mathfrak{B}$ heiße $\mathfrak{b}$; die Punkte D_1, D_2 können auch zusammenfallen.

$\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}_\nu = D_\nu$; $\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2 = 0$ bzw. D_1, je nachdem $D_1 \neq D_2$ oder $D_1 = D_2$. Es sei C_ν' ein Punkt des Teilbogens $B_\nu D_\nu$; über die Anordnung der Punkte C_ν, C_ν' auf $B_\nu D_\nu$ wird nichts vorausgesetzt. Der Teilbogen $C_1' D_1 D_2 C_2'$ von $\mathfrak{B}$ heiße $\mathfrak{b}'$.

Ferner sind *gegeben*: Zwei g. e. K. $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$.

$$\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{B} = C_1 + C_2;\ \mathring{\mathfrak{b}} \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{C}),\ B_\nu \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C});$$
$$\mathfrak{B}_\nu \cdot \mathfrak{C} \neq 0;\ \text{der erste Punkt von } \mathfrak{B}_\nu \cdot \mathfrak{C} \text{ sei } A_\nu.^{19})$$
$$\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{B} = C_1' + C_2';\ \mathring{\mathfrak{b}}' \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{C}'),\ B_\nu \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{C}');$$
$$\mathfrak{B}_\nu \cdot \mathfrak{C}' \neq 0;\ \text{der erste Punkt von } \mathfrak{B}_\nu \cdot \mathfrak{C}' \text{ sei } A_\nu'.$$

Über $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{C}'$ wird nichts vorausgesetzt. — Es wird behauptet:

(16) *Die auf $\mathfrak{C}'$ gelegenen Punktepaare C_1', C_2'; A_1', A_2' haben dieselbe zyklische Anordnung wie die auf $\mathfrak{C}$ gelegenen Punktepaare C_1, C_2; A_1, A_2.*

Beweis: Die g. e. K. $\mathfrak{C}$ wird durch die Punkte C_1 und C_2 in die e. B. $\mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2$, zerlegt; derjenige, auf dem A_1 liegt, werde mit $\mathfrak{j}_1$ bezeichnet. $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{j}_\nu$ bilden die g. e. K. $\mathfrak{C}_\nu$; die Ordnungen in bezug auf $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_\nu$ seien c und c_ν. Da nach Voraussetzung

$$(16^1) \qquad c(\mathring{\mathfrak{b}}) \neq 0$$

[19]) Daß bei gegebenen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ eine diesen Bedingungen genügende g. e. K. $\mathfrak{C}$ konstruiert werden kann, wird mit Hilfe der Erreichbarkeit im Teil II gezeigt werden.

ist, so ist $\mathfrak{b}$ ein in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ gelegener Querschnitt, und man erhält nach (10^2):

$$(16^2) \qquad c_1(\mathring{\mathfrak{j}}_2) = c_2(\mathring{\mathfrak{j}}_1) = 0.$$

Werden für $\mathfrak{C}'$ die Bezeichnungen $\mathfrak{j}_\nu'$, $\mathfrak{C}_\nu'$, c', c_ν' entsprechend definiert wie für $\mathfrak{C}$, so gilt

$$(16^3) \quad c'(\mathring{\mathfrak{b}}') \neq 0, \qquad (16^4) \quad c_1'(\mathring{\mathfrak{j}}_2') = c_2'(\mathring{\mathfrak{j}}_1') = 0.$$

Für jeden Punkt Y, der auf $\mathfrak{B}_1$ hinter D_1 und sowohl vor A_1 als auch vor A_1' liegt, ergibt sich auf Grund von (10) aus (16^1) bis (16^4):

$$(16^5) \quad c_1(Y) \neq 0, \qquad (16^6) \quad c_1'(Y) \neq 0.$$

Es sei $\mathfrak{z} = Q\,R$ ein e. B. von folgender Beschaffenheit:

$$\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{B} = Q; \quad Q \subset \mathring{\mathfrak{b}} \cdot \mathring{\mathfrak{b}}'; \quad \mathfrak{z} \cdot \mathfrak{C} \neq 0, \; \mathfrak{z} \cdot \mathfrak{C}' \neq 0.$$

Der erste Punkt von $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{C}'$ sei P bzw. P'. Dann gilt folgendes:

(16^7) *Liegt P auf $\mathfrak{j}_1$, so liegt P' auf $\mathfrak{j}_1'$.*

Beim Beweis von (16^7) (Fig. 4) wird die folgende stetige, geschlossene, im allgemeinen nicht einfache Kurve benutzt:

$$\mathfrak{S} = C_1\,\mathfrak{B}\,C_1'\,\mathfrak{j}_1'\,C_2'\,\mathfrak{B}\,C_2\,\mathfrak{j}_1\,C_1; \quad \text{Ordnung } s.$$

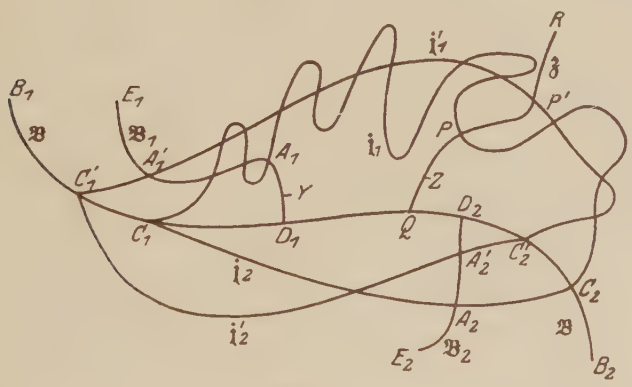


Fig. 4.

Für jeden Punkt X, der keinem der e. B. $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_1'$ angehört, gilt dann nach (3) die Beziehung:

$$(16^8) \qquad c_1(X) + s(X) = c_1'(X).$$

(16^8) gilt sowohl für den oben definierten Punkt Y als auch für jeden Punkt Z, der auf $\mathfrak{z}$ hinter Q und vor P und vor P' liegt:

$$(16^9) \qquad c_1(Y) + s(Y) = c_1'(Y),$$

$$(16^{10}) \qquad c_1(Z) + s(Z) = c_1'(Z).$$

Wegen $P \subset \mathfrak{j}_1$, (16^1), (16^2) und (10) ist:

$$(16^{11}) \qquad c_1(Z) \neq 0.$$

Aus (16^5) und (16^{11}) folgt, da $\mathfrak{C}_1$ eine g. e. K. ist, nach (2^2):

$$(16^{12}) \qquad c_1(Y) = c_1(Z).$$

Andererseits ist

$$(16^{13}) \qquad s(Y) = s(Z);$$

denn der Weg $Y \mathfrak{B}_1 D_1 \mathfrak{B} Q \mathfrak{z} Z$ kann auf Grund der über Q, Y, Z gemachten Annahmen die Kurve $\mathfrak{S}$ nicht treffen. Aus (16^9), (16^{10}), (16^{12}) und (16^{13}) folgt:

$$c_1'(Y) = c_1'(Z),$$

daraus und aus (16^6):

$$(16^{14}) \qquad c_1'(Z) \neq 0$$

und schließlich aus (16^{14}) und (16^4):

$$P' \subset \mathfrak{j}_1'.$$

Damit ist (16^7) bewiesen. Da die Kurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ gleichberechtigt sind, so gilt auch die Umkehrung zu (16^7):

(16^{15}) *Liegt P' auf $\mathfrak{j}_1'$, so liegt P auf $\mathfrak{j}_1$.*

Aus (16^7) und (16^{15}) ergibt sich nun unmittelbar die Richtigkeit des behaupteten Satzes (16): Trennen die Punktepaare C_1, C_2; A_1, A_2 einander auf $\mathfrak{C}$ nicht, liegt also A_2 mit A_1 auf demselben Teilbogen $\mathfrak{j}_1$ von $\mathfrak{C}$, so gehört A_2' nach (16^7) dem Bogen $\mathfrak{j}_1'$ von $\mathfrak{C}'$ an, der von C_1' über A_1' nach C_2' führt, d. h. C_1', C_2'; A_1', A_2' trennen einander auf $\mathfrak{C}'$ nicht. Trennen dagegen die Punktepaare C_1, C_2; A_1, A_2 einander auf $\mathfrak{C}$, so ist A_2 auf demjenigen Teilbogen $\mathfrak{j}_2$ von $\mathfrak{C}$ gelegen, der A_1 nicht enthält. Dann gehört A_2' dem Bogen $\mathfrak{j}_2'$ von $\mathfrak{C}'$ an; denn aus $A_2' \subset \mathfrak{j}_1'$ ergäbe sich nach (16^{15}): $A_2 \subset \mathfrak{j}_1$. Also trennen C_1', C_2'; A_1', A_2' einander auf $\mathfrak{C}'$ ebenfalls.

(16^{16}) Die Sätze (16), (16^7), (16^{15}) bleiben richtig, wenn die Punkte C_1, C_1' einzeln oder beide mit B_1, die Punkte C_2, C_2' einzeln oder beide mit B_2 zusammenfallen.

§ 6.

Die Erreichbarkeit.

In (9) wurde ausgesagt, daß die geradlinig erreichbaren Punkte auf jeder g. e. K. überall dicht liegen. Ein beliebiger Punkt einer g. e. K. $\mathfrak{C}$ ist aber von einem vorgeschriebenen Gebiet $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ aus nicht notwendig geradlinig erreichbar[20]), sondern erst in einem allgemeineren Sinn erreich-

[20]) Vgl. das von Schoenflies (Bericht II, S. 176) gegebene Beispiel.

bar. Nach Schoenflies[21]) heißt ein Punkt C einer stetigen Kurve $\mathfrak{S}$ in einem Gebiet $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$ *erreichbar*, wenn man eine einfache Streckenfolge (im folgenden als e. S. bezeichnet) so angeben kann, daß sie ganz dem Gebiet $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$ angehört und daß ihre Ecken gegen C konvergieren. Dabei versteht man unter einer e. S. ein System von abzählbar vielen Strecken $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}, \ldots$, bei dem kein innerer Punkt einer Seite auf mehr als einer Seite liegt und bei dem durch keine Ecke mehr als zwei Seiten gehen. Eine e. S., deren Ecken gegen einen Punkt C konvergieren, bildet mit C zusammen einen e. B. Man verdankt Schoenflies den folgenden Satz[22]):

(17) *Jeder Punkt einer g. e. K.* $\mathfrak{C}$ *ist sowohl in* $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ *als auch in* $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ *erreichbar.*

Der Beweis werde für $\mathfrak{J}(\mathfrak{C})$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ gemeinsam, also für ein vorgeschriebenes Gebiet $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ geführt und in mehrere Schritte zerlegt:

Sind $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'$ zwei hinreichend kleine konzentrische Kreise ($\mathfrak{K}$ sei der größere), deren Mittelpunkt ein vorgeschriebener Punkt C von $\mathfrak{C}$ ist, so liegt nach (5) auf $\mathfrak{K}$ und auf $\mathfrak{K}'$ mindestens je ein Punkt von $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$. Diese beiden Punkte werden durch einen $\mathfrak{C}$ nicht treffenden e. P. verbunden, der im allgemeinen sowohl in $\mathfrak{A}(\mathfrak{K})$ als auch in $\mathfrak{J}(\mathfrak{K}')$ eintritt. Betrachtet man aber den letzten Schnittpunkt mit $\mathfrak{K}$ und den darauf folgenden ersten mit $\mathfrak{K}'$, so erkennt man:

(17^1) Es lassen sich zwei Punkte Q, Q' so angeben, daß:

$$Q \subset \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{G}(\mathfrak{C}), \quad Q' \subset \mathfrak{K}' \cdot \mathfrak{G}(\mathfrak{C});$$

$Q \overset{\mathfrak{C}}{—} Q'$ und zwar durch einen e. P. $\mathfrak{P} = QQ'$; $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{K}) \cdot \mathfrak{A}(\mathfrak{K}')$.

Nach (5) muß der Radius von $\mathfrak{K}$ so gewählt werden, daß $\mathfrak{K}$ die Kurve $\mathfrak{C}$ in mindestens zwei Punkten trifft. Wird $\mathfrak{C}$ von C aus in einem bestimmten Sinn durchlaufen und tritt dabei D_1 als erster, D_2 als letzter Punkt von $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{K}$ auf, so hat der zum Teilbogen $\mathfrak{b} = D_1CD_2$ von $\mathfrak{C}$ komplementäre Bogen $\mathfrak{b}^* = D_2D_1$ von C eine positive Entfernung. Wird der Radius des Kreises $\mathfrak{K}'$ kleiner als diese Entfernung genommen, so soll gesagt werden:

(17^2) $\mathfrak{K}'$ *ist in charakteristischer Lage gegen* $\mathfrak{K}$;

---

[21]) A. Schoenflies (Bericht II, S. 126), A. Rosenthal (loc. cit., S. 920), B. v. Kerékjártó (Topologie I, S. 65).

[22]) Vgl. Fußnote 9. Ferner: L. Bieberbach [Über den Jordanschen Kurvensatz, die Schoenfliesschen Sätze von Erreichbarkeit und Unbewalltheit und den Satz von der Invarianz des ebenen Gebiets; Jahresbericht der D. M. V. 22 (1913), S. 144–153], B. von Kerékjártó (Topologie I, S. 65/66). Für die n-dimensionale Jordansche Mannigfaltigkeit: L. E. J. Brouwer, Math. Annalen 71, S. 320/21.

es ist:

$$(17^3)\quad \mathfrak{K}'\cdot\mathfrak{C}\subset\mathfrak{b},\qquad (17^4)\quad \mathfrak{b}^*\subset\mathfrak{A}(\mathfrak{K}').$$

Es soll der folgende Hilfssatz bewiesen werden:

(18) *Je zwei auf $\mathfrak{K}'$ gelegene Punkte aus $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ lassen sich durch einen in $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ verlaufenden e. P. verbinden, der in $\mathfrak{A}(\mathfrak{K})$ nicht eintritt.*

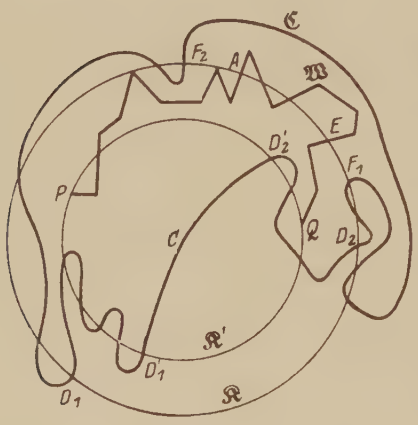


Fig. 5.

Dem Beweis von (18) (Fig. 5) werde eine Hilfsbetrachtung vorangestellt: $\mathfrak{L}=F_1F_2$ sei ein im positiven Sinn durchlaufener Bogen von $\mathfrak{K}$; $\mathfrak{L}$ soll ein *freier Kreisbogen*[23]) sein, d. h. es sollen die Endpunkte F_1, F_2, aber kein weiterer Punkt von $\mathfrak{L}$ zu $\mathfrak{C}$ gehören. Der zu $\mathfrak{L}$ komplementäre Bogen F_2F_1 von $\mathfrak{K}$ werde mit $\mathfrak{L}^*$ bezeichnet. Auf Grund von (17^2) liegen die Punkte F_1, F_2 auf dem Bogen $\mathfrak{b}^*$ von $\mathfrak{C}$; wird unter dem Bogen $\mathfrak{f}_{12}$ von $\mathfrak{C}$ derjenige Teilbogen F_1F_2 von $\mathfrak{C}$ verstanden, der C nicht enthält, der also auch Teilbogen von $\mathfrak{b}^*$ ist, so ist nach (17^4):

$$(18^1)\qquad \mathfrak{f}_{12}\subset\mathfrak{A}(\mathfrak{K}').$$

Die Bögen $\mathfrak{f}_{12}$, $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^*$ bilden zwei geschlossene stetige Kurven: $\mathfrak{U}=F_1\mathfrak{L}F_2\mathfrak{f}_{12}F_1$, $\mathfrak{U}^*=F_2\mathfrak{L}^*F_1\mathfrak{f}_{12}F_2$. $\mathfrak{U}$ ist eine g. e. K., $\mathfrak{U}^*$ dagegen im allgemeinen nicht, da $\mathfrak{L}^*$ und $\mathfrak{f}_{12}$ unendlich viele Punkte gemein haben können. Sind u, u^*, k die Ordnungen in bezug auf $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^*$, $\mathfrak{K}$, so ist nach (3):

$$(18^2)\qquad u(X)+u^*(X)=k(X),$$

sofern X weder auf $\mathfrak{K}$ noch auf $\mathfrak{f}_{12}$ liegt. Für je zwei Punkte P, Q von $\mathfrak{K}'$ ist auf Grund von (18^1):

$$(18^3)\qquad u(P)=u(Q)$$

und ferner, weil $\mathfrak{K}'$ in $\mathfrak{J}(\mathfrak{K})$ liegt:

$$(18^4)\qquad k(P)=k(Q)=1.^{24})$$

Gehören nun die Punkte P, Q beide zu $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$, so lassen sie sich

[23]) E. S. S. 326.

[24]) Daß das Innere des positiv durchlaufenen Kreises in bezug auf diesen die Ordnung $+1$ hat, ist ohne Benutzung eines allgemeinen Satzes unmittelbar ersichtlich.

durch einen in $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ verlaufenden e. P. $\mathfrak{W} = PQ$ verbinden, der mit $\mathfrak{K}$ höchstens endlich viele Punkte gemein hat. Diese zerfallen in drei Klassen: Austrittspunkte, in denen der Weg $\mathfrak{W} = PQ$ aus $\mathfrak{J}(\mathfrak{K})$ in $\mathfrak{A}(\mathfrak{K})$ gelangt; Eintrittspunkte, in denen er aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{K})$ in $\mathfrak{J}(\mathfrak{K})$ gelangt; Berührungspunkte, in denen ein Gebietswechsel in bezug auf $\mathfrak{K}$ nicht stattfindet[25]). Zum Beweise von (18) genügt es, ein Verfahren anzugeben, durch das die Anzahl der Austrittspunkte, solange sie von Null verschieden ist, um mindestens Eins vermindert wird[26]).

Es sei A der erste Austrittspunkt; A liegt auf einem freien Kreisbogen $\mathfrak{L}$, auf den die oben eingeführten Bezeichnungen angewendet werden mögen. Das Stück PA von $\mathfrak{W}$ verläßt $\mathfrak{J}(\mathfrak{K})$ nicht, kann also mit $\mathfrak{K}$ höchstens Berührungspunkte aufweisen. Liegt ein solcher auf $\mathfrak{L}$, so bleiben die Ordnungen k und u^* ungeändert, die erstere, weil $\mathfrak{J}(\mathfrak{K})$ nicht verlassen wird, die letztere, weil der Berührungspunkt auf $\mathfrak{L}$ und nicht auf $\mathfrak{U}^*$ liegt, mithin wegen (18^2) auch die Ordnung u. Liegt der Berührungspunkt auf $\mathfrak{L}^*$, so ändern k und u und also, wiederum wegen (18^2), auch u^* sich nicht. Die drei Ordnungen sind daher auf $\mathfrak{W}$ bis zum Punkt A konstant. In A ändert u^* sich nicht; k nimmt, da $\mathfrak{J}(\mathfrak{K})$ verlassen wird, den Wert Null an. Für einen Punkt H, der auf $\mathfrak{W}$ hinter A, aber vor dem nächsten Treffpunkt mit $\mathfrak{K}$ gelegen ist, bestehen daher die folgenden Beziehungen, die mit den entsprechenden für P verglichen werden sollen:

$$u(H) + u^*(H) = k(H), \quad u(P) + u^*(P) = k(P);$$
$$u^*(H) = u^*(P), \quad k(H) = 0, \quad k(P) = 1;$$

folglich:

$$(18^5) \qquad u(H) = u(P) - 1$$

und wegen (18^3):

$$(18^6) \qquad u(H) = u(Q) - 1.$$

Auf Grund von (18^6) müssen auf dem Stück HQ von $\mathfrak{W}$ noch Punkte von $\mathfrak{L}$ gelegen sein, und zwar, da die Ordnung u in einem Berührungspunkt, wie oben gezeigt, sich nicht ändert und in einem Austrittspunkt nach (18^5) um Eins abnimmt, auch Eintrittspunkte. E sei der letzte Eintrittspunkt. Das Stück AE von $\mathfrak{L}$ hat, da $\mathfrak{L}$ ein freier Kreisbogen ist, mit der g. e. K. $\mathfrak{C}$ keinen Punkt gemein und kann daher durch einen e. P. $\mathfrak{w}$ approximiert werden, der mit $\mathfrak{A}(\mathfrak{K})$ und mit $\mathfrak{C}$ keinen Punkt gemein hat. Ersetzt man das Stück AE von $\mathfrak{W}$ durch $\mathfrak{w}$, so erhält man einen neuen in $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ verlaufenden Weg PQ, der mindestens einen Aus-

[25]) E. S. S. 327.
[26]) E. S. S. 328.

trittspunkt weniger aufweist als der ursprüngliche Weg $\mathfrak{W}$. Damit ist (18) bewiesen.

Ein Korollar zu (18) ist:

(19) *Je zwei auf $\mathfrak{K}$ gelegene Punkte aus $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ lassen sich durch einen in $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ verlaufenden e. P. verbinden, der in $\mathfrak{J}(\mathfrak{K}')$ nicht eintritt.*

Der Beweis von (19) sei nur kurz angedeutet: Je zwei auf $\mathfrak{K}$ gelegene, dem Gebiet $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ angehörende Punkte P', Q' lassen sich durch einen in $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ verlaufenden e. P. verbinden. Es ist ein Verfahren anzugeben, durch das die Anzahl der bei der Durchlaufung dieses Weges von P' nach Q' auftretenden Eintrittspunkte in $\mathfrak{J}(\mathfrak{K}')$ um mindestens Eins vermindert wird, solange sie von Null verschieden ist. Dieses Verfahren ergibt sich analog wie das entsprechende beim Beweis von (18).

Man konstruiere nun um den vorgeschriebenen Punkt C der g. e. K. $\mathfrak{C}$ die Folge konzentrischer Kreise $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n, \ldots$, in der jeder zum vorhergehenden in charakteristischer Lage ist und in der außerdem die Radien gegen Null konvergieren. Dann läßt sich zeigen:

(20) *Eine von einem gewissen Punkt Q_1 von $\mathfrak{K}_1$ ausgehende, in $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ gelegene einfache Streckenfolge $\mathfrak{F}$ läßt sich so angeben, daß ihre Ecken gegen C konvergieren und daß sie, mit Ausnahme von Q_1, ganz in $\mathfrak{J}(\mathfrak{K}_1)$ enthalten ist. — Die letztere Bedingung läßt sich im allgemeinen nicht erfüllen, wenn der Anfangspunkt der Streckenfolge auf $\mathfrak{K}_1$ vorgeschrieben wird.*

Beweis von (20): Nach (17^1) kann man angeben:

$$Q_n \subset \mathfrak{K}_n \cdot \mathfrak{G}(\mathfrak{C}), \quad P_{n+3} \subset \mathfrak{K}_{n+3} \cdot \mathfrak{G}(\mathfrak{C});$$ [27]

$Q_n \underset{\mathfrak{C}}{—} P_{n+3}$ und zwar durch einen e. P. $\mathfrak{P}_n$, $\mathfrak{P}_n \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{K}_n) \cdot \mathfrak{A}(\mathfrak{K}_{n+3})$.

Ebenso:

$$Q_{n+3} \subset \mathfrak{K}_{n+3} \cdot \mathfrak{G}(\mathfrak{C}), \quad P_{n+6} \subset \mathfrak{K}_{n+6} \cdot \mathfrak{G}(\mathfrak{C}).$$

Andererseits erhält man nach (18) und (19):

$P_{n+3} \underset{\mathfrak{C}}{—} Q_{n+3}$ und zwar durch einen e. P. $\mathfrak{P}'_{n+3}$,

$$\mathfrak{P}'_{n+3} \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{K}_{n+2}) \cdot \mathfrak{A}(\mathfrak{K}_{n+4}) + \mathfrak{K}_{n+2} + \mathfrak{K}_{n+4}$$ [28].

---

[27]) Warum hier je zwei Kreise der Folge übersprungen werden, warum man also auf Grund von (17^1) von Q_n auf $\mathfrak{K}_n$ nach P_{n+3} auf $\mathfrak{K}_{n+3}$ statt nach P_{n+1} auf $\mathfrak{K}_{n+1}$ fortgeht, wird am Schluß des Beweises erläutert werden.

[28]) Gehören P_{n+3} und Q_{n+3} demselben freien Bogen des Kreises $\mathfrak{K}_{n+3}$ an, so kann man als $\mathfrak{P}'_{n+3}$ einen diesem Bogen einbeschriebenen, $\mathfrak{C}$ nicht treffenden e. P. nehmen.

Um die geforderte e. S. $\mathfrak{F}$ herzustellen, beginne man auf $\mathfrak{K}_1$ mit einem nach (17¹) bestimmten Punkt Q_1 und gehe von Q_1 längs $\mathfrak{P}_1$ nach P_4 auf $\mathfrak{K}_4$, von P_4 längs $\mathfrak{P}_4'$ nach Q_4, von Q_4 längs $\mathfrak{P}_4$ nach P_7 auf $\mathfrak{K}_7$ usw. Durch Aneinanderreihung der e. P. $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_4', \mathfrak{P}_4, \mathfrak{P}_7', \ldots, \mathfrak{P}_{3\nu+1}, \mathfrak{P}_{3\nu+4}', \mathfrak{P}_{3\nu+4}, \mathfrak{P}_{3\nu+7}', \ldots$ entsteht eine Streckenfolge $\mathfrak{F}_1$, die in $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ und, mit Ausnahme von Q_1, in $\mathfrak{J}(\mathfrak{K}_1)$ verläuft und deren Ecken gegen den Mittelpunkt C der Kreise $\mathfrak{K}_n$ konvergieren, da in jedem Kreisring $\mathfrak{J}(\mathfrak{K}_m)\cdot\mathfrak{A}(\mathfrak{K}_{m+\mu})$ höchstens endlich viele Ecken von $\mathfrak{F}_1$ enthalten sind. $\mathfrak{F}_1$ erfüllt allerdings noch nicht die Forderungen der Einfachheit (vgl. Anfang dieses Paragraphen), und zwar wird die Einfachheit nur dadurch gestört, daß je zwei aufeinander folgende e. P. der Folge $\mathfrak{F}_1$ außer dem gemeinsamen Endpunkt noch Punkte gemein haben können. Dagegen sind je zwei e. P., die in $\mathfrak{F}_1$ durch einen e. P. getrennt sind, abgesehen von höchstens einem gemeinsamen Endpunkt bereits gegeneinander punktfremd. Auf Grund dieses Verhaltens kann $\mathfrak{F}_1$ in eine e. S. $\mathfrak{F}$ zusammengezogen werden: Man durchlaufe $\mathfrak{P}_1$ von Q_1 aus bis zum ersten Punkt R_4' des Durchschnitts $\mathfrak{P}_1\cdot\mathfrak{P}_4'$ und gehe in R_4' auf $\mathfrak{P}_4'$ über. $\mathfrak{P}_2'$ verfolge man von R_4' aus weiter bis zum ersten Punkt R_4 von $\mathfrak{P}_4'\cdot\mathfrak{P}_4$; in R_4 gehe man auf $\mathfrak{P}_4$ über usw. Damit ist der Satz (20) und zugleich der Satz von der Erreichbarkeit (17) vollständig bewiesen.

Wäre man beim Beweise von einem Kreise $\mathfrak{K}_n$ der Folge stets zum nächsten Kreise $\mathfrak{K}_{n+1}$, also nach folgendem, aus (17¹), (18) und (19) abgeleiteten Schema fortgegangen:

$$Q_n \subset \mathfrak{K}_n\cdot\mathfrak{G}(\mathfrak{C}),\quad P_{n+1}\subset\mathfrak{K}_{n+1}\cdot\mathfrak{G}(\mathfrak{C});$$

$$Q_n \underset{\mathfrak{C}}{\text{—}} P_{n+1} \text{ und zwar durch einen e. P. } \mathfrak{P}_n,\ \mathfrak{P}_n\subset\mathfrak{J}(\mathfrak{K}_n)\cdot\mathfrak{A}(\mathfrak{K}_{n+1});$$

$$P_{n+1} \underset{\mathfrak{C}}{\text{—}} Q_{n+1} \text{ und zwar durch einen e. P. } \mathfrak{P}_{n+1}',$$

$$\mathfrak{P}_{n+1}'\subset\mathfrak{J}(\mathfrak{K}_n)\cdot\mathfrak{A}(\mathfrak{K}_{n+2})+\mathfrak{K}_n+\mathfrak{K}_{n+2},$$

so hätte sich die Zusammenziehung der durch Aneinanderreihung der e. P. $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2', \ldots$ gebildeten Streckenfolge $\overline{\mathfrak{F}}_1$ in eine einfache Streckenfolge nicht so elementar durchführen lassen. Während nämlich in der oben konstruierten Folge $\mathfrak{F}_1$ die Einfachheit nur durch je zwei benachbarte e. P. gestört werden kann, kann in $\overline{\mathfrak{F}}_1$ jeder e. P. mit den beiden vorhergehenden und mit den beiden folgenden e. P. der Folge noch die Einfachheit störende Punkte gemein haben. Die Vorschrift zur Verwandlung von $\overline{\mathfrak{F}}_1$ in eine einfache Streckenfolge würde daher so unübersichtlich ausfallen, daß die

Anwendung eines allgemeinen Satzes von Kaluzsay und Tietze[29]), die bei der obigen Konstruktion vermieden werden konnte, vorzuziehen wäre.

Zwei unmittelbare Folgerungen aus (17) sind:

(21) *Vorgeschrieben*: Eine g. e. K. $\mathfrak{C}$; $C \subset \mathfrak{C}$; $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$; $G \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{C})$.
Konstruierbar: Ein Einschnitt $\mathfrak{E} = [GC]_g^{\mathfrak{C}}$.

Beweis. Man wähle den ersten Kreis $\mathfrak{K}_1$ der in (20) konstruierten Kreisfolge $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n, \ldots$ so, daß G nicht in $\mathfrak{J}(\mathfrak{K}_1)$ liegt. Für einen gewissen Punkt $Q_1 \subset \mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ kann man nach (20) die e. S. $\mathfrak{F}$ konstruieren. Andererseits lassen sich G und Q_1 durch einen in $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ verlaufenden e. P. $\mathfrak{P}$ verbinden, der auf Grund von (19) nicht in $\mathfrak{J}(\mathfrak{K}_2)$ eintritt. $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{P}$ haben also nur endlich viele Punkte gemein. Schaltet man $\mathfrak{P}$ vor $\mathfrak{F}$, so kann man sofort eine e. S. herstellen, die zusammen mit C den gesuchten e. B. $\mathfrak{E}$ darstellt.

(22) *Vorgeschrieben*: Eine g. e. K. $\mathfrak{C}$; $C_1 \subset \mathfrak{C}$, $C_2 \subset \mathfrak{C}$; $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$.
Konstruierbar: Ein Querschnitt $\mathfrak{Q} = (C_1 C_2)_g^{\mathfrak{C}}$.

Beweis. Von einem beliebigen Punkt H in $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ lasse man nach (21) zwei in $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ verlaufende e. S. $\mathfrak{F}_\nu$ ausgehen, deren Ecken gegen C_ν konvergieren ($\nu = 1, 2$). $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ können außer H noch höchstens endlich viele Punkte gemein haben; ist H_1 der bei der Durchlaufung der e. S. $\mathfrak{F}_1$ von H aus auftretende letzte Punkt von $\mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2$, so erhält man durch Streichung der Stücke HH_1 aus $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ den gesuchten Querschnitt $\mathfrak{Q}$.

In (21) und (22) ergeben sich $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{Q}$ im allgemeinen nicht, wie in den weniger aussagenden Sätzen (7) und (8), als e. P., sondern als beliebige e. B.

§ 7.

Die Ergänzung des e. B. zu einer g. e. K.

(23) *Jeder e. B. läßt sich zu einer g. e. K. ergänzen.*

Beweis: Die Betrachtungen, die beim Beweis des Satzes von der Erreichbarkeit (17) für einen beliebigen Punkt einer g. e. K. angestellt wurden, lassen sich mit unwesentlichen Änderungen auf den Fall übertragen, daß dieser Punkt Endpunkt eines e. B. $\mathfrak{B} = B_1 B_2$ ist. Die Änderungen sind notwendig, weil der e. B. die Ebene nicht zerlegt.

Was zunächst die Konstruktion der in (18) und (19) benutzten Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ betrifft, so ist der Kreis $\mathfrak{K}$ mit dem Mittelpunkt B_1 so

[29]) Sind A und B Punkte einer stetigen Kurve $\mathfrak{S}$, so läßt sich ein e. B. mit den Endpunkten A und B angeben, der ganz aus Punkten von $\mathfrak{S}$ besteht (vgl. Kerékjártó, Topologie I, S. 103).

zu wählen, daß $B_2 \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{K})$, d. h. daß $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{K} \neq 0$ ist. Ist D der bei der Durchlaufung des Bogens $\mathfrak{B}$ von B_1 aus auftretende erste Punkt von $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{K}$, so hat der zum Teilbogen $\mathfrak{b} = B_1 D$ von $\mathfrak{B}$ komplementäre Bogen $\mathfrak{b}^* = D B_2$ von B_1 eine positive Entfernung. Wird der Radius von $\mathfrak{K}'$ kleiner genommen als diese Entfernung, so ist nach (17^2) $\mathfrak{K}'$ in charakteristischer Lage gegen $\mathfrak{K}$ und nach (17^3) und (17^4):

$$(23^1) \qquad \mathfrak{K}' \cdot \mathfrak{B} \subset \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b}^* \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{K}').$$

Die zu (17^1), (18) und (19) analogen Aussagen erhält man, indem man $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ durch den zu $\mathfrak{B}$ komplementären Teil der Ebene ersetzt:

(23^2) Es lassen sich zwei nicht auf $\mathfrak{B}$ liegende Punkte Q, Q' so angeben, daß

$$Q \subset \mathfrak{K}, \quad Q' \subset \mathfrak{K}';$$

$Q - Q'$ (mod $\mathfrak{B}$), und zwar durch einen e. P. $\mathfrak{P}$; $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{K}) \cdot \mathfrak{A}(\mathfrak{K}')$.

(23^3) Je zwei auf $\mathfrak{K}'$, aber nicht auf $\mathfrak{B}$ liegende Punkte lassen sich durch einen $\mathfrak{B}$ nicht treffenden e. P. verbinden, der in $\mathfrak{A}(\mathfrak{K})$ nicht eintritt.

(23^4) Je zwei auf $\mathfrak{K}$, aber nicht auf $\mathfrak{B}$ liegende Punkte lassen sich durch einen $\mathfrak{B}$ nicht treffenden e. P. verbinden, der in $\mathfrak{J}(\mathfrak{K}')$ nicht eintritt.

Es genügt anzudeuten, wie der Beweis von (23^3) aus dem von (18) entnommen wird: Ist wieder $\mathfrak{L} = F_1 F_2$ ein freier Bogen des Kreises $\mathfrak{K}$, so sind F_1, F_2 auf $\mathfrak{b}^*$ gelegen; der Teilbogen $\mathfrak{f}_{12} = F_1 F_2$ von $\mathfrak{B}$ ist mithin ganz in $\mathfrak{A}(\mathfrak{K}')$ enthalten. Die Kurven $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ werden wie früher gebildet, und alles weitere kann fast wörtlich übertragen werden. Aus (23^2), (23^3) und (23^4) erhält man:

(23^5) *Vorgeschrieben*: Ein e. B. $\mathfrak{B} = B_1 B_2$; ein Endpunkt B_ν von $\mathfrak{B}$, $\nu = 1, 2$; ein nicht auf $\mathfrak{B}$ liegender Punkt P.

Konstruierbar: Eine von P ausgehende, $\mathfrak{B}$ nicht treffende e. S., deren Ecken gegen B_ν konvergieren.

Es sind also zunächst die Endpunkte des e. B. $\mathfrak{B}$ von jedem nicht auf $\mathfrak{B}$ liegenden Punkt der Ebene aus im Sinn von § 6 erreichbar. Daraus ergibt sich unmittelbar der Beweis von (23): Ist P ein $\mathfrak{B}$ nicht angehörender Punkt, so kann man mit P als Ausgangspunkt je eine $\mathfrak{B}$ nicht treffende e. S. $\mathfrak{F}_\nu$ angeben, deren Ecken gegen B_ν konvergieren. $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ können außer P noch Punkte gemein haben. Da aber B_1 und B_2 voneinander verschieden sind, so kann man (vgl. Beweis von (22)) durch Fortlassung je eines e. P. aus den $\mathfrak{F}_\nu$ zwei e. S. $\mathfrak{F}_\nu'$ herstellen, die in einem Punkte P' beginnen und sonst gegeneinander punktfremd sind,

die $\mathfrak{B}$ nicht treffen und deren Ecken gegen B_ν konvergieren. $\mathfrak{F}'_\nu$ bildet zusammen mit B_ν einen e. B. $\mathfrak{j}_\nu$. Da $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{j}_\nu = B_\nu$, $\mathfrak{j}_1 \cdot \mathfrak{j}_2 = P'$, so ist $\mathfrak{j}_1 + \mathfrak{B} + \mathfrak{j}_2$ eine g. e. K.

Mit Hilfe von (23) können die Sätze (9) und (17) von der g. e. K. auf den e. B. übertragen werden:

(24) *Die geradlinig erreichbaren Punkte liegen auf jedem e. B. überall dicht.*

(25) *Jeder Punkt eines e. B. $\mathfrak{B}$ ist von jedem nicht auf $\mathfrak{B}$ gelegenen Punkt der Ebene aus erreichbar.*

(Eingegangen am 23. Februar 1926.)

Konvergenzsätze für Fourierreihen grenzperiodischer Funktionen.

Von

S. Bochner in München.

Einleitung.
§ 1. Über die Beziehungen grenzperiodischer Funktionen zu reinperiodischen.
§ 2. Kriterien für gleichmäßige Konvergenz.
§ 3. Beispiele für Divergenz von Hauptfolgen (von Herrn H. Bohr).
§ 4. Kriterien für Konvergenz in Punkten.
§ 5. Grenzperiodische Funktionen der Integrationsklasse L.
Anhang. Ein Konvergenzkriterium für allgemeine fastperiodische Funktionen.
Verzeichnis der zitierten Literatur*).

Einleitung.

Im folgenden betrachten wir grenzperiodische Funktionen einer reellen Variablen (Bohr [1, 2], insbesondere [2], Kap. IV und Anhang II, § 3). Grenzperiodische Funktionen sind allgemeiner als reinperiodische, aber ihrerseits nur Spezialfälle fastperiodischer Funktionen.

Eine jede fpe[1]) Funktion $f(x)$ ist durch Exponentialpolynome, d. h. Summen der Gestalt

$$\sum_{n=1}^{N} a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x},$$

approximierbar, und zwar kann man solche Approximationspolynome (auf verschiedene Weisen) durch Summation der Fourierreihe

$$\sum A_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x}$$

---

*) Die vorliegende Arbeit wurde bei der philosophischen Fakultät II. Sektion der Universität München als Habilitationsschrift eingereicht.

[1]) Wir benutzen die Abkürzungen: rp = reinperiodisch, gp = grenzperiodisch fp = fastperiodisch.

von $f(x)$ erhalten. Man kann nämlich zu jeder Zahlenfolge

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots \tag{1}$$

ein Schema (rationaler) Koeffizienten

$$r_{\Lambda_n}^{(m)} \qquad (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

angeben, in welchem bei festem m nur endlich viele von Null verschieden sind, so daß für jede fpe Funktion der Form

$$f(x) \sim \sum A_{\Lambda_n} e^{i \Lambda_n x}$$

(deren Exponenten also der Folge (1) entnommen sind), die mit ihren Fouriertermen gebildeten Exponentialpolynome

$$S_m(x) = \sum r_{\Lambda_n}^{(m)} A_{\Lambda_n} e^{i \Lambda_n x} \qquad (m = 1, 2, 3, \dots) \tag{2}$$

gegen $f(x)$ konvergieren [2]).

Unter einem Konvergenzkriterium für fpe Funktionen verstehen wir eine Voraussetzung über die „Regularität" von $f(x)$, wie Differentiierbarkeit, beschränkte Variation, Erfüllen einer Lipschitz-Bedingung usw., kraft welcher man zu jeder Folge (1) die Zahlen $r_{\Lambda_n}^{(m)}$ so wählen kann, daß die von Null verschiedenen unter ihnen alle den Wert 1 haben, d. h. so, daß die dazugehörigen Polynome (2) als „Partialsummen" der Fourierreihe von $f(x)$ erscheinen.

Es dürfte nicht ganz leicht sein (vgl. Anhang), solche Kriterien für allgemeine fpe Funktionen zu finden; man kann aber solche Konvergenzkriterien mit Leichtigkeit für gpe Funktionen angeben, wie wir in den folgenden Paragraphen zeigen wollen.

Wir wollen noch zuvor einen Hilfssatz über allgemeine fpe Funktionen angeben, welcher etwas allgemeiner als der Konvergenzhilfssatz in Bohr [2], S. 110 ist.

Wir erinnern daran, daß Funktionen $\varphi(x)$ einer Menge A eine „ausgezeichnete Menge" bilden (Bohr [2], S. 107), wenn sie gleichartig gleichmäßig stetig sind und gemeinsame („relativ dicht" gelegene) Verschiebungszahlen haben. Für die Ausgezeichnetheit genügt, daß die Funktionen $\varphi(x)$ eine „Majorante" besitzen, d. h. daß es eine fpe Funktion $f(x)$ gibt, derart daß

$$\underset{-\infty < x < +\infty}{\text{ob. Gr.}} |\varphi(x+\tau) - \varphi(x)| \leqq \underset{-\infty < x < +\infty}{\text{ob. Gr.}} |f(x+\tau) - f(x)|$$
$$(-\infty < \tau < +\infty).$$

[2]) Unter Konvergenz (bzw. Approximation) verstehen wir, wenn nichts anderes aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, gleichmäßige Konvergenz (bzw. Approximation) im Gesamtintervall $-\infty < x < +\infty$.

Eine Folge von fpen Funktionen

$$f_\nu(x) \sim \sum A_{\Lambda_n}^{(\nu)} e^{i\Lambda_n x}$$

(wo auch beliebig viele unter den $A_{\Lambda_n}^{(\nu)}$ Null sein können) heiße *formal konvergent* (bzw. formal konvergent gegen

$$f(x) \sim \sum A_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x}),$$

wenn für jedes n der Limes

$$\lim_{\nu \to \infty} A_{\Lambda_n}^{(\nu)}$$

existiert und endlich (bzw. existiert und $= A_{\Lambda_n}$) ist.

Hilfssatz. *Eine ausgezeichnete Folge*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots, \tag{3}$$

die formal konvergiert, ist konvergent.

Beweis. Aus der formalen Konvergenz (nämlich aus der Beschränktheit der $A_0^{(\nu)}$) einer ausgezeichneten Folge folgt leicht, daß sie auch beschränkt ist (Bochner [1], Fußnote 4). Für eine beschränkte ausgezeichnete Menge gilt aber, daß man aus jeder ihrer Folgen eine konvergente Teilfolge auswählen kann (Bochner [1], § 5. 3). Wäre nun die Folge (3) nicht konvergent, dann enthielte sie (mindestens) zwei konvergente Teilfolgen mit *verschiedenen* Limesfunktionen. Wegen der formalen Konvergenz der Gesamtfolge wären aber die Fourierreihen der Limesfunktionen gleich, also nach dem Eindeutigkeitssatz diese Funktionen selbst einander gleich, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

§ 1.

Über die Beziehungen grenzperiodischer Funktionen zu reinperiodischen.

1. Eine gpe Funktion

$$f(x) \sim \sum A_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x}$$

ist einerseits dadurch charakterisierbar, daß es eine Zahl Q gibt, derart daß

$$\Lambda_n = r_n Q,$$

wo r_n (irgendwelche) rationale Zahlen sind, und andererseits dadurch, daß sie durch rpe Funktionen approximiert werden kann. Für die Approximation besonders geeignet sind die „Unterfunktionen"

$$f_q(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{\frac{n}{q}} e^{i\frac{n}{q}x}$$

von $f(x)$, welche rp mit den respektiven Perioden $2\pi q$ sind und deren

Fourierreihen aus genau allen denjenigen Termen der Fourierreihe von $f(x)$ bestehen, welche in einer Funktion der Periode $2\pi q$ auftreten können. Setzt man

$$(4) \qquad f_q^{\varkappa}(x) = \frac{1}{\varkappa}(f(x) + f(x + 1 \cdot 2\pi q) + f(x + 2 \cdot 2\pi q) + \ldots + (x + \overline{\varkappa - 1} \cdot 2\pi q)),$$

dann erhält man $f_q(x)$ durch die Limesgleichung

$$f_q(x) = \lim_{\varkappa \to \infty} f_q^{\varkappa}(x)$$

(vgl. Bohr [2], S. 201 ff.).

Dieser Limes existiert gleichmäßig, wie direkt leicht einzusehen ist (Bohr [2], loc. cit.) und was auch aus dem Hilfssatz in der Einleitung folgt, weil die Funktionen $f_q^{\varkappa}(x)$ die Funktion $f(x)$ zur Majorante haben und formal gegen $f_q(x)$ konvergieren. Die Gesamtheit der Funktionen $f_q(x)$ ist wiederum ausgezeichnet (mit $f(x)$ als Majorante), also ist jede ihrer formal konvergenten Folgen konvergent; z. B. ist die Folge $f_{q_\mu}(x)$ mit

$$q_\mu = \frac{\mu!}{Q} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

eine Approximationsfolge von $f(x)$. Die $f_q(x)$ stehen nun zu $f(x)$ in dem angenehmen Verhältnis, daß sich, wie an (4) zu ersehen ist, jede gleichmäßige Regularität von $f(x)$, z. B. beschränkter Differentialquotient, Lipschitz-Bedingung usw., auf diese Unterfunktionen „fortpflanzt", und, was für uns ausschlaggebend sein wird, für alle $f_q(x)$ sogar „gleichartig" erfüllt ist. Z. B. gilt für den Stetigkeitsmodul

$$\omega_f(\delta) = \underset{|x_1 - x_2| \leqq \delta}{\text{ob. Gr.}} |f(x_1) - f(x_2)|$$

die Relation

$$\omega_{f_q}(\delta) \leqq \omega_f(\delta).$$

Wenn also $f(x)$ die Lipschitz-Dini-Bedingung

$$\omega_f(\delta) \log \frac{1}{\delta} = \alpha_f(\delta) = o(1)$$

erfüllt, dann erfüllt auch $f_q(x)$ „dieselbe" Lipschitz-Dini-Bedingung

$$\omega_{f_q}(\delta) \log \frac{1}{\delta} = \alpha_{f_q}(\delta) \leqq \alpha_f(\delta) = o(1).$$

Nach einem bekannten Satze kann nun $f_q(x)$ mit beliebiger Genauigkeit durch eines ihrer Partialpolynome

$$(5) \qquad S_n^q(x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} A_\nu \, e^{i \frac{\nu}{q} x}$$

approximiert werden, also kann $f(x)$ selbst, weil durch Funktionen $f_q(x)$ approximierbar, durch eine passende Folge

$$S_{n_\mu}^{q_\mu}(x) \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

approximiert werden. In ähnlicher Weise wirken sich auch andere Konvergenzkriterien rper Funktionen auf gpe aus. Wir werden daher darauf geführt, *die Gesamtheit der für alle* $q > 0$ *und ganzzahlige* $n > 0$ *gebildeten Polynome* (5) *als Partialpolynome von* $f(x)$ anzusehen und zu untersuchen, welcher Art Folgen (6) unter den in Frage kommenden Konvergenzvoraussetzungen konvergieren, und ob man solche Folgen in bloßer Abhängigkeit von den Konvergenzbedingungen angeben kann. Unsere Aufgabe besteht daher eigentlich darin, für rpe Funktionen mit variabler Periode $2\pi q$, insbesondere für $q \to \infty$, für die Güte der Konvergenz ihrer Partialsummen bei „gleichartigen" Konvergenzkriterien Abschätzungen vorzunehmen[3]).

Unter einer *Hauptfolge* von $f(x)$ verstehen wir jede formal gegen $f(x)$ konvergierende Folge von Partialpolynomen. Für rpe Funktionen beziehen sich alle Konvergenzsätze auf *jede* Hauptfolge, nicht aber für gpe. Damit eine Folge (6) gegen $f(x)$ konvergiert ist notwendig (aber noch lange nicht hinreichend), daß sie eine Hauptfolge ist[4]). In unseren Konvergenzsätzen werden daher „Zusatzbedingungen" auftreten, welche sich auf die Art der „zulässigen" Hauptfolgen beziehen. Diese Zusatzbedingungen sind derart, daß sie für rpe Funktionen von selbst erfüllt sind. Daß es auch bei sehr regulären, und zwar bei unendlich oft differentiierbaren und sogar im Sinne von Bohr [3] analytischen gpen Funktionen divergente Hauptfolgen geben kann, zeigen Beispiele von Herrn H. Bohr, die wir mit gütiger Zustimmung des Herrn Verfassers in § 3 näher ausführen werden.

2. Wir geben jetzt eine Zusammenstellung derjenigen Sätze über rpe Funktionen, die wir auf gpe Funktionen übertragen werden.

Für eine rpe Funktion $f_q(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{i\frac{n}{q}x}$ konvergieren die Partialsummen

$$S_n^q(x) = \sum_{\varkappa=-n}^{+n} A_\varkappa e^{i\frac{\varkappa}{q}x}$$

---

[3]) Diese Konvergenzkriterien sind gleichartig erfüllt, solange die Funktionen ihre verschiedenen Perioden $2\pi q_\mu$ haben. Führt man sie aber durch die Transformation $y = q_\mu x$ auf die gemeinsame Periode 2π zurück, dann werden sie sehr ungleichartig, und zwar um so ungünstiger, je größer q_μ ist.

[4]) Dies ist streng genommen nur für gleichmäßige Konvergenz richtig.

im Punkte x gegen $f_q(x)$, wenn $f_q(x)$ in x einer der bekannten Konvergenzbedingungen[5]) von Lipschitz, Dini, Jordan(-Dirichlet), de la Vallée Poussin, W. H. Young, Lebesgue usw. genügt[6]). Z. B. lautet die Lipschitz-Bedingung dahin, daß

$$|f_q(x) - f_q(x+\delta)| \leqq C|\delta|^\varrho, \quad (|\delta| \leqq \delta_0;\ C>0,\ 0<\varrho\leqq 1),$$

die Jordansche, daß $f(x)$ in der Umgebung von x von beschränkter Variation sei und die Bedingung von de la Vallée Poussin, daß die Funktion

$$S = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f_q(x+2t)\,dt$$

in einem Intervall $0 \leqq h \leqq h_0$ von beschränkter Variation sei.

3. Alle erwähnten Konvergenzkriterien werden so bewiesen, daß das Integral

$$\pi(S_n^q(x) - f_q(x)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}q} (f_q(x+2t) + f_q(x-2t) - 2f_q(x)) \frac{\sin\frac{2n+1}{q}t}{q\sin\frac{t}{q}}\,dt$$

in

$$\int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}q} \qquad (0<\varepsilon<\tfrac{\pi}{2}q)$$

zerlegt wird; bei festgehaltenem ε konvergiert für $n\to\infty$ der zweite Summand (für jedes $f_q(x)$) auf Grund des Riemannschen Lemmas gegen Null, während der erste Summand auf Grund des Konvergenzkriteriums mit ε gegen Null geht, und zwar unabhängig von q[7]). Für die Unterfunktionen $f_q(x)$ einer gpen Funktion $f(x)$ geht die gleichartige Abschätzung von $\int_0^{\varepsilon}$ in derselben Weise vor sich, hingegen nicht die von $\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}q}$, weil für anwachsendes q das Integrationsintervall unendlich groß wird. Das Riemannsche Lemma ist dann noch für die Abschätzung von $\int_{\varepsilon q}^{\frac{\pi}{2}q}$ anwendbar, so

[5]) Wegen aller auf rpe Funktionen bezüglichen Tatsachen und Benennungen sei auf Hilb-Riesz [1] verwiesen.

[6]) Für rpe Funktionen umfaßt zwar das Kriterium von Lebesgue die anderen, bei der Übertragung auf gpe Funktionen sind aber für die spezielleren Kriterien die hinzukommenden „Zusatzbedingungen" (vgl. § 2) weniger einschränkend.

[7]) Für die meisten Kriterien sogar auch unabhängig von n, was aber für uns kein Vorteil ist.

daß $\int_{\varepsilon}^{\varepsilon q}$ der entscheidende Summand ist. Zur Abschätzung des letzteren bedarf es einer erneuten Heranziehung des Konvergenzkriteriums (bzw. eines „Zusatzkriteriums“) und der „Zusatzbedingung“, so daß letztere nur von diesem Bestandteil herrührt.

4. Für gleichmäßige Konvergenz (in $-\infty < x < +\infty$) der rpen Funktion $f_q(x)$ ist hinreichend, daß sie eine Lipschitz-Dini-Bedingung

$$\omega_{f_q}(\delta)\log\frac{1}{\delta} = \alpha_{f_q}(\delta) = o(1)$$

oder eines der Punktkriterien gleichmäßig erfüllt. Die gleichmäßige Jordan-Bedingung lautet z. B. dahin, daß

$$f(x) = P_1(x) - P_2(x),$$

wo $P_1(x)$ und $P_2(x)$ monoton wachsende und (in $-\infty < x < +\infty$) gleichmäßig stetige Funktionen sind[8]).

5. Den Fall der Lipschitz-Dini-Bedingung beweist man am schnellsten mit einem Satz von Lebesgue, wonach für eine Funktion $f(x)$ mit der Periode 2π

$$|S_n(x) - f(x)| \leqq K\log n\,\omega_f\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \geqq 2),$$

wobei K eine absolute, d. h. von $f(x)$ und n unabhängige Konstante bedeutet (Lebesgue [1]).

§ 2.

Kriterien für gleichmäßige Konvergenz.

Satz A. *Eine grenzperiodische Funktion $f(x)$ erfülle eine der folgenden drei Bedingungen*:

I *Lipschitz-Bedingung*

$$\omega_f(\delta) \leqq C\delta^{\varrho} \qquad (C > 0,\ o < \varrho \leqq 1).$$

II *Lipschitz-Dini-Bedingung*

$$\omega_f(\delta)\log\frac{1}{\delta} = \alpha(\delta) = o(1)$$

III *Gleichmäßige Jordan-Bedingung*

$$f(x) = P_1(x) - P_2(x)$$

$$\frac{P_i(x_1) - P_i(x_2)}{x_1 - x_2} \geqq 0,\ \omega_{P_i}(\delta) = o(1) \quad (i = 1, 2,\ x_1 \gtrless x_2).$$

[8]) Für eine rpe Funktion bedeutet dies natürlich soviel wie beschränkte Variation im Grundintervall.

Dann ist jede Hauptfolge

$$(7) \qquad S_{n_\mu}^{q_\mu}(f,x) \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

für welche die Zusatzbedingung

$$\mathrm{I}_1 \quad \lim_{\mu=\infty} \frac{q_\mu |\log q_\mu|^{\frac{1}{\varrho}}}{n_\mu} = 0,$$

$$\mathrm{II}_1 \quad \lim_{\mu=\infty} \frac{q_\mu^{1+\sigma}}{n_\mu} = 0 \ (\textit{für irgendein festes } \sigma > 0),$$

$$\mathrm{III}_1 \quad \lim_{\mu=\infty} \frac{q_\mu \log q_\mu}{n_\mu} = 0$$

erfüllt ist, gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergent.

Bemerkung. Für

$$q_\mu = \frac{\mu!}{Q}, \qquad n_\mu = (\mu!)^2. \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist die Folge (7) eine Hauptfolge, welche jeder Zusatzbedingung genügt.

Beweis. Da für eine Hauptfolge

$$8) \qquad S_{n_\mu}^{q_\mu}(f,x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

die entsprechenden Funktionen $f_{q_\mu}(x)$ formal, also gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergieren, ist die Konvergenz von (8) gegen $f(x)$ mit der Konvergenz von

$$S_{n_\mu}^{q_\mu}(x) - f_{q_\mu}(x)$$

gegen Null äquivalent.

Nach Lebesgue ist, vgl. § 1, 5, für Funktionen mit der Periode $2\pi q$

$$|S_n^q(x) - f_q(x)| \leqq K \log n \, \omega_{f_q}\left(\frac{q}{n}\right).$$

Für unsere Hauptfolge (8) ergibt das

$$|S_{n_\mu}^{q_\mu}(x) - f_{q_\mu}(x)| \leqq K \log n_\mu \, \omega_f\left(\frac{q_\mu}{n_\mu}\right)$$

und daher

$$\mathrm{I} \qquad |S_{n_\mu}^{q_\mu}(x) - f_{q_\mu}(x)| \leqq K \log n_\mu \, C \left(\frac{q_\mu}{n_\mu}\right)^\varrho$$

bzw.

$$\mathrm{II} \qquad |S_{n_\mu}^{q_\mu}(x) - f_{q_\mu}(x)| \leqq K \log n_\mu \frac{\alpha_f\left(\frac{q_\mu}{n_\mu}\right)}{\log \frac{n_\mu}{q_\mu}}$$

Aus $\frac{q_\mu}{n_\mu} |\log q_\mu|^{\frac{1}{\varrho}} \to 0$ folgt $\frac{q_\mu}{n_\mu} |\log n_\mu|^{\frac{1}{\varrho}} \to 0$ und aus $\frac{q_\mu^{1+\sigma}}{n_\mu} \to 0$ folgt

$\frac{\log n_\mu}{\log n_\mu - \log q_\mu} = O(1)$ und $\frac{q_\mu}{n_\mu} \to 0$, damit ist der Satz in den Fällen I und II bewiesen.

Bleibt noch der Fall III. Wie an (4) leicht zu erkennen, folgt aus

$$f(x) = P_1(x) - P_2(x)$$

für jedes q die Möglichkeit der Darstellung

$$f_q(x) = P_{1,q}(x) - P_{2,q}(x)$$

mit

$$\omega_{P_{i,q}}(\delta) \leqq \omega_{P_i}(\delta).$$

Wegen

$$\pi(S_n^q(x) - f_q(x)) = \int_{-\frac{\pi}{2}q}^{\frac{\pi}{2}q} \varphi(t) \frac{\sin \nu t}{q \sin \frac{t}{q}} dt; \qquad \nu = \frac{2n+\lambda}{q}, \quad \varphi(t) = f_q(x+2t) - f_q(x),$$

genügt es, das Integral

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}q} \varphi(t) \frac{\sin \nu t}{q \sin \frac{t}{q}} dt$$

gleichmäßig in x abzuschätzen. Nach dem zweiten Mittelwertsatze (der Integralrechnung) ist, wenn wir setzen $\omega_{P_1}(\varepsilon) + \omega_{P_2}(\varepsilon) = V_f(\varepsilon)$,

$$\left| \int_0^{\varepsilon} \right| \leqq V_f(2\varepsilon) \operatorname*{Max}_{0 \leqq \varepsilon' \leqq \varepsilon} \left| \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \frac{\sin \nu t}{q \sin \frac{t}{q}} dt \right| = O(V_f(\varepsilon)),$$

wobei wir hier und überall im folgenden unter

$$g(t) = O(h(t))$$

verstehen, daß es eine *absolute* Konstante K gibt, so daß

$$|g(t)| \leqq K |h(t)|.$$

Das Integral $J_2 = \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}q}$ zerlegen wir folgendermaßen

$$J_2 = \sum_{k=1}^{\left[\frac{\pi}{2}\frac{q}{\varepsilon}\right]-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} + \int_{\varepsilon\left[\frac{\pi}{2}\frac{q}{2}\right]}^{\frac{\pi}{2}q}.$$

Es ist, für $0 < \alpha < \alpha + \eta \leqq \frac{\pi}{2} q$

$$\left| \int_{\alpha}^{\alpha+\eta} \varphi(t) \frac{\sin \nu t}{q \sin \frac{t}{q}} dt \right| \leqq [\varphi(\alpha) + V_f(2\eta)] \cdot \operatorname*{Max}_{0 \leqq \eta' \leqq \eta} \left| \int_{\alpha+\eta'}^{\alpha+\eta} \frac{\sin \nu t}{q \sin \frac{t}{q}} dt \right|$$

$$\leqq [\varphi(\alpha) + V_f(2\eta)] \cdot \frac{2}{\nu q \sin \frac{\alpha}{q}}.$$

Setzt man

$$G_f = \operatorname*{ob.\,Gr.}_{-\infty < x < +\infty} |f(x)| \qquad (G_f \geqq G_{f_\varrho}),$$

dann ist

$$|J_2| \left(\frac{1}{\nu} (G_f + V_f(\varepsilon)) \right)^{-1} = O\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{\pi}{2} \frac{q}{\varepsilon} \right]} \frac{1}{q \sin \frac{\varepsilon}{q} k} \right)$$

$$= O\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\frac{\varepsilon}{q}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} \right) = O\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{|\log \varepsilon|}{\varepsilon} + \frac{\log q}{\varepsilon} \right).$$

Also ist

$$J = O(V_f(\varepsilon)) + O\left\{ (G_f + V_f(\varepsilon)) \cdot \left(\frac{1}{\nu \varepsilon^2} + \frac{\log q}{\varepsilon \nu} \right) \right\}.$$

Weil man ε beliebig klein wählen kann, folgt hieraus sofort die Richtigkeit unseres Satzes im Falle III, wenn man noch berücksichtigt, daß aus $\frac{q_\mu \log q_\mu}{n_\mu} \to 0$, jedenfalls folgt $\nu_\mu^{-1} = \frac{q_\mu}{n_\mu} \to 0$.

§ 3.

Beispiele für Divergenz von Hauptfolgen (von Herrn H. Bohr).

Beispiel 1. Wir gehen davon aus, daß die durch

$$f_n(t) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\sin \varkappa t}{\varkappa} = \frac{1}{2i} \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{e^{i\varkappa t}}{\varkappa} - \frac{1}{2i} \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{e^{-i\varkappa t}}{\varkappa}$$

definierten Funktionen $f_n\left(\frac{t}{g}\right)$, $g > 0$, eine für n, g und reelle t gleichartige Schranke

$$C\left(= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right)$$

besitzen, daß aber die „Hälften" $\sum_1^n \frac{e^{i\varkappa t}}{\varkappa}$ und $\sum_1^n \frac{e^{-i\varkappa t}}{\varkappa}$ für $t = 0$, unabhängig von $g > 0$, die Größenordnung $\log n$ haben (vgl. Fejér [1]).

Wir bilden mit positiven ganzen Zahlen

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$$

von denen jede in der folgenden aufgeht,

$$\nu_\mu \mid \nu_{\mu+1} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{9}$$

die Funktionen

$$\varphi_\mu(t) = e^{i\mu t} f_{\nu_\mu}\left(\frac{t}{3\nu_\mu}\right),$$

für welche

$$|\varphi_\mu(t)| \leqq C,$$

und dann mit positiven Zahlen ε_μ mit konvergenter Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \varepsilon_\mu$$

die Funktion

$$f(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \varepsilon_\mu \varphi_\mu(t). \tag{10}$$

Wegen (9) ist $f(t)$ eine gpe Funktion, und da die Fourierexponenten der verschiedenen Summanden $\varepsilon_\mu \varphi_\mu(t)$ in den nicht übereinandergreifenden Intervallen

$$-\frac{1}{3} + \mu \leqq \lambda \leqq \mu + \frac{1}{3} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

enthalten sind, besteht die Fourierreihe von $f(t)$ aus den Termen der beitragenden Polynome in ihrer unveränderten Form. Jedes zu

$$q_\mu = 3\nu_\mu; \qquad n_\mu = \mu \cdot q_\mu = \mu \cdot 3\nu_\mu$$

gehörende Partialpolynom

$$S_{n_\mu}^{q_\mu}(t) \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{11}$$

von $f(t)$ besteht wegen $3\nu_\mu \mid 3\nu_{\mu+1}$ aus genau denjenigen Termen von $f(t)$, deren Exponenten $\leqq \mu$ sind, also

$$S_{n_\mu}^{q_\mu}(t) = \sum_{\varkappa=1}^{\mu-1} \varepsilon_\varkappa \varphi_\varkappa(t) - \frac{\varepsilon_\mu e^{i\mu t}}{2i} \sum_{\varkappa=1}^{\nu_\mu} \frac{e^{-\frac{i\varkappa t}{3\nu_\mu}}}{\varkappa}$$

und daher, wegen $\varphi_\varkappa(0) = 0$,

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \, |S_{n_\mu}^{q_\mu}(0)| \geqq \frac{1}{2} \overline{\lim_{\mu \to \infty}} \, \varepsilon_\mu \log \nu_\mu .$$

Die Hauptfolge (11) ist daher sicherlich für $t = 0$ divergent, wenn

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \, \varepsilon_\mu \log \nu_\mu = \infty . \tag{12}$$

Man kann nun durch passende Wahl von ν_μ erzielen, daß $f(t)$ „regulär" ist und daß trotzdem (12) besteht. Es ist nämlich

$$|\varphi'_\mu(t)| \leqq \left| i\mu e^{i\mu t} f_{\nu_\mu}\left(\frac{t}{3\nu_\mu}\right) + e^{i\mu t}\frac{d}{dt} f_{\nu_\mu}\left(\frac{t}{3\nu_\mu}\right)\right|$$

$$\leqq \left|\mu C + 2\cdot\frac{\nu_\mu}{3\nu_\mu}\right| \leqq \mu C_1 = \mu 2C,$$

also besitzt, sofern nur

$$\sum \mu \varepsilon_\mu \tag{13}$$

konvergiert, die Funktion $f(t)$ einen gpen Differentialquotienten. Z. B. ist für $\varepsilon_\mu = \mu^{-3}$ und $\nu_\mu = 2^{\mu^4}$ sowohl (12) als auch (13) erfüllt.

Man überzeugt sich leicht, daß für $\varepsilon_\mu = 2^{-\mu}$, $\nu_\mu = 2^{3^\mu}$ $f(x)$ sogar gpe Differentialquotienten beliebig hoher Ordnung besitzt.

Beispiel 2. Man kann für $f(t)$ sogar eine *analytische* gpe Funktion erhalten.

Die analytische Funktion der komplexen Variablen $s = \sigma + it$

$$F_n(s) = \frac{1}{2i}\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{e^{\varkappa s}}{\varkappa} - \frac{1}{2i}\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{e^{-\varkappa s}}{\varkappa}$$

genügt der Relation

$$F_n(it) = f_n(t) \qquad (-\infty < t < +\infty).$$

Aus Stetigkeitsgründen gibt es daher einen Streifen

$$-\sigma_\mu \leqq \sigma \leqq \sigma_\mu \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

derart, daß

$$|F_\mu(s)| \leqq C_1 \qquad (-\sigma_\mu \leqq \Re(s) \leqq +\sigma_\mu).$$

Man kann daher eine Folge von positiven ganzen Zahlen

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \qquad (\gamma_\mu \geqq 3)$$

mit

$$\gamma_\mu \mid \gamma_{\mu+1} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

so wählen, daß

$$\left|F_\mu\left(\frac{s}{\gamma_\mu}\right)\right| \leqq C_1, \qquad (-1 \leqq \Re(s) \leqq +1).$$

Setzt man

$$g_{\nu_\mu} = \gamma_{\nu_\mu}\cdot\nu_\mu,$$

dann ist (vgl. Bohr [3], insbesondere Satz 5)

$$F(s) = \sum \varepsilon_\mu e^{\mu s} F_{\nu_\mu}\left(\frac{s}{g_{\nu_\mu}}\right)$$

eine in $-1 < \Re(s) < +1$ analytische gpe Funktion, sofern nur

$$\sum \varepsilon_\mu e^\mu$$

konvergent ist.

Für die Funktion

$$f(t) = F(it) \qquad (-\infty < t + \infty)$$

ist für

$$q_\mu = g_{\nu_\mu}, \qquad n_\mu = \mu q_\mu = \mu g_{\nu_\mu}$$

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \, |S_{n_\mu}^{q_\mu}(0)| \geqq \overline{\lim_{\mu \to \infty}} \, \varepsilon_\mu \log \nu_\mu ,$$

also ist die Hauptfolge divergent, wenn z. B. $\varepsilon_\mu = 3^{-\mu}$ und $\nu_\mu = 3^{4^\mu}$ gesetzt wird.

Beispiel 3. Unter unseren in Satz A auftretenden Zusatzbedingungen war am wenigsten einschränkend die Bedingung

$$\frac{q_\mu \log q_\mu}{n_\mu} \to 0 .$$

Wir wollen nun zeigen, daß letztere Bedingung im allgemeinen eine „beste" Bedingung ist, in dem Sinne, daß man sie nicht durch

$$\frac{q_\mu \log q_\mu}{n_\mu \chi(q_\mu)} \to 0 \tag{14}$$

ersetzen kann, wenn $\chi(q)$ irgendeine (monoton) mit q ins Unendliche wachsende Funktion bedeutet. Wir wollen nämlich die Funktion aus Beispiel 1 dahin präzisieren, daß sie außer den Bedingungen (12) und (13) noch die Bedingung (14) erfüllt.

Wir wählen die Zahlen ε_μ derart, daß

$$\sum \mu \varepsilon_\mu$$

konvergiert, und

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \, \mu \varepsilon_\mu \sqrt{\chi(\mu)} = \infty ,$$

und setzen

$$\nu_\mu = 2^{\mu \sqrt{\chi(\mu)}},$$

wobei wir noch die unwesentliche Annahme machen, daß alle Zahlen $\sqrt{\chi(\mu)}$ ganz sind. Für

$$q_\mu = \nu_\mu , \qquad n_\mu = \mu \nu_\mu$$

ist dann

$$\frac{q_\mu \log q_\mu}{n_\mu \chi(q_\mu)} = \log 2 \, \frac{\mu \sqrt{\chi(\mu)}}{\mu \chi(2^{\mu \sqrt{\chi(\mu)}})} \to 0 .$$

§ 4.

Kriterien für Konvergenz in Punkten.

Man kann auch die für rpe Funktionen geläufigen Kriterien für Konvergenz in einzelnen Punkten in gewisser Weise auf gpe Funktionen übertragen. Wir werden unsere Überlegungen der Einfachheit wegen nur für

das Kriterium von de la Vallée-Poussin durchführen, sie sind aber ohne weiteres auch auf die anderen in § 1, 2 genannten Kriterien übertragbar.

Für eine rpe Funktion $f_q(x)$ verlangt unser Kriterium, daß im Punkte x die Funktion

$$S_q(x,h)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f_q(x+2t)\,dt \qquad (f_q(x)=\lim_{h\to 0} S_q(x,h)),$$

und demnach auch die Funktion

$$\Phi_q(x,h)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}(f_q(x+2t)-f_q(x))\,dt,$$

als Funktion von h in $0\leqq h\leqq h_0$ von beschränkter Variation sei. Da doch jede Eigenschaft von $f_q(x)$, welche in einem Punkte x erfüllt ist, auch in jedem der Punkte $x+2\pi q\cdot\mu$ $(\mu=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ identisch ebenso erfüllt ist, führen wir für die gpe Funktion $f(x)$ den Begriff der *Stelle* ein. Unter einer Stelle (x,r) verstehen wir die Gesamtheit der Punkte $\xi=x+2\pi r\cdot\mu$ $(\mu=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$, und wir sagen, daß $f(x)$ in (x,r) unser Kriterium erfüllt, wenn für alle $\xi=x+2\pi r\cdot\mu$ die Funktionen

$$\Phi(\xi,h)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}(f(\xi+2t)-f(\xi))\,dt$$

in einem gemeinsamen Intervall $0\leqq h\leqq h_0$ von beschränkter Variation sind und es sogar *gleichmäßig* sind, in dem Sinne, daß ihre Totalvariationen

$$T_0^h(\Phi(\xi,h))$$

von einer positiven monotonen Funktion $T(h)$, für welche $\lim_{h\to 0} T(h)=0$, majorisiert werden:

$$T_0^h(\Phi(\xi,h))\leqq T(h) \qquad (0\leqq h\leqq h_0).$$

An (4) ist unmittelbar zu erkennen, daß dann auch jede Unterfunktion $f_q(x)$ an jeder Stelle (x,r), für welche $\frac{q}{r}$ eine ganze Zahl ist — wir nennen dann $f_q(x)$ der Stelle (x,r) *übergeordnet* —, gleichfalls unser Kriterium erfüllt, und sogar, was wesentlich ist, mit derselben Majorante $T(h)$.

Wir nehmen nun an, daß unsere Hauptfolge

$$S_{n_\mu}^{q_\mu}(x) \qquad (\mu=1,2,3,4,\ldots)$$

der Stelle (x,r) übergeordnet ist, d. h. daß für $\mu\geqq\mu_0$ alle Zahlen $\frac{q_\mu}{r}$ ganz sind. Wir zerlegen (vgl. § 1, 3) das Integral

$$\pi S_n^q(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}q} (f_q(x+2t) + f_q(x-2t)) \frac{\sin \nu t}{q \sin \frac{t}{q}}\, dt \qquad \left(\nu = \frac{2n+1}{q}\right)$$

in

$$\int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon q} + \int_{\varepsilon q}^{\frac{\pi}{2}q} = J_1 + J_2 + J_3$$

und benutzen bei den kommenden Abschätzungen die Größen

$$G_f(\delta) = \underset{-\infty<x<+\infty}{\text{ob. Gr.}} \int_x^{x+\delta} |f(\xi)|\, d\xi$$

und

$$\Omega_f(\delta) = \underset{0<\eta\leqq\delta}{\text{ob. Gr.}} \underset{-\infty<x<+\infty}{\text{ob. Gr.}} \int_x^{x+1} |f(\xi+\eta) - f(\xi)|\, d\xi,$$

für welche offenbar

$$G_f(\delta) \leqq \delta \cdot G_f\,; \qquad \Omega_f(\delta) \leqq \omega_f(\delta),$$
$$G_{f_q}(\delta) \leqq G_f(\delta)\,; \qquad \Omega_{f_q}(\delta) \leqq \Omega_f(\delta).$$

Aus der bekannten Relation

$$(15) \quad 2\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sin \nu t\, dt = \int_{\alpha}^{\beta-\frac{\pi}{\nu}} \left(\psi(t) - \psi\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right)\right) \sin \nu t + \int_{\beta-\frac{\pi}{\nu}}^{\beta} \psi(t) \sin \nu t\, dt - \int_{\alpha-\frac{\pi}{\nu}}^{\alpha} \psi\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right) \sin \nu t\, dt$$

erhält man durch die Substitution

$$\psi(t) = \frac{f_q(x+2t) + f_q(x-2t)}{q \sin \frac{t}{q}}$$

die Relation

$$J_3 = O\left(\int_{\varepsilon q}^{\frac{\pi}{2}q-\frac{\pi}{\nu}} \left|\psi(t) - \psi\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right)\right| dt\right) + O\left(\frac{G_f\left(\frac{1}{\nu}\right)}{q\varepsilon}\right),$$

und daraus sehr leicht die Abschätzung („*Riemannsches Lemma*“)

$$(16) \qquad J_3 = O\left(\frac{\Omega_f\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\varepsilon}\right) + O\left(\frac{G_f(1)}{\nu q \varepsilon^2}\right) + O\left(\frac{G_f\left(\frac{1}{\nu}\right)}{q\varepsilon}\right).$$

Weiterhin hat man

$$J_1 = \int_0^{\varepsilon} (f_q(x+2t) + f_q(x-2t)) \frac{\sin \nu t}{t}\, dt + O\left(\frac{\varepsilon}{q^2} G_f(1)\right),$$

$$\int_0^{\varepsilon} (f_q(x+2t) + f_q(x-2t)) \frac{\sin \nu t}{t}\, dt$$

$$= \pi f_q(x) + \int_0^{\varepsilon} (f_q(x+2t) + f_q(x-2t) - 2 f_q(x)) \frac{\sin \nu t}{t}\, dt + O\left(\frac{|f_q(x)|}{\varepsilon \nu}\right),$$

und das Integral rechts kann geschrieben werden (de la Vallée-Poussin [1]):

$$2 \int_0^{\varepsilon} \frac{\Phi_q(x,t)}{t} \sin \nu t\, dt + 2 \Phi_q(x,\varepsilon) \sin \nu \varepsilon - 2 \int_0^{\varepsilon} \Phi_q(x,t)\, \nu \cos \nu t\, dt$$

und hat demnach die Größenordnung $O(T(\varepsilon))$. Also

$$J_1 = \pi f_q(x) + O(T(\varepsilon)) + O\left(\frac{|f_q(x)|}{\varepsilon \nu}\right). \tag{17}$$

Den entscheidenden Summanden J_2 schätzen wir folgendermaßen ab. Wir haben zuerst

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon q} f_q(x+2t) \frac{\sin \nu t}{q \sin \frac{t}{q}}\, dt = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon q} f_q(x+2t) \frac{\sin \nu t}{t}\, dt + O(\varepsilon G_f(1)),$$

dann unter Benutzung von (15), diesmal mit $\psi(t) = \frac{f_q(x+2t)}{t}$,

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\varepsilon q} f_q(x+2t) \frac{\sin \nu t}{t}\, dt \right| \leqq \int_{\varepsilon}^{\varepsilon q} \frac{\left| f_q\left(x+2t+\frac{2\pi}{\nu}\right) - f_q(x+2t) \right|}{t}\, dt$$

$$+ O\left(\frac{1}{\varepsilon} G_f\left(\frac{1}{\nu}\right)\right) + O\left\{\frac{1}{\nu} G_f(1) \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon q} \frac{1}{t^2}\, dt\right)\right\},$$

und weiterhin

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon q} \frac{\left| f_q\left(x+2t+\frac{2\pi}{\nu}\right) - f_q(x+2t) \right|}{t}\, dt$$

$$= \Omega_f\left(\frac{1}{\nu}\right) \cdot O\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{[\varepsilon q]}\right) = O\left(\Omega_f\left(\frac{1}{\nu}\right) \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} + \log q\right)\right),$$

so daß wir erhalten

$$J_2 = O\left(\Omega_f\left(\frac{1}{\nu}\right) \cdot \log q\right) + R, \tag{18}$$

wobei

$$R = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\,\Omega_f\left(\frac{1}{\nu}\right)\right) + O\left(\frac{G_f(1)}{\varepsilon^2\nu}\right) + O\left(\frac{G_f\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon G_f(1)).$$

Nun, aus (16), (17) und (18) folgt, da man ja ε beliebig klein wählen kann, daß eine Hauptfolge (jedenfalls) dann in x gegen $f(x)$ konvergiert, wenn $\nu_\mu = \frac{n_\mu}{q_\mu}$ so stark im Verhältnis zu q_μ ins Unendliche wächst, daß

$$\Omega_f\left(\frac{1}{\nu_\mu}\right) \cdot \log q_\mu \to 0\,. \tag{19}$$

Unsere „Zusatzforderung" (19) ist eine Voraussetzung über den Verlauf von $f(x)$ „im großen" und ist für eine rpe Funktion für *jede* Hauptfolge erfüllt.

Satz B. *Für eine grenzperiodische Funktion $f(x)$ ist jede Hauptfolge*

$$S_{n_\mu}^{q_\mu}(x) \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

für welche

$$\Omega_f\left(\frac{q_\mu}{n_\mu}\right) \log q_\mu \to 0\,, \tag{20}$$

an jeder ihr untergeordneten Stelle, an welcher sie eines der für reinperiodische Funktionen üblichen Konvergenzkriterien (§ 1, 2) erfüllt, gegen den Wert der Funktion an dieser Stelle konvergent. Genügt insbesondere $f(x)$ einer

I′ *Quasi-Lipschitz-Bedingung*

$$\Omega_f(\delta) \leqq C\delta^\varrho \qquad (C > 0;\ 0 < \varrho \leqq 1),$$

II′ *Quasi-Lipschitz-Dini-Bedingung*

$$\Omega_f(\delta) \log \frac{1}{\delta} = o(1),$$

dann ist (20) erfüllt für

I_1 $$\frac{q_\mu |\log q_\mu|^{\frac{1}{\varrho}}}{n_\mu} \to 0\,,$$

II_1 $$\frac{q_\mu^{1+\sigma}}{n_\mu} \to 0 \qquad (\textit{für irgendein festes } \sigma > 0).$$

Den Abschätzungen (16) bis (18) ist zu entnehmen, daß wir den Satz B auch für gleichmäßige Konvergenz formulieren könnten. Er würde dann den Satz A enthalten. Das ist sehr leicht für den Fall der Lipschitz- und Lipschitz-Dini-Bedingung einzusehen, und was die gleichmäßige Jordan-Bedingung angeht, so ist sie in 1′ enthalten, weil sie, wie man sich leicht überzeugen kann, ein Spezialfall der Quasi-Lipschitz-Bedingung mit $\varrho = 1$ und etwa $C = V_f(1)$ ist.

§ 5.

Grenzperiodische Funktionen der Integrationsklasse L.

In der Formulierung des Satzes B wird von der (gleichmäßigen) Stetigkeit der Funktion $f(x)$ kein Gebrauch gemacht. Und in der Tat bleibt er wörtlich bestehen, wenn man gpe Funktionen in der Verallgemeinerung von Stepanoff [1] heranzieht.

Die Bohrschen fpen Funktionen sind eine Verallgemeinerung der gleichmäßig stetigen rpen Funktionen. Eine Erweiterung der Bohrschen Funktionenklasse, derart daß die rpen unter den fpen Funktionen genau alle rpen der Klasse L sein sollen, ist von Stepanoff gegeben worden.

Wir verstehen nunmehr in diesem Paragraphen unter einer gpen Funktion eine Funktion der Stepanoffschen Klasse (II), deren Fourierexponenten rationale Multipla voneinander sind, so daß nunmehr die rpen Funktionen genau alle rpen Funktionen der Klasse L sind[10]). Die Bohrschen Funktionen werden wir als „regulär" hervorheben.

Wir nennen M eine Quasi-Schranke von $f(x)$,

$$|f(x)| \leqq \text{quasi-}M,$$

wenn

$$\int_{\xi}^{\xi+1} |f(x)|\,dx \leqq M, \qquad (-\infty < \xi < +\infty),$$

und nennen die Folge

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots \tag{21}$$

(gleichmäßig) quasi-konvergent, wenn es zu jedem ε ein $N(\varepsilon)$ gibt, so daß

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqq \text{quasi-}\varepsilon \qquad (m, n \geqq N(\varepsilon)).$$

Aus der Quasi-Konvergenz der Folge (21) folgt (Stepanoff [1], Satz 2) die Existenz einer gpen Funktion, gegen welche sie quasi-konvergiert

$$|f_m(x) - f(x)| \leqq \text{quasi-}\varepsilon \qquad (m \geqq N(\varepsilon)).$$

---

[10]) Wir bemerken, daß man, genau ebenso wie bei rpen Funktionen, eine fpe Funktion der Klasse (II) als eine Funktion definieren kann, der man eine Folge

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$$

Bohrscher Funktionen derart zuordnen kann, daß

$$\lim_{n\to\infty} \underset{-\infty<\xi<+\infty}{\text{ob. Gr.}} \int_{\xi}^{\xi+1} |f(x) - f_n(x)|\,dx = 0.$$

Es erscheint daher angebracht, diese Funktionenklasse als „Integrationsklasse L" zu bezeichnen, um so mehr, als man analog die Funktionen der Klasse L^p für jedes $p \geqq 1$ definieren kann. Stepanoffs Funktionen (III) würden dann die Klasse L^2 bilden.

Wir beweisen jetzt den folgenden Satz, welcher dem in der Einleitung gegebenen Hilfssatz entspricht.

Hilfssatz. *Eine quasi-ausgezeichnete Folge*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \dots \tag{22}$$

die formal konvergiert, ist quasi-konvergent.

Hierbei verstehen wir unter Quasi-Ausgezeichnetheit das Vorhandensein von gleichartiger Quasi-Stetigkeit und von relativ dichten gemeinsamen Quasi-Verschiebungszahlen.

Zum Beweis gehen wir zu den (regulären) Glättungsfunktionen

$$f_n(x,c) = \frac{1}{c}\int_x^{x+c} f_n(\alpha)\,d\alpha$$

über. Für festes $c>0$ ist die Folge

$$f_1(x,c),\ f_2(x,c),\ f_3(x,c),\ \dots$$

im regulären Sinne ausgezeichnet, wie aus

$$c\,|f_n(x+\tau,c)-f_n(x,c)| \leqq \int_x^{x+c} |f_n(\alpha+\tau)-f_n(\alpha)|\,d\alpha$$

zu ersehen ist, und weiterhin ist sie formal konvergent, weil aus

$$f(x) \sim \sum A_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x}$$

folgt

$$f(x,c) \sim \sum' \frac{e^{i\Lambda_n c}-1}{i\Lambda_n c}\, A_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x};$$

also ist sie gleichmäßig konvergent. Unsere Behauptung folgt nunmehr daraus, daß man $f_n(x)$ gleichartig in n durch $f_n(x,c)$ quasi-approximieren kann, wie aus

$$\int_x^{x+1} d\xi\,|f_n(\xi)-\frac{1}{c}\int_0^c f_n(\xi+\alpha)\,d\alpha| \leqq \frac{1}{c}\int_x^{x+1} d\xi \int_0^c |f_n(\xi)-f_n(\xi+\alpha)|\,d\alpha$$

$$\leqq \frac{1}{c}\int_0^c d\alpha \int_x^{x+1} |f_n(\xi)-f_n(\xi+\alpha)|\,d\xi \leqq \operatorname*{Max}_{|\alpha|\leqq c} \int_x^{x+1} |f_n(\xi)-f_n(\xi+\alpha)|\,d\xi$$

wegen der gleichartigen Quasi-Stetigkeit zu ersehen ist[11]).

---

[11]) Unser Hilfssatz hat für die *fast*periodischen Funktionen der Klasse L dieselben Folgen, wie der entsprechende „reguläre" Hilfssatz für die regulären Funktionen. Aus ihm folgt (vgl. Bochner [1], § 2), daß jede formal konvergente Folge von Fejérpolynomen quasi-konvergent ist und daß man zu jeder quasi-ausgezeichneten Menge von Funktionen gemeinsame Quasi-Approximationspolynome angeben

Auf Grund des Hilfssatzes können wir ebenso wie im regulären Falle auf die Existenz der Unterfunktionen $f_q(x)$ schließen,

$$f_q(x) = \text{Quasi-}\lim_{\nu=\infty} f_q^{\nu}(x), \tag{23}$$

von denen wiederum jede gegen $f(x)$ formal konvergente Folge auch schon quasi-konvergent ist.

Beim Beweise, daß der Satz B auch für Funktionen der Klasse L richtig bleibt, werden wir uns wiederum an das Kriterium von de la Vallée-Poussin halten. Es bedarf eigentlich nur einer rationellen Festsetzung, was unter dem „Wert der Funktion $f(x)$ an der Stelle (x, r)", d. h. in den Punkten $\xi = x + 2\pi r \cdot \mu$, zu verstehen ist. Für eine rpe Funktion, für welche der Limes

$$S(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h}(f(\xi + 2h) + f(\xi - 2h))$$

existiert, ist unter $f(x)$ eben dieser Wert zu verstehen, und in den Fällen der Kriterien von Lebesgue und de la Vallée-Poussin der in diesen Fällen immer existierende Limes

$$S(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} f(\xi + 2t)\, dt.$$

Dieselben Festsetzungen sollen auch für die allgemeinsten „Stellen" gelten, wobei generell unter der Existenz eines Limes $h \to 0$ an der Stelle $\xi = (x, r)$ bei einer Funktion $F(x, h)$ zu verstehen sei, daß in jedem Punkte $\xi_\mu = x + 2\pi r \cdot \mu$ der

$$\lim_{h \to 0} F(\xi_\mu, h)$$

existiert, und daß die Konvergenz gleichmäßig in ξ_μ sei

$$|F(\xi, h) - \lim_{h \to 0} F(\xi, h)| \leqq K(h) = o(1) \qquad (0 < h \leqq h_0).$$

Und nun sei unser Kriterium an der Stelle (x, r) erfüllt. Dann sind die Werte

$$S(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} f(\xi + 2t)\, dt$$

---

kann. Der Satz über absolute Konvergenz der Fourierreihe $\sum A_{\Lambda_n} e^{i \Lambda_n x}$ bei linear unabhängigen Λ_n verallgemeinert sich dahin, daß *jede* Reihe $\sum \Theta_n A_{\Lambda_n} e^{i \Lambda_n x}$ mit beliebigen Zahlen $|\Theta_n| = 1$ wiederum eine Fourierreihe ist. Weiterhin kann man die Funktionen als Quasi-Normalfunktionen und ihre quasi-ausgezeichneten Mengen als Quasi-Normalklassen charakterisieren (Bochner [1], § 5).

Wir bemerken noch, daß für die Funktionen einer jeden Klasse L^p, $p \geqq 1$, ähnliche Sätze gelten, wenn man den Exponenten p in gehöriger Weise in die Definitionen der Quasi-Begriffe aufnimmt.

beschränkt, wegen

$$|S(\xi)| \leqq K(h_0) + \frac{1}{h_0} G_f(\mid h_0).$$

Bezeichnet man (an einer f_q untergeordneten Stelle) mit $S_q^\nu(\xi)$ und $S_q(\xi)$ die Werte von $S(\xi)$ für $f_q^\nu(x)$ und $f_q(x)$, dann ist für jedes $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\lim_{\nu \to \infty} S_q^\nu(\xi_\mu) = S_q(\xi_\mu).$$

Denn in jeder Teilfolge von $S_q^\nu(\xi)$ kann man wegen der Beschränktheit eine konvergente Unterfolge auswählen, sagen wir

$$S_q^{\nu'}(\xi). \tag{24}$$

Für jedes ξ_μ sind wegen (23) für jeden Wert von h aus $0 < h \leqq h_0$ die Werte

$$S_q^{\nu'}(\xi_\mu, h) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} f_q^{\nu'}(\xi_\mu + 2t)\, dt$$

gegen

$$S_q(\xi_\mu, h) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} f_q(\xi_\mu + 2t)\, dt$$

konvergent, und aus

$$|S_q^{\nu'}(\xi_\mu + h) - S_q^{\nu'}(\xi_\mu)| \leqq K(h)$$

folgt dann

$$S_q^{\nu'}(\xi_\mu) \to S_q(\xi_\mu).$$

Da aber jeder Teilfolge von $S_q^\nu(\xi_\mu)$ eine Unterfolge (24) entnommen werden kann, ist die Gesamtfolge $S_q^\nu(\xi_\mu)$ gegen $S_q(\xi_\mu)$ konvergent.

Ähnlich folgt, daß für eine der Stelle ξ übergeordnete Hauptfolge $S_{n_\mu}^{q_\mu}(x)$

$$S_{q_\mu}(\xi) \to S(\xi)$$

und damit ist die Gültigkeit unseres in § 4 gegebenen Beweises des Satzes B für alle Funktionen der Klasse L sichergestellt.

Anhang.

Ein Konvergenzkriterium für allgemeine fastperiodische Funktionen.

Unsere Konvergenzkriterien für gpe Funktionen enthalten nur Voraussetzungen über Regularitätseigenschaften der Funktion, nicht aber über ihren Fastperiodizitätscharakter oder gar über die Beschaffenheit ihrer Fourierreihe. Versucht man es, auf ähnlichem Wege an allgemeine fpe Funktionen heranzutreten, dann stößt man auf Schwierigkeiten, deren Grund im folgenden zu suchen ist.

Gegeben sei eine fpe Funktion

$$f(x) \sim \sum A_{\Lambda_n} e^{i \Lambda_n x},$$

irgendeine Basis $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$ ihrer Fourierexponenten und die dazugehörige (vgl. Bohr [2], § 6ff., Bochner [1], § 2, 7) mehrvariablige gpe Funktion

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots) \sim \sum A_{r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \ldots} e^{i(r_1\beta_1 x_1 + r_2\beta_2 x_2 + \ldots)},$$

(wo $r_1\ r_2, \ldots$ rationale Zahlen sind), so daß also

$$f(x) = F(x, x, x, \ldots).$$

Ist nun irgendeine Folge von Partialpolynomen von $f(x)$ konvergent, so ist auch die entsprechende Hauptfolge der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ im $(x_1, x_2, \ldots)$-Raume konvergent, woraus folgt, daß jedes Konvergenzkriterium von $f(x)$ zugleich ein Konvergenzkriterium für $F(x_1, x_2, \ldots)$ ist. Es dürfte aber nicht leicht sein, aus bloßen Regularitätseigenschaften von $f(x) = F(x, x, \ldots)$ auf Konvergenzeigenschaften von $F(x_1, x_2, \ldots)$ zu schließen.

Solche Konvergenzschlüsse scheinen aber jedenfalls dann prinzipiell möglich zu sein, wenn man in den Regularitätsvoraussetzungen über $f(x)$ auf den Fastperiodizitätscharakter von $f(x)$ gebührend Rücksicht nimmt, wie wir es am Beispiel *der fastperiodischen Lipschitz-Bedingung* nachweisen wollen.

Wir nehmen zuerst den einfachsten Fall an, daß $f(x)$ eine zweigliedrige ganze Basis (α_1, α_2) besitzt,

$$f(x) \sim \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} A_{n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2} e^{i(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2)x},$$

$$F(x_1, x_2) \sim \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} A_{n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2} e^{i(n_1\alpha_1 x_1 + n_2\alpha_2 x_2)}.$$

Führen wir die Partialsummen

$$S_{n_1, n_2}^{\alpha_1, \alpha_2} = \sum_{\nu_1=-n_1}^{+n_1} \sum_{\nu_2=-n_2}^{+n_2} A_{\nu_1\alpha_1 + \nu_2\alpha_2} e^{i(\nu_1\alpha_1 x_1 + \nu_2\alpha_2 x_2)}$$

und die Stetigkeitsmoduln

$$\omega_1(\delta) = \operatorname*{Max}_{|\eta| \leqq \delta} \operatorname*{Max}_{-\infty < x_{1,2} < +\infty} |F(x_1 + \eta, x_2) - F(x_1, x_2)|,$$

$$\omega_2(\delta) = \operatorname*{Max}_{|\eta| \leqq \delta} \operatorname*{Max}_{-\infty < x_{1,2} < +\infty} |F(x_1, x_2 + \eta) - F(x_1, x_2)|$$

ein, dann besteht (vgl. § 1, 5) die Abschätzung

$$(25) \quad |F(x_1, x_2) - S_{n_1, n_2}^{\alpha_1, \alpha_2}(x_1, x_2)| \leqq K_2 \log n_1 \log n_2 \left(\omega_1\left(\frac{1}{n_1}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{n_2}\right)\right),$$

wo K_2 eine absolute, nur von α_1 und α_2 abhängige Konstante bedeutet[12]). Erfüllt nun die Funktion $F(x_1, x_2)$ die „einvariabligen" Lipschitz-Bedingungen

$$(26_1) \qquad \omega_1(\delta) \leqq C\delta^\varrho,$$

$$(26_2) \qquad \omega_2(\delta) \leqq C\delta^\varrho,$$

dann gibt es offenbar Hauptfolgen von $F(x_1, x_2)$, welche gleichmäßig konvergieren, z. B. die Hauptfolge $n_1 = n_2 = n\,(= 1, 2, 3, \ldots)$. Um so mehr konvergieren dann die entsprechenden Hauptfolgen von $f(x)$ gegen $f(x)$. Wenn wir noch die Voraussetzungen (26_1) und (26_2) auf eine Voraussetzung über $f(x)$ selbst zurückführen können, dann haben wir eine Art Konvergenzkriterium für $f(x)$ gewonnen. Und das letztere ist in der Tat möglich. Betrachten wir z. B. $\omega_1(\delta)$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von α_1 und α_2 ist nach dem Kroneckerschen Satze

$$\operatorname*{Max}_{-\infty < x_{1,2} < +\infty} |F(x_1 + \eta, x_2) - F(x_1, x_2)| = \operatorname*{Max}_{-\infty < x < +\infty} |F(x + \eta, x) - F(x, x)|.$$

Man wähle nun bei festem η, wiederum auf Grund des Kroneckerschen Satzes, zu irgendeinem $\varepsilon > 0$ zwei ganze Zahlen g_1 und g_2 derart, daß

$$\left|\eta + g_1 \frac{2\pi}{\alpha_1} - g_2 \frac{2\pi}{\alpha_2}\right| \leqq \varepsilon.$$

Da nun $F(x_1, x_2)$ die bezüglichen Perioden $\frac{2\pi}{\alpha_1}$ und $\frac{2\pi}{\alpha_2}$ hat, so erhält man

$$F(x + \eta, x) = F\left(x + \eta + g_1 \frac{2\pi}{\alpha_1}, x + g_2 \frac{2\pi}{\alpha_2}\right) = F(x + t, x + t) + \Theta = f(x + t) + \Theta,$$

wobei wir gesetzt haben $t = g_2 \frac{2\pi}{\alpha_2}$ und mit Θ eine Größe bezeichnen, welche gleichmäßig in x mit ε gegen Null geht. Daraus erkennt man, daß (26_1) immer dann erfüllt ist, wenn

$$(27_1) \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leqq C\delta_1^\varrho,$$

wobei

$$\delta_1 = \operatorname*{Min}_{-\infty < g_1 < +\infty} \left|x_1 - x_2 + g_1 \frac{2\pi}{\alpha_1}\right| \qquad (g_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

und daß ähnlicherweise (26_2) immer dann erfüllt ist, wenn

$$(27_2) \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leqq C\delta_2^\varrho,$$

wobei

$$\delta_2 = \operatorname*{Min}_{-\infty < g_2 < +\infty} \left|x_1 - x_2 + g_2 \frac{2\pi}{\alpha_2}\right| \qquad (g_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

[12]) Vgl. z. B. S. Bernstein [1], S. 99.

Die in (27_1) und (27_2) zum Ausdruck kommende Regularität von $f(x)$ ist es, die wir die „fastperiodische Lipschitz-Bedingung“ nennen. Genau so wie im Falle einer rpen Funktion mit der Periode $\frac{2\pi}{\alpha_1}$ die Differenz $|f(x_1)-f(x_2)|$ beliebig klein wird, wenn die mod $\frac{2\pi}{\alpha_1}$ reduzierte Entfernung von x_1 und x_2 beliebig klein wird, genau so wird ja im Falle unserer Funktion $f(x)$ die Differenz $|f(x_1)-f(x_2)|$ beliebig klein, wenn die mod $\left(\frac{2\pi}{\alpha_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}\right)$ reduzierte Entfernung von x_1 und x_2 beliebig klein wird, d. h. es ist $|f(x+\tau)-f(x)| \leqq \varepsilon$, sofern nur

$$|\tau| \leqq \eta \left(\text{mod } \frac{2\pi}{\alpha_1}\right),$$

$$|\tau| \leqq \eta \left(\text{mod } \frac{2\pi}{\alpha_2}\right),$$

wo $\eta = \eta(\varepsilon)$ nur von ε abhängt (Bohr [2], S. 113 und 125). Und genau so, wie die rpe Lipschitz-Bedingung das Kleinwerden von $|f(x_1)-f(x_2)|$ in bezug auf das der reduzierten Entfernung von x_1 und x_2 vorschreibt, tut es unsere fpe Lipschitz-Bedingung für den allgemeineren Fall. Man kann die Bedingung (27) am bequemsten so schreiben:

$$\omega_f(\delta) \leqq C' \left|\frac{1}{\alpha_i} \sin(\alpha_i \delta)\right|^{\varrho} \qquad (i = 1, 2). \tag{28}$$

Für eine Funktion mit mehrgliedriger endlicher Basis

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) \sim \sum A_{n_1 \alpha_1 + \ldots + n_k \alpha_k} e^{i(n_1 \alpha_1 x_1 + \ldots + n_k \alpha_k x_k)} \tag{29}$$

besteht analog zu (25) die Abschätzung

$$|S^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - F| \leqq K_k \log n_1 \ldots \log n_k \left(\varphi_1\left(\frac{1}{n_1}\right) + \ldots + \varphi_k\left(\frac{1}{n_k}\right)\right), \tag{30}$$

wo K_k nur von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ abhängt. Man findet dann, daß ähnlich wie für $k = 2$, es konvergente Hauptfolgen gibt (z. B. $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n = 1, 2, 3, \ldots$), wenn die Funktion $f(x) = F(x, x, \ldots, x)$ der Bedingung

$$\omega_f(\delta) \leqq C \left|\frac{1}{\alpha_i} \sin(\alpha_i \delta)\right|^{\varrho} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

für alle δ aus $0 < \delta < +\infty$ genügt.

Da in (30) die konstanten K_k nur von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ abhängen und jede Funktion, die zur allgemeinen Basis $(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ gehört, sich durch Funktionen der Gestalt (26) approximieren läßt, in denen jedes α_ν ein rationales Multiplum von β_ν ist, und zu deren Bestimmung *nur* die Kenntnis der Basis $(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ notwendig ist (Bochner [1], Satz III), so könnte man, wie leicht einzusehen ist und was wir hier nicht näher ausführen unsere fpe Lipschitz-Bedingung auch für Funktionen mit allgemeinster (unendlichgliedriger rationaler) Basis formulieren.

Verzeichnis der zitierten Literatur.

S. Bernstein [1], Sur l'ordre de la meuilleure approximation etc., Mém. Cl. sc. Ac. Belg (2) **4** (1912), p. 1—104.

S. Bochner [1], Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I, Math. Annalen **96** (1926), S. 119—147.

H. Bohr, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen.
[1], Teil I, Acta math. **45** (1924), S. 29—127.
[2], „ II, Acta math. **46** (1925), S. 101—113.
[3], „ III, Acta math. **47** (1926), S. 237—281.

L. Fejér [1], Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, Journ. f. Math. **138** (1910), S. 22—53.

E. Hilb und M. Riesz [1], Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II C 10, S. 1189—1228.

H. Lebesgue [1], Sur la representation trigonometrique etc., Soc. math. France Bull. **38** (1910), p. 184—210.

W. Stepanoff [1], Über einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen, Math. Annalen **95** (1926), S. 473—498.

Ch.-J. de la Vallée Poussin [1], Un nouveau cas de convergence de séries de Fourier, Palermo Rend. **31** (1911), p. 296—299.

(Eingegangen am 15. März 1926.)

Über die Annäherung analytischer Funktionen. II.

Von

Yoshitomo Okada in Sendai (Japan).

In meiner früheren Abhandlung „Über die Annäherung analytischer Funktionen“[1]) fand ich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß für jede Potenzreihe $f(z)=\sum c_n z^n$ mit positivem Konvergenzradius eine Funktion der Form:

$$\sum s_n a_n(x) \quad \text{mit} \quad s_n=\sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu-1} z^{\nu-1} \quad \text{oder} \quad \sum b_n(x) c_n z^n$$

für $x \to +\infty$ im Innern eines gewissen Bereiches gegen die durch geradlinige analytische Fortsetzung des Elementes $f(z)=\sum c_n z^n$ vom Nullpunkt her definierte Funktion $F(z)$ gleichmäßig konvergiert. Hier behandle ich für eine solche Potenzreihe das Problem der Konvergenz (für $x \to +\infty$) einer Funktion der vorher definierten Form gegen die Funktion $F(z)$ in jedem regulären Randpunkt des Bereiches.

1. Es sei $\psi(\theta)$ eine reelle periodische Funktion mit der Periode 2π, welche die folgende Bedingung erfüllt:

(C) Im Intervalle $0<\theta<2\pi$ ist $\psi(\theta)$ eindeutig, positiv und stetig, derart, daß für einen positiven Wert Q größer als 1

$$\psi(+0)=Q, \quad \psi(-0)=1;$$

oder

$$\psi(+0)=1, \quad \psi(-0)=Q$$

ist, und $\psi(0)$ jeden Wert im abgeschlossenen Intervall $(1, Q)$ bedeutet.

Wie in meiner früheren Abhandlung definiere ich für diese Funktion $\psi(\theta)$ den Bereich $D(\psi)$, welcher den Nullpunkt in seinem Innern enthält und durch die abgeschlossene Kurve $r=\psi(\theta)$ begrenzt wird, und bezeichne mit $D(f, \psi)$ den Durchschnitt aller Bereiche, welche den Nullpunkt in ihrem Innern enthalten und durch die den Ecken $\varrho e^{i\varphi}$ des Mittag-Lefflerschen Sternes eines Elementes $f(z)=\sum c_n z^n$ zugeordneten Kurven $r=\varrho\psi(\theta-\varphi)$ begrenzt werden.

[1]) Mathematische Zeitschrift 23 (1925), S. 62–71; als I zitiert.

Dann kann man leicht sehen, daß auch für diese Bereiche alle Sätze (I—IV) der früheren Abhandlung bestehen. In der vorliegenden Abhandlung bezeichne ich mit $\psi(\theta)$ eine Funktion, welche eine der dortigen Bedingungen (A), (B) oder die Bedingung (C) erfüllt.

2. Nun beweisen wir den folgenden Satz:

Satz A. *Es sei* $a_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ *eine Folge von Funktionen, für welche* x *jeden positiven Wert oder nur jeden positiven ganzzahligen Wert annimmt, derart, daß für alle* $x \geqq X > 0$ *die Potenzreihen von* z

$$\Phi(z,x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) z^n$$

Konvergenzradien haben, die nicht kleiner als eine gewisse Zahl R *sind; es möge* $R>1$ *sein. Es sei für einen gewissen Bereich* $D(\psi)$ *im Kreis* $|z| \leqq R$ *und für die Potenzreihe* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *mit positivem Konvergenzradius* $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ *ein regulärer Randpunkt des Bereiches* $D(f,\psi)$ *derart, daß die singulären Punkte auf der Kurve* $r=\frac{r_0}{\psi(\theta_0-\theta)}$[2]) *nur von endlicher Anzahl und sämtliche Pole höchstens von der Ordnung* m *sind. Dann erhält man die Beziehung*

$$\lim_{x=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_n a_n(x) = F(z_0),$$

wo $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z_0^k$ *ist und* $F(z)$ *die durch geradlinige analytische Fortsetzung des Elementes* $f(z)=\sum c_n z^n$ *vom Nullpunkt her definierte Funktion bedeutet, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

a) *Es ist*

$$\lim_{x=\infty} \Phi(1,x) = 1.$$

b) *Es gilt*

$$\lim_{x=\infty} \Phi(z,x) = 0$$

gleichmäßig in jedem ganz im Innern von $D(\psi)$ *gelegenen, abgeschlossenen Bereich.*

c) *Es ist*

$$\lim_{x=\infty} \frac{d^{k-1}\Phi(z,x)}{dz^{k-1}} = 0$$

für $k=1,2,\ldots,m$, *und für alle Randpunkte* $z(\neq 1)$ *von* $D(\psi)$.

Beweis. Für $f(z)=\sum c_n z^n$ mit positivem Konvergenzradius und für jeden im Innern von $D(f,\psi)$ gelegenen Punkt $z'=r'e^{i\theta'}$ ist jeder Punkt in dem durch die Kurve mit der Gleichung $r=\frac{r'}{\psi(\theta'-\theta)}$ begrenzten Bereich ein zum Sterne von $f(z)$ gehöriger Punkt[3]); und wir können z'

[2]) Siehe die Fußnote [2]), a. a. O. I, S. 65. [3]) A. a. O. I, S. 65.

so nahe an einem regulären Randpunkt $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ von $D(f, \psi)$ nehmen, daß jeder Punkt innerhalb des durch die Kurve $r = \frac{r_0}{\psi(\theta_0 - \theta)}$ begrenzten Bereiches ein Punkt im Bereich der Kurve $r = \frac{r'}{\psi(\theta' - \theta)}$ ist. Also gehören alle Punkte innerhalb des durch die Kurve $r = \frac{r_0}{\psi(\theta_0 - \theta)}$ begrenzten Bereichs zum Sterne. Wenn daher für $f(z)$ alle singulären Punkte auf der Kurve $r = \frac{r_0}{\psi(\theta_0 - \theta)}$ nur Pole $d_\nu = \varrho_\nu e^{i\varphi_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ höchstens der Ordnung m sind, liegt in dem durch diese Kurve begrenzten Bereich kein singulärer Punkt von

$$F_1(z) = F(z) - \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} \frac{A_{\nu k}}{(d_\nu - z)^k},$$

wo $A_{\nu k}$ feste Zahlen bedeuten.

Folglich muß der Bereich $D(f_1, \psi)$ für das Element

$$f_1(z) = \left(c_0 - \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} \frac{A_{\nu k}}{d_\nu^k}\right) + \left(c_1 - \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{1!} \frac{A_{\nu k}}{d_\nu^{k+1}}\right) z + \left(c_2 - \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} \frac{k(k+1)}{2!} \frac{A_{\nu k}}{d_\nu^{k+2}}\right) z^2 + \cdots$$

den Punkt z_0 in seinem Innern enthalten. Denn sonst ergäbe sich unter Benutzung einer passenden Ecke $\varrho e^{i\varphi}$ vom Sterne des Elementes $f_1(z)$

$$r_0 \geqq \varrho\, \psi(\theta_0 - \varphi)$$ [4])

und folglich läge der singuläre Punkt $\varrho e^{i\varphi}$ in dem durch die Kurve $r = \frac{r_0}{\psi(\theta_0 - \theta)}$ begrenzten Bereich, was gegen die Voraussetzung ist. Daher findet man nach a) und b) mit Hilfe von Satz I

$$\begin{aligned} &\lim_{x=\infty} \Bigg[\left\{ c_0 - \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} \frac{A_{\nu k}}{d_\nu^k} \right\} a_1(x) \\ &+ \left\{ (c_0 + c_1 z_0) - \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} A_{\nu k} \left(\frac{1}{d_\nu^k} + \frac{k}{1!} \frac{z_0}{d_\nu^{k+1}} \right) \right\} a_2(x) + \left\{ (c_0 + c_1 z_0 + c_2 z_0^2) \right. \\ &\left. - \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} A_{\nu k} \left(\frac{1}{d_\nu^k} + \frac{k}{1!} \frac{z_0}{d_\nu^{k+1}} + \frac{k(k+1)}{2!} \frac{z_0^2}{d_\nu^{k+2}} \right) \right\} a_3(x) + \cdots \Bigg] \\ &= F(z_0) - \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} \frac{A_{\nu k}}{(d_\nu - z_0)^k}. \end{aligned} \tag{1}$$

[4]) Im Fall, wo $\psi(\theta)$ die Bedingung (C) erfüllt, verstehen wir unter $\psi(0)$ einen Wert im abgeschlossenen Intervall $(1, Q)$.

Nun sei $z(\neq 1)$ ein beliebiger Randpunkt von $D(\psi)$, d. h. ein Punkt auf der Kurve $r=\psi(\theta)$. Dann findet man durch $(k-1)$-fache Ableitung der Funktion

$$\frac{\Phi(1,x)-z^{k-1}\Phi(z,x)}{1-z}=(1+z+\ldots+z^{k-1})\,a_1(x)+(1+z+\ldots+z^k)\,a_2(x)+\ldots$$

nach z nach einiger Umformung

$$\frac{\Phi(1,x)}{(1-z)^k}=\left[a_1(x)+\left(1+\frac{k}{1!}z\right)a_2(x)+\left(1+\frac{k}{1!}z+\frac{k(k+1)}{2!}z^2\right)a_3(x)+\ldots\right]+\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{z^{k-1}\Phi(z,x)}{1-z}\right].$$

Da aus c)

$$\lim_{x=\infty}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{z^{k-1}\Phi(z,x)}{1-z}\right]=0$$

folgt, so erhält man nach a)

$$(2)\quad \lim_{x=\infty}\left[a_1(x)+\left(1+\frac{k}{1!}z\right)a_2(x)+\left(1+\frac{k}{1!}z+\frac{k(k+1)}{2!}z^2\right)a_3(x)+\ldots\right]=\frac{1}{(1-z)^k}.$$

Da aber jeder singuläre Punkt d_ν auf der Kurve $r=\frac{r_0}{\psi(\theta_0-\theta)}$ liegt, so liegt jeder Punkt $z=\frac{z_0}{d_\nu}$, welcher nicht 1 ist, auf der Kurve $r=\psi(\theta)$. Daher erhält man nach (2)

$$\lim_{x=\infty}\left[a_1(x)+\left(1+\frac{k}{1!}\frac{z_0}{d_\nu}\right)a_2(x)+\left(1+\frac{k}{1!}\frac{z_0}{d_\nu}+\frac{k(k+1)}{2!}\frac{z_0^2}{d_\nu^2}\right)a_3(x)+\ldots\right]=\frac{1}{\left(1-\frac{z_0}{d_\nu}\right)^k},$$

woraus folgt

$$\lim_{x=\infty}\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}\frac{A_{\nu k}}{d_\nu^k}\left[a_1(x)+\left(1+\frac{k}{1!}\frac{z_0}{d_\nu}\right)a_2(x)+\left(1+\frac{k}{1!}\frac{z_0}{d_\nu}+\frac{k(k+1)}{2!}\frac{z_0^2}{d_\nu^2}\right)a_3(x)+\ldots\right]=\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}\frac{A_{\nu k}}{(d_\nu-z_0)^k},$$

folglich erhält man aus (1)

$$\lim_{x=\infty}\left[s_1\,a_1(x)+s_2\,a_2(x)+s_3\,a_3(x)+\ldots\right]=F(z_0),$$

wo

$$s_n=\sum_{k=0}^{n-1}c_k z_0^k.$$

Somit ist der vorgelegte Satz bewiesen.

Bemerkung. Aus dem Satz können wir einige bekannte Resultate von v. Koch[5]), Doetsch[6]) und Knopp[7]) herleiten.

3. Im Anschluß an Satz III der vorigen Abhandlung können wir den folgenden Satz beweisen:

Satz B. *Es sei* $b_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ *eine Folge, für welche* x *jeden positiven Wert oder nur jeden positiven ganzzahligen Wert annimmt, derart, daß für jedes* $x \geqq X > 0$

$$\Psi(z,x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) z^n$$

eine Potenzreihe von z *ist, deren Konvergenzradius nicht kleiner als* $R(>1)$ *ist. Es sei für einen gewissen Bereich* $D(\psi)$ *im Kreis* $|z| \leqq R$ *und für eine Potenzreihe* $f(z) = \sum c_n z^n$ *mit positivem Konvergenzradius* $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ *ein regulärer Randpunkt von* $D(f,\psi)$, *welcher die Bedingung von Satz* A *erfüllt. Dann erhält man die Beziehung*

$$\lim_{x=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) c_n z_0^n = F(z_0),$$

wo $F(z)$ *die oben definierte Funktion bedeutet, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

a) *Es ist*

$$\lim_{x=\infty} b_0(x) = 1.$$

b) *Es gilt*

$$\lim_{x=\infty} \sum_{n=1} [b_{n-1}(x) - b_n(x)] z^n = 0$$

gleichmäßig in jedem ganz im Innern von $D(\psi)$ *gelegenen, abgeschlossenen Bereich.*

c) *Es ist*

$$\lim_{x=\infty} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} [b_{n-1}(x) - b_n(x)] z^n = 0$$

für $k = 1, 2, \ldots, m$ *und für alle Randpunkte* $z(\neq 1)$ *von* $D(\psi)$.

Beweis. Da der Konvergenzradius von $\Psi(z,x)$ für alle $x \geqq X > 0$ nicht kleiner als $R(>1)$ ist, so findet man, wenn man

$$(3) \quad \Phi(z,x) = z\Psi(z,x) - [\Psi(z,x) - b_0(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} [b_{n-1}(x) - b_n(x)] z^n$$

setzt, daß der Konvergenzradius von $\Phi(z,x)$ für alle $x \geqq X > 0$ auch nicht kleiner als R ist.

---

[5]) Sur le prolongement d'une série de Taylor, Arkiv för matematik, astronomi o. fysik **12** (1917), No. 11, S. 28.

[6]) Über die Summabilität von Potenzreihen auf dem Rande des Borelschen Summabilitätspolygons, Math. Annalen **84** (1921), S. 245–251, insbesondere S. 250.

[7]) Über Eulersche Summierungsverfahren, II, Math. Zeitschr. **18** (1923), S. 125–156, Satz 13.

Indem man nun die für einen beliebigen Randpunkt $z(+1)$ von $D(\psi)$ aus (3) folgende Relation

$$\frac{\Phi(1,x)-z^{k-1}\Phi(z,x)}{1-z}=(1+z+z^2+\ldots+z^{k-2})\,b_0(x)+z^{k-1}\Psi(z,x)$$

$(k-1)$-fach nach z differentiiert, erhält man nach einiger Umformung

$$\frac{\Phi(1,x)}{(1-z)^k}=\left[b_0(x)+b_1(x)\frac{k}{1!}z+b_2(x)\frac{k(k+1)}{2!}z^2+\ldots\right]$$

$$+\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\frac{z^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}[b_{n-1}(x)-b_n(x)]z^n}{1-z}.$$

Da nach a) und c) die Gleichungen

$$\lim_{x=\infty}\Phi(1,x)=\lim_{x=\infty}b_0(x)=1,$$

$$\lim_{x=\infty}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\frac{z^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}[b_{n-1}(x)-b_n(x)]z^n}{1-z}=0$$

gelten, so ist

$$\frac{1}{(1-z)^k}=\lim_{x=\infty}\left[b_0(x)+b_1(x)\frac{k}{1!}z+b_2(x)\frac{k(k+1)}{2!}z^2+\ldots\right].$$

Hieraus können wir wie im Beweis von Satz A mit Hilfe von Satz III den vorgelegten Satz B beweisen.

Bemerkung. Indem man einen Bereich $D(\psi)$ wählt, dessen $\psi(\theta)$ die Bedingung (C) erfüllt, kann man aus dem Satz B die folgenden Resultate[8]) herleiten:

Es sei $f(z)=\sum c_n z^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius und es sei $\zeta=\varrho\,e^{i\varphi}$ eine Ecke des Mittag-Lefflerschen Sterns des Elementes $f(z)$. Wenn dann für $f(z)$ $z_0=r_0\,e^{i\varphi}$ $(\varrho<r_0)$ ein regulärer Punkt ist und alle singulären Punkte zwischen den Punkten ζ und z_0 nur Pole von endlicher Anzahl sind, so gilt

$$F(z_0)=\lim_{x=\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n z^n e^{\frac{n\pi i}{x}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{x}\right)},$$

wo $F(z)$ die oben definierte Funktion bedeutet.

---

[8]) Das ist ein spezieller Fall des Resultates von v. Koch, Contributions à la théorie du prolongement d'une fonction analytique, Arkiv för matematik, astronomi o. fysik **12** (1917), No. 23, S. 28—29.

(Eingegangen am 24. Juni 1926.)

Sur les fonctions conjuguées.

Par

Marcel Riesz à Lund.

Introduction.

Dans ce travail[1]), nous commençons par établir une inégalité qui a lieu entre les intégrales de $|U|^p$ et de $|V|^p$, où U et V sont respectivement la partie réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe, les intégrales étant prises le long de certaines circonférences concentriques. En désignant alors par L^p, où $p > 1$, la classe des fonctions sommables $f(x)$ telles que $|f(x)|^p$ soit aussi sommable, nous démontrons, entre autre, que deux séries trigonométriques conjuguées sont en même temps les séries de Fourier de fonctions de la classe L^p, $f(x)$ et $\bar{f}(x)$, la fonction $\bar{f}(x)$ étant, à une constante additive près, donnée par la formule

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cot\frac{x-t}{2}\,dt:$$

l'intégrale est prise au sens de la valeur principale de Cauchy.

---

[1]) Ich habe diese Arbeit vor etwa zwei Jahren in der vorliegenden Form niedergeschrieben, nachdem ich etwas früher eine kurze Mitteilung über den Gegenstand (Sur les fonctions conjuguées et les séries de Fourier, Comptes rendus 178, p. 1464, 28 avril 1924) veröffentlicht hatte. Ich hatte von Anfang an die Absicht, die Arbeit in erweiterter und umgearbeiteter Form, ins Deutsche übertragen, in der *Mathematischen Zeitschrift* zu veröffentlichen. Da nun sowohl von mir wie auch von verschiedenen anderen Verfassern auf Grund der gedruckten oder persönlichen Mitteilungen auf die Arbeit mehrfach Bezug genommen wurde (vgl. u. a. E. Hilb-M. Riesz, Encykl. d. math. Wissensch. II C 10, S. 1211 u. 1213, E. Hobson, Theory of Funct. of a Real Variable II (1926), S. 610–614, 698; E. C. Titchmarsh, Reciprocal formulae involving series and integrals. Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 321–347), will ich die Veröffentlichung nicht länger hinauszögern, und gebe die Arbeit in unveränderter Form wieder.

Stockholm, den 15. Juli 1926. M. R.

En désignant par $s_n(x)$ les sommes de la série de Fourier de $f(x)$, on tire de l'inégalité qui a lieu entre l'intégrale de $|f(x)|^p$ et celle de $|\bar{f}(x)|^p$ le fait que, pour toute fonction $f(x)$ de la classe L^p, l'intégrale de $|s_n(x)|^p$ reste bornée lorsque n tend vers l'infini. De ce théorème, il résulte immédiatement le théorème de Parseval pour le produit de deux fonctions appartenant à des classes complémentaires L^p et L^q, où $1/p + 1/q = 1$, théorème bien connu dans le cas particulier $p = q = 2$.

Il y a pourtant une différence essentielle entre ce cas particulier et le cas général. Tandis que la série intervenant dans le théorème général est toujours convergente, ce n'est que dans le cas particulier qu'il y a nécessairement convergence absolue.

Dans la seconde partie, nous établissons des théorèmes analogues pour l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. En particulier, nous démontrons que, pour deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ appartenant à des classes complémentaires, l'intégrale double

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{f(x)\,g(y)}{x-y}\,dx\,dy$$

existe toujours, si on la prend au sens de la valeur principale de Cauchy et que cette intégrale satisfait à une certaine inégalité. En particularisant les fonctions $f(x)$ et $g(x)$, on trouve que la forme bilinéaire

$$\sum_{i,\,k=-\infty}^{+\infty} \frac{x_i\,y_k}{i-k}, \qquad i \neq k,$$

reste bornée sous les conditions

$$\Sigma|x_i|^p \leqq 1 \qquad \Sigma|y_k|^q \leqq 1, \qquad 1/p + 1/q = 1.$$

Comme on sait, c'est M. Hilbert qui a considéré le premier cette forme bilinéaire bien remarquable, en démontrant qu'elle était bornée sous les conditions $\Sigma|x_i|^2 \leqq 1$, $\Sigma|y_k|^2 \leqq 1$ qui correspondent au cas $p = q = 2$.

Dans le même chapitre nous faisons quelques remarques sur certaines substitutions particulières.

On étudie aussi, $f(x)$ étant une fonction de la classe L^p, la fonction de la variable complexe z,

$$F(z) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-z}\,dy,$$

dont la partie réelle prend les valeurs $\pm f(x)$ presque partout sur les deux bords de l'axe réel.

Les résultats et les méthodes du présent travail admettent bien des applications, entre autre dans la théorie des équations intégrales singulières.

Tel est le cas, en particulier, pour deux formules de *réciprocité* que nous démontrons sous des conditions beaucoup plus générales qu'on ne l'a fait jusqu'ici. Nous reviendrons à ces applications dans un travail prochain.

I. Le cas d'un intervalle fini.

1. Nous dirons que $f(x)$ appartient à la classe L^p, où $p > 1$, par rapport à l'intervalle (a, b), si $f(x)$ et $|f(x)|^p$ sont sommables[2]) dans cet intervalle. On désignera dans la suite par p et q deux nombres positifs > 1 tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1}$$

On appellera respectivement les exposants p et q et les classes L^p et L^q exposants et classes *complémentaires*.

Désignons maintenant par $f(x)$ et $g(x)$ des fonctions appartenant à de telles classes. On connaît l'inégalité de Hölder-Schwarz

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$

et celle de Minkowski[3]), valable pour deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ de la classe L^p,

$$\left(\int_a^b |f_1(x) + f_2(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\int_a^b |f_1(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |f_2(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Bien entendu, il s'ensuit de nos hypothèses que toutes les intégrales écrites existent.

2. Moyennant ces inégalités, on établit facilement le théorème suivant:

I. *Soit* $F(z) = F(re^{ix}) = U(x, r) + iV(x, r)$ *une fonction holomorphe pour* $|z| < R$, *dont la partie imaginaire s'annule à l'origine. On aura alors pour* $|z| = r < R$ *une inégalité de la forme*

$$\int_0^{2\pi} |V(x, r)|^p\,dx \leqq M_p^p \int_0^{2\pi} |U(x, r)|^p\,dx, \tag{4}$$

la constante M_p *ne dépendant que de* p.

Ce théorème est bien connu pour $p = 2$ et s'obtient dans ce cas particulier comme un corollaire immédiat du théorème de Parseval. Or nous allons voir par la démonstration générale qui suit que c'est le théorème de Cauchy qui est la vraie source du théorème. Dans cette

---

[2]) La sommabilité de $|f|^p$ entraîne celle de $|f|$, mais non pas celle de f.

[3]) Voir pour ces inégalités F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Annalen 69 (1910), p. 456.

démonstration, nous distinguerons trois cas suivant que p est un entier pair, un nombre non entier, ou un entier impair.

3. Posons $F(0) = u$. Soit d'abord p un entier pair. On aura alors d'après le théorème de Cauchy

$$(5) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=r}\frac{(F(z))^p}{z}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(U(x,r)+iV(x,r))^p\,dx = u^p.$$

En passant à la partie réelle, on trouve

$$\int V^p < \int\left(\binom{p}{2}V^{p-2}U^2 + \binom{p}{6}V^{p-6}U^6 + \ldots\right) + (-1)^{\frac{p}{2}}\,2\pi u^p\,.$$

En observant d'abord que

$$2\pi u^p = (2\pi)^{1-p}\left(\int U\right)^p < \int U^p,$$

en posant

$$(6) \qquad \int V^p = X^p \int U^p$$

et en remplaçant, dans (2), p et q par $p/(p-2k)$ et $p/2k$ respectivement, on obtient

$$(7) \qquad X^p < \binom{p}{2}X^{p-2} + \binom{p}{6}X^{p-6} + \ldots + 1.$$

X est donc plus petit que la racine positive de l'équation

$$X^p - \binom{p}{2}X^{p-2} - \binom{p}{6}X^{p-6} - \ldots - 1 = 0.$$

Il en résulte, en particulier, que les intégrales figurant en (4) restent bornées en même temps, et que la borne supérieure M_p des valeurs X définies par la relation (6) est aussi limitée par ladite racine.

4. Désignons maintenant par p un nombre > 1 d'ailleurs tout à fait arbitraire. On réduit facilement le théorème à démontrer au cas où les conditions originales sont remplacées par les conditions suivantes: $U + iV$ est holomorphe pour $|z| < r$ et continue pour $|z| \leqq r$ et on a $U \geqq 0$ pour $|z| = r$.

En effet, il vient par une formule connue,

$$(8) \qquad F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(x,r)\frac{re^{ix}+z}{re^{ix}-z}\,dx, \qquad |z| < r.$$

En posant alors $U(x,r) = U_1(x,r) - U_2(x,r)$, où $U_1(x,r) = 0$ pour toute valeur de x où $U(x,r) \leqq 0$, et $U_2(x,r) = 0$ pour toute valeur où $U(x,r) \geqq 0$, on obtiendra deux fonctions non négatives, à des dérivées simplement discontinues. En introduisant ces fonctions en (8), on obtient

$F(z) = F_1(z) - F_2(z)$. En intégrant par parties, on voit que les fonctions $F_1(z)$ et $F_2(z)$ tendent uniformément vers des fonctions limites de la forme $U_1(x, r) + iV_1(x, r)$ et $U_2(x, r) + iV_2(x, r)$ lorsque z tend vers la circonférence du rayon r.

En admettant maintenant que le théorème soit vrai sous les conditions modifiées, la constante M_p étant remplacée par une certaine constante M_p', on aura d'après (3)

$$\left(\int_0^{2\pi} |V(x,r)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\int_0^{2\pi} |V_1(x,r)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{2\pi} |V_2(x,r)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq M_p' \left(\int_0^{2\pi} |U_1(x,r)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + M_p \left(\int_0^{2\pi} |U_2(x,r)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq 2 M_p' \left(\int_0^{2\pi} |U(x,r)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Par conséquent, on aura $M_p \leqq 2 M_p'$, et alors on a montré que le problème original se réduit au problème modifié.

5. Cela posé, admettons donc que les conditions modifiées aient lieu. Alors, U étant $\geqq 0$ sur la circonférence $|z| = r$, la fonction $U + iV$ ne s'annule pas à l'intérieur de cette circonférence. Cela étant, considérons celle des branches de $(U + iV)^p$ qui est réelle et positive à l'origine. On pourra écrire

$$(U + iV)^p = (iV)^p + \sigma = e^{\pm \frac{ip\pi}{2}} |V|^p + \sigma$$

suivant le signe de V, et où l'on trouve par un calcul simple (évaluation d'une intégrale rectiligne)

$$|\sigma| < 2^{\frac{p-1}{2}}\, p(U|V|^{p-1} + U^p).$$

En passant à la partie réelle et en définissant encore X par l'équation (6), où l'on remplace V par $|V|$, on obtient immédiatement une inégalité de la forme

$$\left|\cos\frac{p\pi}{2}\right| X^p < C_1 X^{p-1} + C_2,$$

les constantes C_1 et C_2 ne dépendant que de p. La valeur X est donc plus petite que la racine positive de l'équation

$$\left|\cos\frac{p\pi}{2}\right| X^p - C_1 X^{p-1} - C_2 = 0.$$

6. Par le raisonnement général qui précède, le théorème est établi pour tout exposant qui n'est pas un entier impair. Par contre, pour ces derniers exposants, la démonstration tombe en défaut, et il faut recourir

à une démonstration indirecte. A cet effet, nous établirons que le théorème a lieu *en même temps* pour des exposants complémentaires p et q et que l'on a de plus

$$M_p = M_q .$$

La démonstration de ce fait repose sur le théorème élémentaire bien connu[4]) qui suit.

Si la fonction continue $g(x)$ remplit l'inégalité

$$(9) \qquad \left| \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \right| \leqq A \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour toute fonction continue $f(x)$, alors on a

$$\int_a^b |g(x)|^q dx \leqq A^q .$$

Voici en quelques mots la démonstration de ce théorème. On pourra admettre, sans restreindre la généralité, que $g(x) \geqq 0$. En posant alors $f = g^{\frac{q}{p}}$, on trouve, en tenant compte de (1) et de (2),

$$\int_a^b (g(x))^{1+\frac{q}{p}} dx = \int_a^b (g(x))^q dx \leqq A \left(\int_a^b (g(x))^q dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

De là on tire

$$\int_a^b (g(x))^q dx \leqq A^q .$$

Il est manifeste que ce théorème subsiste encore, si l'on assujettit $f(x)$ à appartenir à certaines classes particulières de fonctions continues, p. ex., s'il est question de l'intervalle $(0, 2\pi)$, à celles des sommes trigonométriques d'ordre fini quelconque.

Soit maintenant $F(z) = U + iV$ une fonction holomorphe pour $|z| < R$ telle que V s'annule à l'origine, et désignons par $F_1(z) = U_1 + iV_1$ un polynome arbitraire de z dont la partie imaginaire est également nulle à l'origine. Alors il en sera de même de la partie imaginaire du produit $F(z)\, F_1(z)$ et l'on pourra écrire, l'intégrale étant prise le long d'une circonférence quelconque $|z| = r < R$,

$$\int_0^{2\pi} (U_1(x,r)\, V(x,r) + U(x,r)\, V_1(x,r))\, dx = 0 .$$

On en tire, le théorème étant supposé vrai pour l'exposant p,

$$|\int U_1 V| = |\int U V_1| \leqq (\int |U|^q)^{\frac{1}{q}} (\int |V_1|^p)^{\frac{1}{p}} \leqq M_p (\int |U|^q)^{\frac{1}{q}} (\int |U_1|^p)^{\frac{1}{p}} ,$$

[4]) Pour une forme approfondie de ce théorème, voir F. Riesz, loc. cit. p. 457.

et alors, par le théorème élémentaire que nous venons de citer,

$$\int |V|^q \leqq M_p^q \int |U|^q .$$

Cette inégalité montre que l'on a toujours $M_q \leqq M_p$ et alors, par symétrie, $M_q \leqq M_p$, ce qui achève la démonstration.

7. Cela étant, on voit que M_p considéré comme fonction de $1/p$ est symétrique par rapport à $1/2$. On a $M_2 = 1$, et il est facile de montrer que $M_p > 1$ pour toute autre valeur de p. Il est aussi facile de voir que M_p tend vers ∞ lorsque $p \to \infty$, ou $p \to 1$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, le théorème ci-dessus tiendrait aussi pour ces exposants limites ce qui est en contradiction avec des faits connus. Il serait d'un certain intérêt d'étudier de plus près les propriétés de croissance, de convexité etc. de M_p[4']). Nous nous restreignons ici à donner une borne supérieure pour M_p dans le cas où p est un entier pair, en ajoutant que le raisonnement des n^{os} 5 et 6 permet de démontrer que pour tout $p \geqq 2$, on a $M_p < Cp$, la constante C étant indépendante de p.

Admettons donc que p soit un nombre entier et pair. De l'inégalité (7), il vient, à plus forte raison,

$$2X^p < (X+1)^p ,$$

et alors

$$X < \frac{1}{\frac{1}{2^p} - 1} < \frac{p}{\log 2} .$$

8. Soit $f(x)$ une fonction de la classe L^p par rapport à l'intervalle $(0, 2\pi)$. Formons la fonction qui est holomorphe pour $|z| < 1$ et dont la partie imaginaire s'annule à l'origine

$$F(z) = F(re^{ix}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \, dt . \tag{9}$$

Des recherches de M. Fatou[5]) et de celles de M. Plessner[6]), il résulte que, si l'on fait tendre z vers les points de la circonférence $|z| = 1$ le long des rayons de cette circonférence, la partie réelle de $F(z)$ tend presque partout vers la fonction $f(x)$, tandis que la partie imagi-

---

4') [Note ajoutée pendant la correction des épreuves.] Pour une telle étude, voir M. Riesz, Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, Acta Math. 49 (1927), p. 465–497; p. 486.

5) P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta math. 30 (1906), p. 335–400.

6) A. Plessner, Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen, Thèse, Giessen, 1923, 36 p.

naire $V(x, r)$ tend presque partout[7]) vers la valeur principale, *existant presque partout*, de l'intégrale

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \cot \frac{x-y}{2}\, dy. \tag{10}$$

Cela étant, notre théorème I conduit facilement au théorème suivant:

II. *Si $f(x)$ appartient à la classe L^p, $\bar{f}(x)$ y appartient également; de plus on a l'inégalité*

$$\int_0^{2\pi} |\bar{f}(x)|^p\, dx \leqq M_p^p \int_0^{2\pi} |f(x)|^p\, dx. \tag{11}$$

On a, en effet, pour la partie réelle $U(x, r)$ de $F(z)$, si l'on définit encore $f(x)$ à l'extérieur de l'intervalle $(0, 2\pi)$ par la propriété d'être périodique et de période 2π,

$$U(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+y) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos y}\, dy. \tag{12}$$

Or, $h(x)$ désignant une fonction quelconque de la classe L^q, on conclut par l'inégalité de Hölder-Schwarz d'une façon générale:

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x+y) h(y)\, dy \right|^p \leqq \left(\int_0^{2\pi} |f(x+y)|^p |h(y)|\, dy \right) \left(\int_0^{2\pi} |h(y)|\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \tag{13}$$

et alors, en tenant compte de la périodicité de $f(x)$,

$$\int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x+y) h(y)\, dy \right|^p dx \leqq \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\, dx \right) \left(\int_0^{2\pi} |h(x)|\, dx \right)^p. \tag{14}$$

En utilisant alors la relation

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos y}\, dy = 1, \tag{15}$$

on trouve[8]), en particulier,

$$|U(x,r)|^p \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+y)|^p \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos y}\, dy \tag{16}$$

et

$$\int_0^{2\pi} |U(x,r)|^p\, dx \leqq \int_0^{2\pi} |f(x)|^p\, dx. \tag{17}$$

---

[7]) En réalité, $V(x,r)$ tend vers $\bar{f}(x)$ en tout point où cette valeur principale existe. Cf. Hilb-Riesz, Encykl. der math. Wissensch. II C 10, p. 1208, note 79a.

[8]) Cette inégalité est due à W. Gross, Wiener Ber. 124 (1915), p. 1017—1037.

Cela étant, on trouve par le théorème I

$$\int_0^{2\pi} |V(x,r)|^p\,dx \leqq M_p^p \int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx. \tag{18}$$

Alors, en appliquant un théorème connu de M. Fatou[9]), on voit que $\bar{f}(x)$ appartient également à la classe L^p et que l'inégalité (11) est remplie.

9. Un corollaire immédiat du théorème qui précède est le théorème suivant:

III. *Deux séries trigonométriques conjuguées sont en même temps les séries de Fourier de fonctions de la classe L^p.*

On entend par séries trigonométriques conjugées deux séries de la forme

$$S = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

et

$$\bar{S} = \frac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

considérées à un point de vue tout à fait formel et satisfaisant à la relation encore formelle

$$S - i\bar{S} = \frac{a_0 - ib_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)\,e^{nix}.$$

Admettons donc que S soit la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ de la classe L^p. Introduisons alors, pour $r<1$, les fonctions harmoniques, conjuguées

$$U(x,r) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,r^n$$

et

$$V(x,r) = -\left(\frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos nx - a_n \sin nx)\,r^n\right).$$

On peut, sans restreindre la généralité, supposer que $b_0 = 0$.

Les constantes de Fourier de $V(x,r)$ considérée comme fonctions de x sont évidemment $-b_n r^n$ et $a_n r^n$. D'autre part, on a entre $U(x,r)$ et $f(x)$ la relation (12) et l'inégalité (17) qui, de son côté, donne pour $V(x,r)$ l'inégalité (18). En désignant maintenant la fonction limite de

[9]) Voir Fatou, loc. cit. p. 375–376. Le théorème en question dit que, si $f_n(x)$ tend presque partout vers $f(x)$ et que l'intégrale de $|f_n(x)|$ reste $\leqq A$, il en sera de même de l'intégrale de $|f(x)|$.

$V(x,r)$ par $\bar{f}(x)$, cette fonction appartiendra à la classe L^p et on voit par un théorème connu [10]) sur le passage à la limite sous le signe d'intégration que cette fonction admet comme constantes de Fourier les nombres $-b_n$ et a_n respectivement.

Le raisonnement montre aussi qu'il y a (au signe et à une constante additive près) une réciprocité complète entre les deux fonctions $f(x)$ et $\bar{f}(x)$ de la classe L^p. La formule (10) admet *la réciproque*:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{f}(y)\cot\frac{y-x}{2}\,dy+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(y)\,dy. \tag{19}$$

10. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions appartenant par rapport à l'intervalle $(0,2\pi)$ aux classes complémentaires L^p et L^q. Nous démontrons le théorème suivant:

IV. *On a*

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,g(y)\cot\frac{x-y}{2}\,dx\,dy\right| \tag{20}$$

$$\leqq M_p\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{2\pi}|g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

l'intégrale double existant toujours, si on la prend au sens de la valeur principale de Cauchy, c'est-à-dire comme limite de l'intégrale étendue aux valeurs $|x-y|>\varepsilon>0$.

11. Pour arriver à ce théorème, écrivons $\bar{f}(x)$ sous la forme

$$\bar{f}(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+y)\cot\frac{y}{2}\,dy$$

et formons la fonction

$$\bar{f}_\varepsilon(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon}f(x+y)\cot\frac{y}{2}\,dy, \qquad 0<\varepsilon<\pi. \tag{21}$$

Alors $f(x)$ est une fonction continue x. Démontrons l'inégalité [11])

$$\int_0^{2\pi}|\bar{f}_\varepsilon(x)|^p\,dx\leqq\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^p\int_0^{2\pi}|\bar{f}(x)|^p\,dx. \tag{22}$$

---

[10]) Ce théorème, dû à M. F. Riesz, dit que si les fonctions $f_n(x)$ tendent presque partout vers une fonction $f(x)$ et si l'intégrale de $|f_n(x)|^p$ reste bornée, on a pour toute fonction $g(x)$ de la classe L^q

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\,g(x)\,dx=\int f(x)\,g(x)\,dx.$$

[11]) Cette relation tient si l'on remplace p par un nombre k quelconque $\geqq 1$, le second membre pouvant devenir infini pour $k>p$.

Nous exprimerons $\bar{f}_\varepsilon(x)$ par $\bar{f}(x)$. Considérons à cet effet la fonction $g(y)$ égale à $\cot\frac{y}{2}$ pour $\varepsilon < y < 2\pi - \varepsilon$ et nulle ailleurs. Désignons par $\bar{g}(y)$ une quelconque des fonctions conjuguées de $g(y)$, ces fonctions n'étant déterminées qu'à une constante additive près. Or la partie imaginaire de la fonction holomorphe correspondant à $f(y) + i\bar{f}(y)$ est nulle à l'origine. La fonction $g(y)$ étant impaire, la partie réelle de la fonction holomorphe correspondant à $g(y) + i\bar{g}(y)$ s'annulera également à l'origine. Par conséquent, il en sera encore de même de la partie réelle du produit des deux fonctions holomorphes. On obtient donc par le théorème de Cauchy[12])

$$\int_0^{2\pi} (f(x+y)g(y) - \bar{f}(x+y)\bar{g}(y))\,dy = 0, \tag{23}$$

ce qui donne en définitive

$$\bar{f}_\varepsilon(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}(x+y)\bar{g}(y)\,dy. \tag{24}$$

Reste à calculer les fonctions $\bar{g}(y)$. Une telle fonction sera fournie par les valeurs que prend sur la circonférence de rayon *un* la partie imaginaire de la fonction holomorphe

$$G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{e^{iy}+z}{e^{iy}-z}\cot\frac{y}{2}\,dy.$$

Observons tout de suite que l'on a $G(0) = 0$. De plus, on trouve par un calcul facile

$$G(z) = \frac{1}{\pi}\left(i(\pi-\varepsilon) - i(\pi-\varepsilon)\frac{z+1}{z-1} + \frac{z+1}{z-1}\log\left(\frac{e^{i(2\pi-\varepsilon)}-z}{e^{i\varepsilon}-z}\right)\right),$$

le logarithme qui intervient étant déterminé par la condition $G(0) = 0$. La partie imaginaire de cette fonction, sur la circonférence de rayon *un*, sera, en posant $z = e^{iy}$,

$$1 - \frac{\varepsilon}{\pi} - \frac{1}{\pi}\cot\frac{y}{2}\log\left|\frac{e^{iy}-e^{-i\varepsilon}}{e^{iy}-e^{i\varepsilon}}\right|.$$

La relation $G(0) = 0$ donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cot\frac{y}{2}\log\left|\frac{e^{iy}-e^{-i\varepsilon}}{e^{iy}-e^{i\varepsilon}}\right| dy = 1 - \frac{\varepsilon}{\pi}. \tag{25}$$

[12]) Pour démontrer la légitimité de cette formule, on n'a qu'à recourir au théorème sur le passage à la limite qu'on vient de citer au numéro précédent.

D'autre part, en vertu de (24), on peut écrire

$$(26) \qquad \bar{f}_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} \bar{f}(x+y)\cot\frac{y}{2}\log\left|\frac{e^{iy}-e^{-i\varepsilon}}{e^{iy}-e^{i\varepsilon}}\right| dy.$$

En désignant le facteur par lequel $\bar{f}(x+y)$ est multiplié par $h(y)$, on observe d'abord que $h(y) > 0$ et que l'on a d'après (25)

$$(27) \qquad \int_0^{2\pi} h(y)\,dy = 1 - \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

On en tire par l'inégalité (14), en tenant encore compte de (27),

$$(28) \qquad \int_0^{2\pi} |\bar{f}_\varepsilon(x)|^p dx \leqq \left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^p \int_0^{2\pi} |\bar{f}(x)|^p dx.$$

12. Cela étant, la démonstration du théorème IV s'achève facilement. En effet, on a d'une part pour presque toutes les valeurs de x,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \bar{f}_\varepsilon(x) = \bar{f}(x).$$

D'autre part, d'après (11) et (28),

$$(29) \qquad \int_0^{2\pi} |f_\varepsilon(x)|^p dx \leqq M_p^p \left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^p \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx.$$

On pourra donc appliquer le théorème sur le passage à la limite cité plus haut et écrire

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} \bar{f}_\varepsilon(y)\,g(y)\,dy = \int_0^{2\pi} \bar{f}(y)\,g(y)\,dy.$$

Par conséquent, l'intégrale double existe toujours au sens de la valeur principale de Cauchy. Il suffit maintenant d'appliquer encore une fois l'inégalité de Hölder-Schwarz pour arriver à l'inégalité (20).

Ajoutons que si l'on n'étend, en (20), l'intégrale double qu'aux valeurs $|x-y| > \varepsilon$, l'inégalité subsiste, même si l'on multiplie le second membre par $1-\frac{\varepsilon}{\pi}$.

Quelques applications à la série de Fourier.

13. Soit toujours $f(x)$ une fonction de la classe L^p par rapport à l'intervalle $(0, 2\pi)$ et désignons par a_n, b_n les coefficients et par $s_n(x)$ les sommes de la série de Fourier de $f(x)$. On aura alors:

$$\left| s_n(x) - \frac{1}{2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(t) \sin n(t-x) \cot \frac{t-x}{2}\, dt \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \cos nx \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \cot \frac{t-x}{2}\, dt - \sin nx \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \cot \frac{t-x}{2}\, dt \right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \cot \frac{t-x}{2}\, dt \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \cot \frac{t-x}{2}\, dt \right|.$$

Puisque $|\sin nt| \leqq 1$ et $|\cos nt| \leqq 1$, on n'a qu'à appliquer les inégalités (11) et (3) pour conclure que

$$\int_0^{2\pi} |s_n(x)|^p\, dx \leqq C M_p^p \int_0^{2\pi} |f(x)|^p\, dx, \tag{30}$$

C étant une constante numérique, c'est-à-dire, indépendante de p. En particulier, on a démontré:

V. *Pour toute fonction $f(x)$ de la classe L^p, l'intégrale de $|s_n(x)|^p$ reste bornée lorsque n tend vers l'infini.*

14. Il est facile de préciser ce théorème en montrant que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - s_n(x)|^p\, dx = 0. \tag{31}$$

Pour démontrer cette relation, observons d'abord qu'on peut approcher $f(x)$ par des fonctions[13]) $h(x)$ dont la série de Fourier converge uniformément, de façon que l'on ait

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - h(x)|^p\, dx < \varepsilon. \tag{32}$$

En désignant alors par $t_n(x)$ les sommes de la série de Fourier de $h(x)$, il suffit d'écrire

$$f - s_n = (f - h) + (h - t_n) + (t_n - s_n).$$

L'intégrale de $|t_n - s_n|^p$ est alors d'après (30) moindre qu'un multiple constant de (32). Cela étant, on n'aura qu'à utiliser encore une fois l'inégalité (3) pour arriver à la relation (31).

15. Le théorème V admet comme corollaire un théorème concernant la formule de Parseval pour le produit de deux fonctions.

---

[13]) Telles fonctions sont d'après H. W. Young (Proc. London Math. Soc. (2) **11** (1911), p. 89 et suiv.) les moyennes arithmétiques de la série de Fourier de $f(x)$. Pour d'autres fonctions, pour lesquelles la démonstration est plus simple, du moins en principe, voir F. Riesz, loc. cit. § 4.

VI. *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions appartenant à des classes complementaires, L^p et L^q. Désignons par a_n, b_n et α_n, β_n leurs constantes de Fourier. Alors on a*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n), \tag{33}$$

la série au second membre étant convergente.

En désignant toujours par $s_n(x)$ les sommes de la série de Fourier de $f(x)$, ce théorème revient à la relation

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} s_n(x)g(x)\,dx. \tag{34}$$

Or on sait que, même pour toute fonction sommable, on a uniformément

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} s_n(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Alors, grâce au théorème V, la relation (33) s'ensuit immédiatement par un théorème connu de M. F. Riesz[14]).

---

[14]) F. Riesz, loc. cit. p. 464 et suiv. Voici ce théorème. Admettons que $g(x)$ appartienne à la classe L^q, que l'on ait

$$\lim\int_a^x f_n(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx$$

et qu'il existe une constante M telle que

$$\int_a^b |f_n(x)|^p\,dx \leqq M.$$

Alors on a

$$\lim\int_a^b f_n(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

La démonstration de M. F. Riesz donne aussi que, f et les f_n étant supposés périodiques, de période $(b-a)$, on aura uniformément

$$\lim\int_a^b f_n(x+t)g(x)\,dx = \int_a^b f(x+t)g(x)\,dx.$$

Cette remarque suffit pour démontrer un fait énoncé dans l'Encykl. d. math. Wissensch. II C 10, p. 1211, cf. note 95.

[Remarque ajoutée pendant la correction des épreuves.] On peut arriver au théorème VI par une voie plus courte. En effet, en appliquant l'inégalité de Hölder-Schwarz et la relation (31), on voit immédiatement que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}(f(x)-s_n(x))\,g(x)\,dx$$

tend vers zéro.

Le théorème VI est connu depuis longtemps pour $p = q = 2$. Dans ce cas, on le déduit immédiatement de la relation plus particulière

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

En effet, il suffit d'écrire cette relation pour $f(x) + g(x)$ et $f(x) - g(x)$ et soustraire l'une des relations de l'autre. Evidemment, dans ce cas, la série figurant au second membre est absolument convergente. Or, c'est le seul cas où il y a nécessairement convergence absolue. Ou plus précisément, pour tout autre couple de classes complémentaires L^p et L^q, on peut donner des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ appartenant à ces classes et telles que la série en (33) ne converge pas absolument. Cette remarque explique pourquoi le cas général est plus difficile que le cas particulier.

Notre remarque résulte immédiatement du fait suivant, facile à vérifier. Le nombre k étant $< \frac{1}{2}$, il existe des fonctions continues $f(x)$, avec les constantes de Fourier a_n et b_n, telles que les séries

$$\sum \frac{|a_n|}{n^k} \quad \text{et} \quad \sum \frac{|b_n|}{n^k}$$

soient divergentes.

En effet, par un résultat très connu de M. Serge Bernstein, pour tout nombre $c < 1/2$, on peut former des fonctions périodiques qui satisfont à une condition de Lipschitz d'ordre c et telles que les séries formées avec les modules de leurs constantes de Fourier A_n et B_n soient divergentes. En choisissant alors $c > k$, les séries de Fourier $\sum n^k A_n \cos nx = \sum a_n \cos nx$ et $\sum n^k B_n \sin nx = \sum b_n \sin nx$ représenteront des fonctions continues avec la propriété désirée. Cela étant, pour achever la vérification de notre remarque, il suffit d'observer que toute fonction continue appartient à toutes les classes L^p, tandis que les fonctions $\sum n^{-k} \cos nx$ et $\sum n^{-k} \sin nx$ appartiennent à toutes les classes L^q telles que $q < \frac{1}{1-k}$. On a évidemment $\frac{1}{1-k} < 2$.

Observons, en finissant ce numéro, que les constantes de Fourier de $\bar{f}(x)$ étant $-b_n$ et a_n, on a encore la formule remarquable, l'intégrale double étant prise au sens de la valeur principale de Cauchy

$$(35) \qquad \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(y)\cot\frac{x-y}{2}\,dx\,dy = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\beta_n - b_n\alpha_n).$$

16. Voici encore quelques indications historiques.

Le théorème V et son complément que nous venons d'établir pour les sommes de la série de Fourier, M. W. H. Young les a donnés, il y a

bien longtemps, pour les moyennes arithmétiques de ces sommes, en démontrant aussi que la série figurant au second membre de (33), sommée par ces moyennes, est égale au premier membre. Mais il y en a plus. M. W. H. Young et M^me^ Grace Chisholm Young ont déjà, en 1912[15]), posé la question de savoir si le théorème V du texte et son complément étaient vrais ou non. Ils ont même démontré[16]), que ce théorème entraînerait la convergence de la série figurant en (33), ce qui, à leur avis, semblait indiquer que la question devrait être résolue par la négative.

Dans le travail important auquel nous venons de faire allusion, M. Young et M^me^ Young rassemblent les différentes démonstrations qu'on a données jusqu'alors pour le théorème de Riesz-Fischer et ils donnent le théorème suivant qui comprend ledit théorème comme cas particulier.

Désignons par $s_n(x)$ les sommes de la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

et par

$$S_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_{n-1}(x)}{n}$$

les moyennes arithmétiques de ces sommes. Pour que cette série soit la série de Fourier d'une fonction de la classe L^p, il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p \, dx$$

reste bornée, lorsque n tend vers l'infini.

M. Young et M^me^ Young observent aussi que la dernière condition sera toujours remplie, si

$$\int_0^{2\pi} |s_n(x)|^p \, dx$$

reste bornée. Cela se voit[17]) p. ex. par l'inégalité facile à vérifier

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p \, dx \leqq \int_0^{2\pi} |s_{n-1}(x)|^p \, dx.$$

C'est-à-dire que la dernière condition est aussi une condition suffisante. Par le théorème V, on voit que cette condition est aussi nécessaire, c'est-à-dire que, dans le théorème ci-dessus, $S_n(x)$ *peut être remplacé par* $s_n(x)$.

---

[15]) W. H. Young et G. C. Young, On the theorem of Riesz-Fischer, Quarterly Journal **44** (1912–13), voir en particulier p. 58.

[16]) Leur démonstration fait appel à un théorème plus difficile que ne fait la nôtre.

[17]) Cette démonstration est un peu différente de celle des auteurs cités.

Pour $p = 2$, on retombe évidemment sur le théorème de Riesz-Fischer. On a en effet

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s_n^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Les problèmes correspondant à l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

17. Soit maintenant $f(x)$ une fonction de la classe L^p par rapport à l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. On démontre facilement le théorème suivant:

VII. *La valeur principale de l'intégrale*

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y}\,dy \tag{36}$$

existe presque partout et l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{f}(x)|^p\,dx \leqq M_p^p \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\,dx; \tag{37}$$

la constante M_p étant identique à celle de l'inégalité (11).

Nous attaquons ce problème par deux méthodes différentes. La première de ces méthodes, qui nous fournira une démonstration complète, se rattache à nos résultats sur l'intervalle fini, tandis que la seconde se rattache à l'étude d'une certaine fonction holomorphe. Cette dernière méthode fournit aussi tout le résultat en question, sauf l'identité des constantes. Elle nous conduira à la réciproque de (36).

18. Soit donc $f(x)$ une fonction de la classe L^p par rapport à l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Posons

$$\bar{f}_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_{-n\pi}^{+n\pi} f(y)\cot\frac{x-y}{2n}\,dy. \tag{38}$$

Il est clair que $\bar{f}(x)$ et $\bar{f}_n(x)$ existent presque partout, et l'on démontre très facilement que

$$\lim_{n\to\infty} \bar{f}_n(x) = \bar{f}(x).$$

Nous ne nous y arrêtons pas.

La formule (38) peut aussi s'écrire

$$\bar{f}_n(nx) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(ny)\cot\frac{x-y}{2}\,dy.$$

En vertu du théorème II, on a maintenant

$$\int_{-n\pi}^{+n\pi} |\bar{f}_n(x)|^p\,dx = n\int_{-\pi}^{+\pi} |\bar{f}_n(nx)|^p\,dx \leqq n\,M_p^p \int_{-\pi}^{+\pi} |f(nx)|^p\,dx$$

$$= M_p^p \int_{-n\pi}^{+n\pi} |f(x)|^p\,dx \leqq M_p^p \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\,dx.$$

Alors m étant un nombre quelconque $\leqq n$, on a, à plus forte raison,

$$\int_{-m\pi}^{+m\pi} |\bar{f}_n(x)|^p\,dx \leqq M_p^p \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\,dx.$$

En gardant m fixe et en faisant tendre n vers l'infini, on voit, par le théorème cité de M. Fatou, que la même inégalité tient si l'on y remplace $\bar{f}_n(x)$ par $\bar{f}(x)$. Enfin, en faisant tendre m vers l'infini, l'inégalité (37) résulte.

19. Il nous reste à démontrer que la constante M_p dans l'inégalité (37) ne pourra être abaissée. Admettons, en effet, que cette inégalité tienne avec une certaine constante N_p, où N_p est la moindre valeur admissible de la constante en question. Nous savons déjà que l'on a $N_p \leqq M_p$. Pour conclure l'égalité des deux constantes, il suffit de montrer que $M_p \leqq N_p$. Cela se fait de la manière suivante.

Entendons par $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions appartenant respectivement aux classes L^p et L^q par rapport à l'intervalle $(0, 2\pi)$. A l'extérieur de cet intervalle on les définit par les relations $f(x+2\pi) = f(x)$ et $g(x+2\pi) = g(x)$.

Démontrons que l'on a

$$(39)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi} \int_{-2n\pi}^{2n\pi} \int_{-2n\pi}^{2n\pi} \frac{f(x)\,g(y)}{x-y}\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,g(y)\cot\frac{x-y}{2}\,dx\,dy.$$

En effet, avant le passage à la limite, le premier membre pourra s'écrire

$$\frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,g(y) \left(\sum_{j=-n}^{n-1} \sum_{k=-n}^{n-1} \frac{1}{x-y+2\pi(j-k)} \right) dx\,dy.$$

Or on a

$$\frac{1}{2n} \sum_{j=-n}^{n-1} \sum_{k=-n}^{n-1} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{2n} \sum_{s=1}^{2n-1} (2n-s) \left(\frac{1}{x-y+2\pi s} + \frac{1}{x-y-2\pi s} \right)$$

$$= \frac{1}{x-y} + \sum_{s=1}^{2n-1} \left(\frac{1}{x-y+2\pi s} + \frac{1}{x-y-2\pi s} \right) - \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{x-y+2\pi} + \frac{1}{x-y-2\pi} \right) + \sigma$$

avec

$$\sigma = \frac{1}{2n} \sum_{s=2}^{2n-1} \frac{2s(x-y)}{4\pi^2 s^2 - (x-y)^2}.$$

Or dans cette formule, on a $|x-y| \leqq 2\pi$. Par conséquent, il est

$$|\sigma| \leqq \frac{1}{2n} \sum_{s=2}^{2n-1} \frac{4s}{4\pi^2(s^2-1)} = O\left(\frac{\log n}{n}\right) \to 0.$$

En outre, puisque les valeurs principales des intégrales doubles qui suivent existent, il vient

$$\frac{1}{2n} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x)\,g(y)}{x-y \pm 2\pi}\, dx\, dy \right| \to 0.$$

Enfin puisqu'on a uniformément pour

$$0 \leqq x \leqq 2\pi \quad \text{et} \quad 0 \leqq y \leqq 2\pi,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x-y} + \sum_{s=1}^{2n-1} \left(\frac{1}{x-y+2\pi s} + \frac{1}{x-y-2\pi s} \right) \right) = \frac{1}{2} \cot \frac{x-y}{2},$$

la relation (39) s'ensuit.

Cela étant, on obtient par la périodicité de $f(x)$ et de $g(x)$

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,g(y) \cot \frac{x-y}{2}\, dx\, dy \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi} \left| \int_{-2n\pi}^{2n\pi} \int_{-2n\pi}^{2n\pi} \frac{f(x)\,g(y)}{x-y}\, dx\, dy \right|$$

$$\leqq \frac{N_p}{2n} \left(\int_{-2n\pi}^{2n\pi} |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-2n\pi}^{2n\pi} |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= N_p \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{2\pi} |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Cela étant vrai pour toute fonction $g(x)$ de la classe L^q, on conclut comme au n° 6, que la fonction $\bar{f}(x)$ définie par la formule (10) satisfait à la relation

$$\int_0^{2\pi} |\bar{f}(x)|^p\, dx \leqq N_p^p \int_0^{2\pi} |f(x)|^p\, dx,$$

c'est-à-dire que l'on a $M_p \leqq N_p$, ce qui achève la démonstration.

20. Nous passons à la seconde démonstration qui se fonde sur la considération de la fonction de la variable complexe z

$$F(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-z}\, dy. \tag{40}$$

Cette expression représente deux fonctions holomorphes respectivement dans les demi-plans supérieur et inférieur, l'axe réel formant, en général, une coupure. Il suffira de considérer le demi-plan supérieur.

On pourra supposer, sans restreindre la généralité, que $f(x)$ ne prend pas de valeurs négatives. Il sera aussi commode de supposer d'abord que la fonction s'évanouit à l'extérieur d'un certain intervalle $(-A, +A)$ et, après, faire tendre A vers l'infini.

Admettons donc d'abord que $f(x)$ soit $\geqq 0$ dans l'intervalle $(-A, +A)$ et nulle ailleurs et que $f(x)$ appartienne dans cet intervalle à la classe L^p. Posons $z = \xi + i\eta$. La partie réelle de $F(z) = U(\xi, \eta) + iV(\xi, \eta)$ s'écrit

$$U(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{(\xi - y)^2 + \eta^2}\, dy. \tag{41}$$

Par conséquent, on a $U(\xi, \eta) > 0$ dans le demi-plan supérieur. Cela étant, $(F(z))^p$ sera holomorphe dans ce demi-plan. Désignons alors par c un nombre positif. On vérifie facilement que l'on a

$$\int_{-\infty + ic}^{+\infty + ic} (F(z))^p\, dz = 0, \tag{42}$$

la ligne d'intégration étant la droite dont on a indiqué les extrémités.

Pour le voir, il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy à une figure située dans le demi-plan supérieur et composée d'une demi-circonférence de centre ic et de rayon très grand, et du segment que cette demi-circonférence découpe de la droite dont on vient de parler. La fonction $f(x)$ s'annulant à l'extérieur de l'intervalle $(-A, +A)$, $F(z)$ sera de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{|z|}$, pour $|z|$ assez grand. En faisant alors tendre le rayon de la demi-circonférence vers l'infini, on obtient la relation (42).

Cela étant, un raisonnement tout à fait analogue à celui qu'on a fait au sujet du théorème I, établit l'existence d'une constante — qui, d'après les résultats des numéros précédents, pourra être désignée par M_p — telle que, pour toute valeur de η, on ait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(\xi, \eta)|^p\, d\xi \leqq M_p^p \int_{-\infty}^{+\infty} |U(\xi, \eta)|^p\, d\xi. \tag{43}$$

Enfin puisqu'on a

$$\frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(\xi - y)^2 + \eta^2} = 1, \tag{44}$$

on tire de (14), où l'on substitue l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ à l'intervalle $(0, 2\pi)$ et de (44) que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U(\xi, \eta)|^p d\xi \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx, \tag{45}$$

et alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(\xi, \eta)|^p d\xi \leqq M_p^p \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx. \tag{46}$$

On démontre, comme M. Fatou et M. Plessner l'ont fait au cas d'un intervalle fini, que la valeur principale de (36) existe presque partout et que $V(x, \eta)$ tend presque partout vers $\bar{f}(x)$ lorsque η tend vers zéro. Enfin l'inégalité (37) résulte aussi par la théorème de M. Fatou cité à la fin du n° 8. Ce même théorème nous permet de nous débarrasser de la restriction posée au sujet de $f(x)$, savoir que $f(x)$ s'annulait à l'extérieur d'un certain intervalle. Dans le cas général, on remplacera $f(x)$ par une autre fonction égale à $f(x)$ pour $-A \leqq x \leqq +A$ et nulle ailleurs. Le théorème étant démontré pour la fonction modifiée, il suffira de faire tendre A vers l'infini et d'appliquer encore une fois le théorème de M. Fatou. Par le même théorème, on voit que les inégalités (45) et (46) tiennent aussi dans le cas général.

Remarquons encore que la relation (42) subsiste également après la suppression de ladite restriction. Pour le voir, il suffit d'écrire $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, où $f_1(x) = 0$, à l'extérieur de l'intervalle $(-A, +A)$ et $f_2(x) = 0$, à son intérieur, A étant assez grand pour que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(x)|^p dx$$

soit très petite. A ces fonctions, il correspondra deux fonctions holomorphes $F_1(z)$ et $F_2(z)$, et l'on aura $F(z) = F_1(z) + F_2(z)$. Alors la relation (42) tient pour $F_1(z)$. D'autre part, en vertu de (45), de (46) et de (3), l'intégrale de $|F_2(z)|^p$, prise le long de la droite $(-\infty + ic, +\infty + ic)$, sera aussi très petite, et alors il suffira d'appliquer encore une fois l'inégalité (3) pour conclure la relation (42).

Dans tout ce qui suit, on pourra toujours, si cela est plus commode, faire les démonstrations d'abord dans le cas particulier et passer, par le dernier artifice, au cas général. Nous ne nous arrêtons plus sur les difficultés de ce caractère-ci.

Pour arriver à la réciproque de la formule (36), observons qu'on pourra exprimer $F(z)$ aussi par la formule de Cauchy, où l'on désigne

par $F(x)$ la fonction-limite $f(x)+i\bar{f}(x)$ vers laquelle $F(z)$ tend presque partout lorsque $z=x+i\eta$ tend vers x. On a

$$F(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(y)}{y-z}\,dy=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)+i\bar{f}(y)}{y-z}\,dy. \tag{47}$$

On le voit, en démontrant la formule d'abord au cas où l'intégrale est prise le long d'une droite $(-\infty+ic,\ +\infty+ic)$, c désignant un nombre positif assez petit. Après, on fait tendre c vers zéro.

Dès lors, la comparaison de (40) et de (47) donne

$$F(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\bar{f}(y)}{y-z}\,dy. \tag{48}$$

Par cela, la réciprocité entre $f(x)$ et $\bar{f}(x)$ est établie et on peut écrire la réciproque de la formule (36)

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\bar{f}(y)}{y-x}\,dy. \tag{49}$$

Évidemment, cette formule peut aussi se déduire, par un passage à la limite, de la formule (19).

21. Nous établirons maintenant l'inégalité[18]) suivante dont nous donnerons quelques applications assez remarquables dans un autre travail. On a

$$\int_D |F(z)|^p\,|dz| \leqq (1+M_p)^p\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^p\,dx, \tag{50}$$

où le chemin d'intégration D désigne une droite arbitraire du plan de la variable complexe z. Cet énoncé s'ensuit d'une combinaison facile des inégalités (37) et (3) et de l'inégalité

$$\int_D |F(z)|^p\,|dz| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)+i\bar{f}(x)|^p\,dx. \tag{51}$$

Cette dernière relation, on peut la ramener au théorème suivant de MM. L. Fejér et F. Riesz[19]).

Si $F(z)$ est une fonction holomorphe pour $|z|<R$ et

$$\int_{|z|=r}|f(z)|^p\,|dz| \leqq M \qquad (p\geqq 0),$$

[18]) La constante figurant dans cette inégalité peut être abaissée par des évaluations plus précises que celles du texte.

[19]) L. Fejér und F. Riesz, Über einige funktionentheoretische Ungleichungen, Math. Zeitschr. 11 (1921), p. 305–314.

pour tout $r < R$, alors $|\bar{f}(z)|^p$ est sommable le long d'un diamètre quelconque de la circonférence de rayon R et son intégrale est $\leqq \frac{M}{2}$.

Indiquons maintenant la démonstration de (51). Soit d'abord D' une demi-droite issue d'un point de l'axe réel et perpendiculaire à cet axe. Par une substitution linéaire, on transforme le demi-plan supérieur dans un cercle. On pourra choisir cette substitution de façon que la demi-droite donnée devienne un diamètre du cercle. Alors une adaption facile du théorème cité montre que le double de l'intégrale de $|F|^p$ prise le long d'une telle demi-droite est inférieur au second membre de (51). Dès lors, par des représentations conformes répétées, on obtient l'inégalité (51) pour toute droite qui forme avec l'axe réel un angle de la forme $\frac{m\pi}{2^n}$, m et n étant entiers, et alors, par un passage à la limite, pour une droite quelconque.

On peut facilement préciser l'inégalité (51), en démontrant que, dans tout faisceau de demi-droites issues d'un point de l'axe réel et situées dans l'un ou l'autre des demi-plans supérieur ou inférieur, le logarithme de l'intégrale de $|F|^p$, suivant ces demi-droites est une fonction convexe de l'angle que ces demi-droites forment avec l'axe réel positif.

22. Voici maintenant l'analogue du théorème IV.

IV′. *Pour deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ appartenant à des classes complémentaires L^p et L^q, on a*

$$(52)\quad \Big|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)\,g(y)}{x-y}\,dx\,dy\Big| \leqq M_p\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}};$$

l'intégrale double existant toujours si on la prend au sens de la valeur principale de Cauchy, c'est-à-dire comme limite de l'intégrale étendue aux valeurs $|x-y|>\varepsilon>0$.

La démonstration est toute pareille à celle qu'on a donnée pour le théorème IV. On forme ici la fonction

$$(53)\qquad \bar{f}_\varepsilon(x)=\frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\Big)\frac{f(y)}{x-y}\,dy,$$

et l'on démontre que

$$(54)\qquad \bar{f}_\varepsilon(x)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(x+y)\log\Big|\frac{y+\varepsilon}{y-\varepsilon}\Big|\,\frac{dy}{y}.$$

La fonction

$$(55)\qquad \frac{1}{\pi y}\log\Big|\frac{y+\varepsilon}{y-\varepsilon}\Big|$$

est la partie imaginaire, sur l'axe réel, de la fonction, holomorphe dans le demi-plan supérieur,

$$G(z) = \frac{i}{\pi z} \log \frac{\varepsilon + z}{\varepsilon - z},$$

le dernier logarithme étant déterminé par la condition de s'annuler à l'origine. La partie réelle de $G(z)$ sur l'axe réel est $-\frac{1}{y}$ pour $|y| > \varepsilon$ et zéro pour $|y| < \varepsilon$.

En faisant tendre z vers l'infini le long de l'axe imaginaire, le module de $zG(z)$ tend vers 1, ce qui donne immédiatement (voir la formule (48))

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \log \left| \frac{y+\varepsilon}{y-\varepsilon} \right| \frac{dy}{y} = 1. \tag{56}$$

En observant encore que la fonction (55) ne change pas de signe, et en appliquant — *mutatis mutandis* — l'inégalité (14), on voit que l'intégrale de $|\bar{f}_\varepsilon(x)|^p$ est inférieure à celle de $|\bar{f}(x)|^p$. Dès lors, la démonstration s'achève comme plus haut. Remarquons encore que l'inégalité (52) subsiste, si, dans l'intégrale double, on n'étend l'intégration qu'aux valeurs $|x - y| > \varepsilon$.

23. Le dernier résultat conduit immédiatement à un théorème analogue concernant certaines formes bilinéaires. Nous nous contentons, ici, de l'indiquer en quelques mots, ayant l'intention d'y revenir à une autre occasion.

Posons $f(x) = x_k$, $y(x) = g_k$ pour $k < x \leqq k+1$ (pour tout nombre entier k) les valeurs x_k, y_k étant telles que l'on ait

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^p \leqq 1, \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |y_k|^q \leqq 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{57}$$

L'intégrale double étendue aux valeurs $|x - y| > 1$ deviendra une forme bilinéaire

$$\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} a_{jk} x_j y_k.$$

Or on a $a_{jj} = 0$, et une évaluation toute simple montre que l'on a, pour $j \neq k$,

$$\left| a_{jk} - \frac{1}{j-k} \right| < \frac{C}{(j-k)^2}. \tag{58}$$

C étant une constante. On en tire que les formes bilinéaires

$$\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \frac{x_j y_k}{j-k} \qquad (j \neq k), \tag{59}$$

et

$$\frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \frac{x_j y_k}{\alpha + j - k} \tag{60}$$

sont bornées sous les conditions (57).

Il en résulte, par un théorème connu de M. Landau, que, en définissant les substitutions H et K_α par les formules respectives

$$x_j' = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{x_k}{j-k} \qquad (j \neq k), \tag{61}$$

et

$$x_j' = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{x_k}{\alpha + j - k}, \tag{62}$$

les séries $\sum |x_j'|^p$ sont convergentes.

24. J'ajoute quelques remarques sur les dernières substitutions, en réservant les détails pour un petit travail que je suis en train de rédiger. Nous n'envisageons que le cas $p = 2$, c'est-à-dire que nous supposons que la série $\sum x_k^2$ est convergente.

Remarquons d'abord que la substitution K_α devient, pour des valeurs entières de α,

$$x_j' = (-1)^\alpha x_{j+\alpha}. \tag{63}$$

Les substitutions K_α forment un *groupe* et l'on a $K_\alpha K_\beta = K_{\alpha+\beta}$. Par conséquent $K_{-\alpha}$ est la *réciproque* de K_α. En outre les substitutions K_α sont *orthogonales*.

Tout cela se vérifie facilement par un calcul direct. Mais il est plus intéressant de rattacher ces remarques à la théorie des formes de M. Toeplitz.

Posons, en effet,

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(t)\, e^{-jit}\, dt \tag{64}$$

et

$$x_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)\, e^{-jit}\, dt,$$

$a(t)$ et $x(t)$ étant des fonctions à carré sommable. Il vient par le théorème de Parseval

$$x_j' = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{j-k} x_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(t)\, x(t)\, e^{-jit}\, dt. \tag{65}$$

Puisque, encore par le théorème de Parseval, on a

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |x_j|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt$$

et, en admettant que la fonction $a(t)$ soit bornée,

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |x'_j|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x(t)a(t)|^2 dt,$$

on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que (65) donne une substitution orthogonale, c'est que l'on ait presque partout $|a(t)| = 1$.

D'autre part on sait que, $b(t)$ étant une seconde fonction bornée, la substitution obtenue par la composition des substitutions a_{j-k} et b_{j-k} correspondra au produit $a(t)b(t)$. Cela étant, on voit que si $a(t)$ dépend d'un paramètre α, c'est-à-dire que $a(t) = a_\alpha(t)$, alors, pour que (65) donne un groupe avec la propriété $K_\alpha K_\beta = K_{\alpha+\beta}$, il faut et il suffit que $a_\alpha(t)$ soit de la forme $a_\alpha(t) = e^{\alpha\varphi(t)}$.

La substitution (62) correspond à $a_\alpha(t) = e^{i\alpha(\pi-t)}$. La substitution H correspond, de son côté, à la fonction

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{e^{i\alpha(\pi-t)}-1}{\alpha} = i(\pi - t).$$

On retrouve ainsi pour cette dernière substitution, qui, évidemment, n'est pas orthogonale, la borne π.

En posant $a_\alpha(t) = e^{i\alpha\sin t}$ on arrive à des substitutions, dont les coefficients sont des fonctions de Bessel.

Nous finissons ce numéro en donnant un résultat analogue pour un nombre fini des variables.

Les substitutions

$$x'_j = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{\sin(\alpha+j-k)\frac{\pi}{n}} \qquad (j = 0, \ldots, n-1) \tag{66}$$

sont aussi *orthogonales*, elles forment également un *groupe* et satisfont a la relation $K_\alpha K_\beta = K_{\alpha+\beta}$.

Si l'on pose encore $s = bn + k$, avec $k = 0, 1, \ldots, n-1$, et l'on définit x_s par $x_s = (-1)^b x_k$, on voit qu'à toute valeur entière de α, il correspond la substitution

$$x'_k = (-1)^\alpha x_{k+\alpha}.$$

On obtient des généralisations intéressantes en considérant, dans un ordre d'idées général, les substitutions de la forme

$$x_j' = \sum_{k=0}^{n-1}{}' a_{j-k}\, x_k .$$

25. On traduit facilement nos résultats au sujet de la série de Fourier en des résultats concernant l'intégrale de Fourier.

Nous nous contentons d'écrire la formule, valable pour tout couple de fonctions $f(x)$ et $g(x)$ appartenant respectivement aux classes L^p et L^q,

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(y)\, \frac{\sin \omega (x-y)}{x-y}\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x)\, dx .$$

Stockholm, le 30 mai 1924.

(Eingegangen am 23. Juli 1926.)

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

Dritte Abhandlung[1]).

Von

Arnold Walfisz in Wiesbaden.

Es sei $x > 0$, $k \geqq 2$ ganz;

$$Q = \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} n_\mu n_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$$

eine positiv definite quadratische Form mit beliebigen reellen Koeffizienten und der Determinante D. $\sum_{0 \leqq Q \leqq x} 1$ stellt dann die Anzahl aller Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid $Q \leqq x$ dar. Dieser Ausdruck wird durch das Ellipsoidvolumen

$$\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} x^{\frac{k}{2}}$$

approximiert. Ich setze zur Abkürzung

$$(1) \qquad P(x) = P_Q(x) = \sum_{0 \leqq Q \leqq x} 1 - \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} x^{\frac{k}{2}}.$$

Im folgenden soll stets $k \geqq 4$ angenommen und, wenn nötig, noch weiter eingeschränkt werden.

---

[1]) Die beiden ersten gleichnamigen Abhandlungen sind in dieser Zeitschrift **19** (1924), S. 300–307 und **26** (1927), S. 106–124 erschienen. Ich zitiere sie kurz mit I und II. Für die vorliegende Arbeit ist nur die Kenntnis von I erforderlich.

Für $P(x)$ sind nach Landau die Abschätzungen

$$P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-\frac{k}{k+1}}\right) \quad (2)$$ [2]

und

$$P(x) = \frac{\Omega_R}{\Omega_L}\left(x^{\frac{k-1}{4}}\right) \quad (3)$$ [3]

bekannt.

Besitzt die Form Q insbesondere rationale Koeffizienten, so gilt nach Landau für $k = 4$ [4]

$$P(x) = O(x \log^2 x) \quad (4)$$

und für $k \geqq 5$ [5]

$$P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right). \quad (5)$$

Ebenfalls für rationale Formen hat man folgende Abschätzungen nach unten: durch V. Jarník [6]

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \quad (6)$$

und durch Ch. H. Müntz [7], darüber hinaus,

$$P(x) = \frac{\Omega_R}{\Omega_L}\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right). \quad (7)$$

Ein Vergleich von (5) mit (6) oder mit (7) zeigt, daß alle drei Abschätzungen definitiv sind, während für $k = 4$ zwischen (4) und (6) oder (7) nur noch eine „kleine" Spanne besteht. Bei einer rationalen Form Q ist also die Abschätzung von $P(x)$, insofern es sich wenigstens um die

---

[2]) E. Landau, „Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid)", Berliner Akademieberichte 1915, S. 458–476. Vgl. hierzu noch die in I, Anmerkung [1]) angegebene Literatur.

[3]) E. Landau, „Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen. Vierte Abhandlung", Göttinger Nachrichten 1924, S. 137–150.

[4]) E. Landau, „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", Mathematische Zeitschrift **21** (1924), S. 126–132.

[5]) E. Landau, loc. cit. [4]). Den Fall $k \geqq 8$ hatte ich vorher in I behandelt.

[6]) Bei E. Landau, „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Zweite Abhandlung", Mathematische Zeitschrift **24** (1925), S. 299–310.

[7]) Ch. H. Müntz, „Über den Gebrauch willkürlicher Funktionen in der analytischen Zahlentheorie. I. Das Ellipsoidgitter in n Dimensionen", Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft **24**, 2 (1925), S. 81–93 (Vorbericht) und „Zur Gittertheorie n-dimensionaler Ellipsoide", Mathematische Zeitschrift **25** (1926), S. 150 bis 165. Vgl. auch II, Satz 1.

Größenordnung in x handelt, für $k \geqq 5$ vollständig, für $k = 4$ „fast" vollständig erledigt.

Ganz anders sieht es aber, wie ein Blick auf (2) und (3) zeigt, aus, sobald man in Q beliebige reelle Koeffizienten zuläßt. Dieses Problem ist zweifellos weit schwieriger — ja, es scheint sogar, daß die gegenwärtige Analysis nicht zu seiner vollen Bewältigung ausreicht. Ich möchte daher hier nur fragen: *Gelten für jede positiv definite Form Q, wenigstens sobald k genügend groß ist, die Abschätzungen* (5) *und* (6)? *Oder ist vielmehr die Größenordnung des Gitterrestes* $\mathsf{P}(x)$ *vom arithmetischen Charakter der Koeffizienten in Q abhängig*? Wir werden sehen, daß die erste Frage zu verneinen, die zweite zu bejahen ist. Allerdings muß ich mich im folgenden mit der rechnerisch einfachsten irrationalen Form Q begnügen. Diese Spezialisierung wird aber immerhin für meinen Zweck ausreichen und eine gewisse Einsicht in den ganzen Fragenkomplex gewähren.

Ich setze, von jetzt ab dauernd,

$$\begin{aligned} Q &= Q(n, n_1, \ldots, n_{k-1}) \\ &= \alpha n^2 + \sum_{\mu,\nu=1}^{k-1} a_{\mu\nu} n_\mu n_\nu = \alpha n^2 + Q_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Hierin sind $\alpha > 0$ irrational und Q_1 eine positiv definite Form mit ganzzahligen Koeffizienten in $k-1$ Variablen (es würde übrigens nicht viel mehr Mühe machen, die Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ in (8) als nur rational vorauszusetzen). Auf die Formen Q, Q_1, der Determinanten D, D_1, sind dann, im Sinne von (1), die beiden Restfunktionen $\mathsf{P}(x)$ und $\mathsf{P}_1(x)$ bezogen.

Im folgenden treten drei Arten von positiven Konstanten auf: die C sind nur von Q, die c nur von α abhängig; die K absolute Konstanten. Ich könnte nur mit C-Konstanten auskommen; die gewählte Anordnung empfiehlt sich aber deshalb, weil in ausgedehnten Überlegungen die Form Q überhaupt nicht auftritt. Alle O, o und Ω-Glieder, von den beiden Symbolen in (81) abgesehen, sind implizit nur von Q abhängig. Für reelle u setze ich

$$R(u) = u - [u];$$

und schließlich bedeute $e(u)$ die übliche Abkürzung

$$e(u) = e^{2\pi i u}.$$

Ich beginne mit folgendem

Satz 1. *Für $k \geqq 10$ und jedes irrationale $\alpha > 0$ ist*

$$\mathsf{P}(x) = o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right). \tag{9}$$

Dem Beweise schicke ich einen Hilfssatz voraus, der nachher auch als Ausgangspunkt für Satz 3 dienen soll.

Hilfssatz 1. *Für* $x \geqq 1$ *wird*

$$(10)\quad |\mathsf{P}(x)| \leqq C_1 \Bigg\{ \int_0^{\frac{x}{\alpha}} (x-\alpha u)^{\frac{k-5}{2}} \Big| \sum_{0 \leqq n \leqq \sqrt{u}} \Big(R(x-\alpha n^2) - \frac{1}{2} \Big) \Big| \, du$$

$$+ \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^2} \int_0^{\frac{x}{\alpha}} (x-\alpha u)^{\frac{k-5}{2}} \operatorname*{Max}_{0 \leqq s < q} \Big| \sum_{0 \leqq n \leqq \sqrt{u}} \psi_q \Big(\frac{x-s}{q} - \alpha \frac{n^2}{q} \Big) \Big| \, du + x^{\frac{k}{2} - \frac{5}{4}} \Bigg\}.$$

Hierbei sind die ψ_q*-Funktionen durch*

$$(11)\quad \psi_q(u) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{q} & \text{für} \quad R(u) < \frac{1}{q} \\ -\frac{1}{q} & \text{für} \quad \frac{1}{q} \leqq R(u) < 1 \end{cases}$$

definiert.

Beweis. Ich nehme von vornherein $k \geqq 10$ an. Aus (8) und (1), auf Q_1 angewendet, folgt ($\mathsf{P}_1(0)$ bedeute gegebenenfalls Eins)

$$\sum_{0 \leqq Q \leqq x} 1 = \sum_{0 \leqq \alpha n^2 + Q_1 \leqq x} 1 = \sum_{0 \leqq \alpha n^2 \leqq x} \sum_{0 \leqq Q_1 \leqq x - \alpha n^2} 1$$

$$= \sum_{0 \leqq \alpha n^2 \leqq x} \Bigg(\frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{D_1}\, \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} (x-\alpha n^2)^{\frac{k-1}{2}} + \mathsf{P}_1(x-\alpha n^2) \Bigg)$$

$$(12)\quad = \frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{D_1}\, \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \sum_{0 \leqq |n| \leqq \sqrt{\frac{x}{\alpha}}} (x-\alpha n^2)^{\frac{k-1}{2}} + \sum_{0 \leqq |n| \leqq \sqrt{\frac{x}{\alpha}}} \mathsf{P}_1(x-\alpha n^2).$$

Nun ist, wie man etwa mit der Eulerschen Summenformel[8]) feststellt,

$$\sum_{0 \leqq |n| \leqq \sqrt{\frac{x}{\alpha}}} (x-\alpha n^2)^{\frac{k-1}{2}} = \int_{-\sqrt{\frac{x}{\alpha}}}^{\sqrt{\frac{x}{\alpha}}} (x-\alpha u^2)^{\frac{k-1}{2}} \, du + O\left(x^{\frac{k-3}{2}}\right)$$

$$(13)\quad = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} x^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k-3}{2}}\right).$$

---

[8]) Vgl. z. B. E. Lindelöf, „Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions" [Paris, Gauthier-Villars 1905], S. 80–81.

Wegen $D = \alpha D_1$ folgt aus (12), (13) und (1)

$$\mathsf{P}(x) = \sum_{0 \leqq |n| \leqq \sqrt{\frac{x}{\alpha}}} \mathsf{P}_1(x - \alpha n^2) + O\left(x^{\frac{k-3}{2}}\right). \tag{14}$$

Da nach (5)

$$\mathsf{P}_1(x) = O\left(x^{\frac{k-3}{2}}\right) \tag{15}$$

ist, so kann ich in (14)

$$\sum_{0 \leqq |n| \leqq \sqrt{\frac{x}{\alpha}}} \quad \text{durch} \quad 2 \sum_{0 \leqq n \leqq \sqrt{\frac{x}{\alpha}}}$$

ersetzen und erhalte dann

$$\mathsf{P}(x) = 2 \sum_{0 \leqq n \leqq \sqrt{\frac{x}{\alpha}}} \mathsf{P}_1(x - \alpha n^2) + O\left(x^{\frac{k-3}{2}}\right). \tag{16}$$

Ich greife jetzt auf die Formeln (14), (15), (16) und (23a) von I zurück Wendet man I, (14), (15) und (16) auf die Form Q_1 an und setzt die dortigen Parameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ gleich Null, das dortige H gleich Eins, so folgt für ganzes $n > 0$, $n \to \infty$

$$\sum_{Q_1 = n} 1 = \frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{D_1}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^{k-1}}\, n^{\frac{k-3}{2}}\, e\left(-\frac{p}{q} n\right) + O\left(n^{\frac{k-1}{4}}\right). \tag{17}$$

Hierbei durchläuft p nur die zu q primen Werte, so daß $p = 0$ lediglich zu $q = 1$ gehört, während

$$S_{p,q,(0)} = \sum_{n_1, \ldots, n_{k-1} = 0}^{q-1} e\left(\frac{p}{q} Q_1(n_1, \ldots, n_{k-1})\right) \tag{18}$$

ist. Die Reihe (17) konvergiert wegen

$$S_{p,q,(0)} = O\left(q^{\frac{k-1}{2}}\right) \tag{19}$$

(I, (23a)) absolut.

Beachtet man, daß nach (18)

$$S_{0,1,(0)} = 1$$

wird, so folgt aus (17) für $u > 0$, $u \to \infty$

$$\sum_{0\leqq Q_1\leqq u} 1 = \frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{D_1}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^{k-1}} \sum_{0\leqq n\leqq u} n^{\frac{k-3}{2}} e\left(-\frac{p}{q}n\right) + O\left(u^{\frac{k+3}{4}}\right)$$

$$= \frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{D_1}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sum_{0\leqq n\leqq u} n^{\frac{k-3}{2}} \tag{20}$$

$$+ \frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{D_1}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^{k-1}} \sum_{0\leqq n\leqq u} n^{\frac{k-3}{2}} e\left(-\frac{p}{q}n\right) + O\left(u^{\frac{k+3}{4}}\right).$$

Für nicht ganzes $u > 0$ liefert die Eulersche Summenformel

$$\sum_{0\leqq n\leqq u} n^{\frac{k-3}{2}} = \frac{u^{\frac{k-1}{2}}}{\frac{k-1}{2}} - u^{\frac{k-3}{2}}\left(R(u) - \frac{1}{2}\right) + O\left(u^{\frac{k-5}{2}}\right) \tag{21}$$

und, bei festem ϱ auf $0 < \varrho < 1$, eine Fourierentwicklung

$$\sum_{0\leqq n\leqq u} n^{\frac{k-3}{2}} e(-\varrho n) = \lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{M} \int_0^u v^{\frac{k-3}{2}} e(-(\varrho+m)v)\,dv. \tag{22}$$

In (22) ist

$$\int_0^u = -\frac{1}{2\pi i(\varrho+m)} u^{\frac{k-3}{2}} e(-(\varrho+m)u)$$

$$+ \frac{\frac{k-3}{2}}{2\pi i(\varrho+m)} \int_0^u v^{\frac{k-5}{2}} e(-(\varrho+m)v)\,dv$$

$$= -\frac{1}{2\pi i(\varrho+m)} u^{\frac{k-3}{2}} e(-(\varrho+m)u) + O\left(\frac{u^{\frac{k-5}{2}}}{(\varrho+m)^2}\right). \tag{23}$$

Setzt man (23) in (22) ein, so ergibt sich

$$\sum_{0\leqq n\leqq u} n^{\frac{k-3}{2}} e(-\varrho n) = -u^{\frac{k-3}{2}} \lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{M} \frac{e(-(\varrho+m)u)}{2\pi i(\varrho+m)} \tag{24}$$

$$+ O\left(u^{\frac{k-5}{2}}\right)\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{(1-\varrho)^2}\right).$$

Nun ist bekanntlich[9])

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{M} \frac{e(-(\varrho+m)u)}{2\pi i(\varrho+m)} = \frac{1}{2i} \operatorname{cosec} \pi\varrho\, e\left(-\varrho\left([u]+\frac{1}{2}\right)\right). \tag{25}$$

[9]) Vgl. z. B. E. Lindelöf, loc. cit. [8]), S. 55; oder auch K. Knopp, „Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen" [Berlin, Julius Springer 1922], S. 363—364.

Aus (24) und (25) folgt mit $\varrho = \frac{p}{q}$, $q \geqq 2$, $1 \leqq p < q$,

$$(26) \qquad \sum_{0 \leqq n \leqq u} n^{\frac{k-3}{2}} e\left(-\frac{p}{q} n\right) = \frac{i}{2} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q} u^{\frac{k-3}{2}} e\left(-\frac{p}{q}\left([u] + \frac{1}{2}\right)\right) + O\left(u^{\frac{k-5}{2}}\right) q^2 \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(q-p)^2}\right).$$

Nunmehr setze ich (21), (26) in (20) ein und beachte die Definition von $\mathsf{P}_1(u)$ sowie die Abschätzung (19). Dann kommt für nicht ganzes $u > 0$, $u \to \infty$

$$(27) \qquad \mathsf{P}_1(u) = -\frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{D_1}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} u^{\frac{k-3}{2}} \left(R(u) - \frac{1}{2}\right) + \frac{i\pi^{\frac{k-1}{2}}}{2\sqrt{D_1}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^{k-1}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q} u^{\frac{k-3}{2}} e\left(-\frac{p}{q}\left([u] + \frac{1}{2}\right)\right) + O\left(u^{\frac{k-5}{2}}\right) + O\left(u^{\frac{k+3}{4}}\right). \quad [10]$$

Wegen der Irrationalität von α kann es auf der Strecke $0 \leqq n \leqq \sqrt{\frac{x}{\alpha}}$ höchstens ein n geben, ich nenne es gegebenenfalls n_0, für welches $x - \alpha n^2$ ganz wird. Hat dann ε den Wert Eins oder Null, je nachdem n_0 vorhanden ist oder nicht, so folgt aus (27)

$$\sum_{0 \leqq n \leqq \sqrt{\frac{x}{\alpha}}}{}' \mathsf{P}_1(x - \alpha n^2) = -\frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{D_1}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sum_{0 \leqq n \leqq \sqrt{\frac{x}{\alpha}}} (x - \alpha n^2)^{\frac{k-3}{2}} \left(R(x - \alpha n^2) - \frac{1}{2}\right)$$

$$+ \frac{i\pi^{\frac{k-1}{2}}}{2\sqrt{D_1}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^{k-1}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q} \sum_{0 \leqq n \leqq \sqrt{\frac{x}{\alpha}}} (x - \alpha n^2)^{\frac{k-3}{2}} e\left(-\frac{p}{q}\left([x - \alpha n^2] + \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$+ \varepsilon \mathsf{P}_1(x - \alpha n_0^2) + \frac{\varepsilon \pi^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{D_1}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} (x - \alpha n_0^2)^{\frac{k-3}{2}} \left(R(x - \alpha n_0^2) - \frac{1}{2}\right)$$

$$- \frac{\varepsilon i\pi^{\frac{k-1}{2}}}{2\sqrt{D_1}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^{k-1}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q} (x - \alpha n_0^2)^{\frac{k-3}{2}} e\left(-\frac{p}{q}\left([x - \alpha n_0^2] + \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$+ O\left(x^{\frac{k-4}{2}}\right) + O\left(x^{\frac{k+5}{4}}\right).$$

[10]) Für $u \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$ steht diese Formel, mit dem Restglied $o\left(u^{\frac{k-3}{2}}\right)$, in II als (42). Übrigens ist das zweite Glied rechts in (27) reell. Denn erstens sind $S_{1,2,(0)}$

(Fortsetzung der Fußnote 10 auf nächster Seite).

Wegen $k \geqq 10$, (15) und (19) liefern das dritte, vierte, fünfte, sechste und siebente Glied rechts in (28)

$$O\left(x^{\frac{k-3}{2}}\right)+O\left(x^{\frac{k-3}{2}}\right)+O\left(x^{\frac{k-3}{2}}\right)+O\left(x^{\frac{k-4}{2}}\right)+O\left(x^{\frac{k+5}{4}}\right)=O\left(x^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}}\right).$$

Aus (16) und (28) folgt daher

$$(29)\qquad \mathsf{P}(x)=-\frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{D_1}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\sum_{0\leqq n\leqq\sqrt{\frac{x}{\alpha}}}(x-\alpha n^2)^{\frac{k-3}{2}}\left(R(x-\alpha n^2)-\frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{i\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{D_1}\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\sum_{q=2}^{\infty}{\sum_{p=1}^{q-1}}'\frac{S_{p,q,(0)}}{q^{k-1}}\operatorname{cosec}\frac{\pi p}{q}\sum_{0\leqq n\leqq\sqrt{\frac{x}{\alpha}}}(x-\alpha n^2)^{\frac{k-3}{2}}e\left(-\frac{p}{q}\left([x-\alpha n^2]+\right.\right.$$

$$+O\left(x^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}}\right).$$

Wegen (19) ist

$$\frac{S_{p,q,(0)}}{q^{k-1}}{\sum_{p=1}^{q-1}}'\operatorname{cosec}\frac{\pi p}{q}=O\left(\frac{1}{q^{\frac{k-1}{2}}}\right)\sum_{1\leqq p\leqq\frac{q}{2}}\frac{q}{p}$$

$$=O\left(\frac{1}{q^{\frac{k}{2}-2}}\right)=O\left(\frac{1}{q^3}\right).$$

Daher ergibt sich für $x \geqq 1$

$$(30)\quad |\mathsf{P}(x)|\leqq C_2\left\{\left|\sum_{0\leqq n\leqq\sqrt{\frac{x}{\alpha}}}(x-\alpha n^2)^{\frac{k-3}{2}}\left(R(x-\alpha n^2)-\frac{1}{2}\right)\right|\right.$$

$$\left.+\sum_{q=2}^{\infty}\frac{1}{q^3}\operatorname*{Max}_{\substack{1\leqq p<q\\(p,q)=1}}\left|\sum_{0\leqq n\leqq\sqrt{\frac{x}{\alpha}}}(x-\alpha n^2)^{\frac{k-3}{2}}e\left(\frac{p}{q}[x-\alpha n^2]\right)\right|+x^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}}\right\}.$$

Führe ich jetzt in (30) Integrale nach dem Schema

$$\int_0^{\frac{x}{\alpha}}(x-\alpha u)^{\frac{k-5}{2}}\sum_{0\leqq n\leqq\sqrt{u}}g_n\,du=\sum_{0\leqq n\leqq\sqrt{\frac{x}{\alpha}}}g_n\int_{n^2}^{\frac{x}{\alpha}}(x-\alpha u)^{\frac{k-5}{2}}\,du$$

$$=\frac{2}{\alpha(k-3)}\sum_{0\leqq n\leqq\sqrt{\frac{x}{\alpha}}}g_n(x-\alpha n^2)^{\frac{k-3}{2}}$$

---

und $i\,e\left(-\frac{1}{2}([u]+\frac{1}{2})\right)$ reell; zweitens entpricht aber für $q \geqq 3$ jedem p ein $p'=q-p\neq p$, und es wird dann, wenn der Querstrich einen Übergang zu konjugiert komplexen Größen bezeichnet,

$$i\,S_{p',q,(0)}\,e\left(-\frac{p'}{q}\left([u]+\frac{1}{2}\right)\right)\operatorname{cosec}\frac{\pi p'}{q}=\overline{\left\{i\,S_{p,q,(0)}\,e\left(-\frac{p}{q}\left([u]+\frac{1}{2}\right)\right)\operatorname{cosec}\frac{\pi p}{q}\right\}}.$$

ein, so folgt

$$(31)\quad |\mathsf{P}(x)| \leqq C_1 \Bigg\{ \int_0^{\frac{x}{a}} (x-\alpha u)^{\frac{k-5}{2}} \Big| \sum_{0\leqq n\leqq \sqrt{u}} \Big(R(x-\alpha n^2) - \frac{1}{2}\Big)\Big| du$$

$$+ \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^3} \int_0^{\frac{x}{a}} (x-\alpha u)^{\frac{k-5}{2}} \operatorname*{Max}_{\substack{1\leqq p<q \\ (p,q)=1}} \Big| \sum_{0\leqq n\leqq \sqrt{u}} e\Big(\frac{p}{q}[x-\alpha n^2]\Big)\Big| du + x^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}} \Bigg\}.$$

Die Funktion $e\left(\frac{p}{q}[v]\right)$ hat in v die Periode q. Für jedes ganze s sind ferner die Bedingungen

$$[v] \equiv s \pmod q \quad \text{und} \quad R\Big(\frac{v-s}{q}\Big) < \frac{1}{q},$$

wie eine einfache Überlegung zeigt, gleichwertig. Mithin ist, wenn man die Definition (11) von ψ_q hinzuzieht,

$$\sum_{0\leqq n\leqq \sqrt{u}} e\Big(\frac{p}{q}[x-\alpha n^2]\Big) = \sum_{s=0}^{q-1} e\Big(\frac{p}{q}s\Big) \sum_{\substack{0\leqq n\leqq \sqrt{u} \\ [x-\alpha n^2]\equiv s \pmod q}} 1$$

$$= \sum_{s=0}^{q-1} e\Big(\frac{p}{q}s\Big) \sum_{\substack{0\leqq n\leqq \sqrt{u} \\ R\left(\frac{x-s}{q}-\alpha\frac{n^2}{q}\right)<\frac{1}{q}}} 1$$

$$(32)\qquad = \sum_{s=0}^{q-1} e\Big(\frac{p}{q}s\Big) \cdot \sum_{0\leqq n\leqq \sqrt{u}} \frac{1}{q} + \sum_{s=0}^{q-1} e\Big(\frac{p}{q}s\Big) \sum_{0\leqq n\leqq \sqrt{u}} \psi_q\Big(\frac{x-s}{q} - \alpha\frac{n^2}{q}\Big).$$

Hierin ist wegen $q \geqq 2$, $(p,q)=1$

$$(33)\qquad \sum_{s=0}^{q-1} e\Big(\frac{p}{q}s\Big) = \sum_{s=0}^{q-1} e\Big(\frac{s}{q}\Big) = 0.$$

(32) und (33) ergeben

$$\Big| \sum_{0\leqq n\leqq \sqrt{u}} e\Big(\frac{p}{q}[x-\alpha n^2]\Big)\Big| \leqq \sum_{s=0}^{q-1} \Big| \sum_{0\leqq n\leqq \sqrt{u}} \psi_q\Big(\frac{x-s}{q} - \alpha\frac{n^2}{q}\Big)\Big|$$

$$(34)\qquad \leqq q \operatorname*{Max}_{0\leqq s<q} \Big| \sum_{0\leqq n\leqq \sqrt{u}} \psi_q\Big(\frac{x-s}{q} - \alpha\frac{n^2}{q}\Big)\Big|.$$

Mit (31) und (34) ist aber (10) bewiesen.

Beweis von Satz 1. Es sei ein ε mit $0 < \varepsilon < 1$ fest vorgegeben. Dann lautet mein Ziel: für $x \geqq x_1(Q, \varepsilon)$ ist

$$(35)\qquad |\mathsf{P}(x)| \leqq C_3 \varepsilon x^{\frac{k}{2}-1}.$$

Hierbei darf ich ohne Beschränkung der Allgemeinheit ε als reziproke ganze Zahl annehmen.

Es sei r eine natürliche Zahl. Alle Sprungstellen von $\mathsf{P}(x)$ im Intervall

$$r < x < r+1 \tag{36}$$

sind dann, wie aus (8) unmittelber abzulesen ist, unter den Zahlen

$$r + R(\alpha n^2), \qquad 1 \leqq n \leqq \sqrt{\frac{r+1}{\alpha}} \tag{37}$$

zu suchen (für $r+1 < \alpha$ ist eben $\mathsf{P}(x)$ im Intervall (36) stetig).

Ich betrachte jetzt eine, zunächst beliebige, reelle Zahlenfolge

$$\beta_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{38}$$

Diesen Zahlen entsprechen ihre Reduzierten modulo Eins

$$R(\beta_n), \tag{39}$$

die alle dem Intervall $0 \leqq u < 1$ angehören. Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Teilintervall

$$0 \leqq a \leqq u < b \leqq 1, \tag{40}$$

$$\begin{aligned} n(\mathfrak{a}) &= \sum_{\substack{1 \leqq \nu \leqq n \\ a \leqq R(\beta\nu) < b}} 1 - (b-a)n \\ &= \sum_{\substack{1 \leqq \nu \leqq n \\ R(\beta\nu) \mid \mathfrak{a}}} 1 - (b-a)n. \end{aligned} \tag{41}$$

Ist insbesondere für jedes durch (40) gegebene Intervall $\mathfrak{a}$

$$n(\mathfrak{a}) = o(n), \tag{42}$$

so heißt nach Weyl[11])[12]) die Folge (38) *modulo Eins gleichverteilt*, die Folge (39) *gleichverteilt* (ich werde auch im ersten Falle kurz gleichverteilt sagen). Die Abschätzung (42) braucht übrigens für keine Serie von unendlich vielen Intervallen gleichmäßig erfüllt zu sein.

Nach Weyl[13]) ist für jedes irrationale $\beta \gtrless 0$ die Folge

$$\beta_n = \beta n^2 \tag{43}$$

gleichverteilt, insbesondere gilt dies also auch für

$$\alpha n^2. \tag{44}$$

---

[11]) H. Weyl, „Über ein Problem aus dem Gebiet der Diophantischen Approximationen“ [Göttinger Nachrichten 1914, S. 234—244], S. 234.

[12]) H. Weyl, „Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins“ [Mathematische Annalen 77 (1916), S. 313—352], S. 313.

[13]) loc. cit. [11]), S. 238; loc. cit. [12]), S. 334.

Es sei jetzt m eine beliebige ganze Zahl auf der Strecke

$$0 \leqq m \leqq \frac{1}{\varepsilon} - 1, \tag{45}$$

$\mathfrak{a}_m$ das Intervall

$$m\varepsilon \leqq u < (m+1)\varepsilon. \tag{46}$$

(44) und (46) entsprechen dann, im Sinne von (45) und (41), die $\frac{1}{\varepsilon}$ Funktionen $n(\mathfrak{a}_m)$. Nach (42) ist ferner

$$n(\mathfrak{a}_m) = o(n). \tag{47}$$

Da m wegen (45) genau $\frac{1}{\varepsilon}$ Werte annimmt, so bedeutet die Abschätzung (47)

$$|n(\mathfrak{a}_m)| \leqq \varepsilon n \qquad (n \geqq n_1(\alpha, \varepsilon)). \tag{48}$$

Es ist eben, in durchsichtiger Schreibweise,

$$n_1(\alpha, \varepsilon) = n_1 = \operatorname{Max}\left(n_{1,0}, \ldots, n_{1,\frac{1}{\varepsilon}-1}\right).$$

Da jedes Intervall $\mathfrak{a}_m$ zufolge von (46) die Länge ε besitzt, so ergeben (41) und (48)

$$\sum_{\substack{1 \leqq \nu \leqq n \\ R(\alpha\nu^2) \mid \mathfrak{a}_m}} 1 \leqq 2\varepsilon n \qquad (n \geqq n_1(\alpha, \varepsilon)). \tag{49}$$

Ich nehme jetzt an, daß x eine beliebige Zahl des Intervalls (36) ist. x gehört dann zugleich einem bestimmten Intervall $\mathfrak{a}_m^{(r)}$

$$\xi = r + m\varepsilon \leqq x < r + (m+1)\varepsilon \qquad (\xi = \xi_m^{(r)}) \tag{50}$$

an. Es ist ferner

$$0 \leqq x - \xi < \varepsilon. \tag{51}$$

Nach (36), (37), (49) und (50) liegen im Intervall $\mathfrak{a}_m^{(r)}$, sobald $r \geqq r_1(\alpha, \varepsilon)$ ist, höchstens

$$c_1 \varepsilon \sqrt{x} \tag{52}$$

Sprungstellen von $\mathsf{P}(x)$; um so mehr gilt dies also für das Teilintervall

$$\xi \leqq z \leqq x, \tag{53}$$

das sich wegen (50) auch auf einen Punkt reduzieren kann.

Ich greife jetzt auf (1) und (8) zurück. Für jedes $z > 0$ ist

$$\mathsf{P}(z+0) - \mathsf{P}(z-0) = \sum_{Q=z} 1 = \sum_{\alpha n^2 + Q_1 = z} 1. \tag{54}$$

Ist z Sprungstelle, also die Summe rechts nicht leer, dann wird die Gleichung

$$\alpha n^2 + Q_1(n_1, \ldots, n_{k-1}) = z$$

wegen der Irrationalität von α durch genau ein $n^2 = n_0^2$ gelöst. Es ist dann

$$\sum_{\alpha n^2 + Q_1 = z} 1 \leqq 2 \sum_{Q_1 = z_0} 1, \quad z_0 = z - \alpha n_0^2 \leqq z. \tag{55}$$

Aus (1), (54) und (55) folgt

$$0 \leqq \mathsf{P}(z+0) - \mathsf{P}(z-0) \leqq 2(\mathsf{P}_1(z_0+0) - \mathsf{P}_1(z_0-0)), \tag{56}$$

aus (55), (56), (53) und (15)

$$\mathsf{P}(z+0) - \mathsf{P}(z-0) = O\left(z^{\frac{k-3}{2}}\right) = O\left(x^{\frac{k-3}{2}}\right). \tag{57}$$

Aus (1), (50), (51), (52), (53) und (57) schließe ich jetzt: für $\xi \geqq \xi_1(Q, \varepsilon)$ ist

$$\begin{aligned} |\mathsf{P}(x) - \mathsf{P}(\xi)| &\leqq C_4\left(\varepsilon \sqrt{x}\, x^{\frac{k-3}{2}} + x^{\frac{k}{2}} - \xi^{\frac{k}{2}}\right) \\ &\leqq C_5 \varepsilon x^{\frac{k}{2}-1}, \end{aligned}$$

$$|\mathsf{P}(x)| \leqq |\mathsf{P}(\xi)| + C_5 \varepsilon x^{\frac{k}{2}-1} \qquad (\xi \geqq \xi_1(Q, \varepsilon)). \tag{58}$$

Ein Vergleich von (35), (50) und (58) lehrt, daß in (35) unbeschadet der Allgemeinheit x als ganzzahliges Vielfache von ε angenommen werden darf. Es sei also fortan

$$x \equiv 0 \pmod{\varepsilon}. \tag{59}$$

Mit (38) ist für festes reelles z, wie eine einfache Überlegung zeigt, auch die Folge

$$z + \beta_n$$

gleichverteilt. Also ist wegen (43) auch

$$x - \alpha n^2 \tag{60}$$

gleichverteilt.

Ich erinnere jetzt an folgenden Weylschen Satz[14]):

„*Es sei $f(u)$ eine reelle, beschränkte, im Riemannschen Sinne integrable Funktion mit der Periode Eins; ferner*

$$\int_0^1 f(u)\, du = 0.$$

Dann wird für eine jede gleichverteilte Folge (38)

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\beta_\nu) = o(n)." \tag{61}$$

[14]) loc. cit. [11]), S. 235; loc. cit. [12]), S. 314.

Wende ich diesen Satz auf die Folge (60) nebst

$$f(u) = R(u) - \frac{1}{2}$$

an, so ergibt (61)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(R(x - \alpha\nu^2) - \frac{1}{2}\right) = o(n).$$

Dies bedeutet, da x modulo Eins wegen (59) nur $\frac{1}{\varepsilon}$ Werte annimmt,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \left(R(x - \alpha\nu^2) - \frac{1}{2}\right)\right| \leqq \varepsilon n \qquad (n \geqq n_2(\alpha, \varepsilon)),$$

also

$$\left|\sum_{0 \leqq n \leqq \sqrt{u}} \left(R(x - \alpha n^2) - \frac{1}{2}\right)\right| \leqq c_2 \varepsilon \sqrt{u} \qquad (u \geqq u_1(\alpha, \varepsilon)).$$

Eine der geläufigsten ε-Rechnungen ergibt jetzt: Für $x \geqq x_2(\alpha, \varepsilon)$ ist

$$(62) \qquad \int_0^{\frac{x}{\alpha}} (x - \alpha u)^{\frac{k-5}{2}} \left|\sum_{0 \leqq n \leqq \sqrt{u}} \left(R(x - \alpha n^2) - \frac{1}{2}\right)\right| du \leqq c_3 \varepsilon x^{\frac{k}{2}-1}.$$

Um den zweiten Bestandteil rechts in (10) abzuschätzen, nehme ich zuerst an, daß

$$(63) \qquad q \leqq \frac{1}{\varepsilon}$$

ist. s habe die frühere Bedeutung, laufe also über

$$(64) \qquad 0 \leqq s < q.$$

Für jedes Tripel x, q, s ist (vgl. (60)) die Folge

$$(65) \qquad \frac{x - s}{q} - \alpha \frac{n^2}{q}$$

gleichverteilt.

Ich wende jetzt den Weylschen Satz auf (65) und die Funktion ψ_q aus (11) an. Da x, q, s wegen (59), (63) und (64) modulo Eins höchstens $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^3$ Wertetripel durchlaufen, so ergibt (61)

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \psi_q\left(\frac{x - s}{q} - \alpha\frac{\nu^2}{q}\right)\right| \leqq \varepsilon n \qquad (n \geqq n_3(\alpha, \varepsilon)),$$

also

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq s < q} \left|\sum_{0 \leqq n \leqq \sqrt{u}} \psi_q\left(\frac{x - s}{q} - \alpha\frac{n^2}{q}\right)\right| \leqq c_4 \varepsilon \sqrt{u} \qquad (u \geqq u_2(\alpha, \varepsilon)),$$

also

$$(66)\quad \sum_{q=2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{q^2} \int_0^{\frac{x}{q}} (x-\alpha u)^{\frac{k-5}{2}} \operatorname*{Max}_{0\leqq s<q} \left| \sum_{0\leqq n\leqq \sqrt{u}} \psi_q\left(\frac{x-s}{q} - \alpha\frac{n^2}{q}\right)\right| du \leqq c_6 \varepsilon x^{\frac{k}{2}-1}$$
$$(x \geqq x_3(\alpha, \varepsilon)).$$

Für den Reihenrest habe ich aber die primitive Abschätzung

$$\sum_{q=\frac{1}{\varepsilon}+1}^{\infty} \frac{1}{q^2} \int_0^{\frac{x}{q}} \leqq \sum_{q=\frac{1}{\varepsilon}+1}^{\infty} \frac{1}{q^2} \cdot \int_0^{\frac{x}{q}} (x-\alpha u)^{\frac{k-5}{2}} (1+\sqrt{u})\, du$$

$$(67)\quad \leqq c_6 \varepsilon x^{\frac{k}{2}-1} \qquad (x>0).$$

Aus (10), (62), (66) und (67) folgt (35), unter der Annahme (59), also (35) allgemein, also (9).

Ich will jetzt zeigen, daß *die Abschätzung* (9), *ihrer Größenordnung in x nach, definitiv ist.* Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein festes $\varphi(x)$, das für alle hinreichend großen x definiert ist, mit $x \to \infty$ gegen Null strebt und

$$(68)\quad P(x) = o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\varphi(x)\right)$$

für jedes irrationale $\alpha > 0$ erfüllt.

Es sei $\varphi(x)$ für $x \geqq x_0 > 0$ positiv, für $x \geqq x_1 \geqq x_0 + 1$ kleiner als 1, für $x \geqq x_2 \geqq x_1 + 1$ kleiner als $\frac{1}{2}$ usw. ad infinitum. Ich ersetze dann $\varphi(x)$ durch den Linienzug $\varphi^*(x)$, welcher die Punkte mit den Koordinaten

$$(0, 2), (x_1, 1), \left(x_2, \frac{1}{2}\right), \ldots$$

miteinander verbindet. Für dieses $\varphi^*(x)$ ist dann (68) ebenfalls erfüllt. Es genügt somit, wenn ich folgenden Satz beweise:

Satz 2. *Es sei $\varphi(x)$ für alle $x > 0$ definiert, positiv und nehme mit wachsendem x monoton gegen Null ab. Dann ist für ein geeignetes irrationales $\alpha > 0$*

$$(69)\quad P(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{2}-1}\varphi(x)\right).$$

Beweis. Zunächst führe ich, nur für diesen Satz 2, die folgende Abkürzung ein:

$$(u)' = \frac{1}{10^{m_u}},$$

wenn die rechte Seite einen Sinn hat. Sodann definiere ich eine unendliche Folge natürlicher Zahlen m_r $(r \geqq 1)$ irgendwie durch die folgenden drei Bedingungen

$$r + m_r \leqq m_{r+1}, \tag{70}$$

$$2(1 + m_{2r+1})(2r+2)' \leqq \frac{1}{4}(2r)', \tag{71}$$

$$\frac{1}{2}(2r)' \geqq \varphi(m_{2r+1}) \tag{72}$$

und setze

$$\alpha = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (2r)'. \tag{73}$$

Wegen (70) stellt der Dezimalbruch (73) eine irrationale Zahl dar. Aus (71) und (73) folgt ferner für $r \geqq 1$, $1 \leqq s \leqq 1 + m_{2r+1}$

$$0 < \alpha s - s - s \sum_{\mu=1}^{r} (2\mu)' < 2(1 + m_{2r+1})(2r+2)' \leqq \frac{1}{4}(2r)'. \tag{74}$$

Setze ich daher

$$\xi_1 = \xi_{1,r} = \frac{1}{4}(2r)', \qquad \xi_2 = \xi_{2,r} = \frac{3}{4}(2r)', \tag{75}$$

so gehört dem Intervall

$$\xi_1 \leqq u \leqq \xi_2$$

keine der Zahlen

$$R(\alpha s); \qquad 1 \leqq s \leqq 1 + m_{2r+1}$$

an; denn jede dieser Zahlen liegt wegen (74) in zu großer Nähe eines ganzzahligen Vielfachen von $(2r)'$.

Nunmehr sei

$$x_1 = x_{1,r} = m_{2r+1} + \xi_1, \qquad x_2 = x_{2,r} = m_{2r+1} + \xi_2. \tag{76}$$

Aus (70), (75) und (76) folgt dann

$$\lim_{r=\infty} x_1 = \infty, \qquad \lim_{r=\infty} x_2 = \infty. \tag{77}$$

Im Intervall

$$m_{2r+1} < x < 1 + m_{2r+1}$$

liegen wegen $\alpha > 1$ nach (36) und (37) höchstens die folgenden Sprungstellen von $\mathsf{P}(x)$:

$$m_{2r+1} + R(\alpha s); \qquad 1 \leqq s \leqq 1 + m_{2r+1}.$$

Daher ist im Intervall $x_1 \leqq x \leqq x_2$ die Funktion $\mathsf{P}(x)$ stetig. Man hat dann, mit geeigneten Konstanten $C_6 \geqq C_7 \geqq C_8 = 2C_9$, unter Beachtung von (1) und (72),

$$P(x_1) - P(x_2) = C_6\left(x_2^{\frac{k}{2}} - x_1^{\frac{k}{2}}\right) \geqq C_7 (x_2 - x_1) x_1^{\frac{k}{2}-1}$$

$$= \frac{C_7}{2}(2r)' x_1^{\frac{k}{2}-1} \geqq C_7 x_1^{\frac{k}{2}-1} \varphi(m_{2r+1})$$

$$\geqq C_7 x_1^{\frac{k}{2}-1} \varphi(x_1) \geqq C_8 x_2^{\frac{k}{2}-1} \varphi(x_2);$$

$$P(x_1) - P(x_2) \geqq C_8 \operatorname{Max}\left(x_1^{\frac{k}{2}-1} \varphi(x_1),\ x_2^{\frac{k}{2}-1} \varphi(x_2)\right),$$

also entweder

$$|P(x_1)| \geqq C_9 x_1^{\frac{k}{2}-1} \varphi(x_1),$$

oder

$$|P(x_2)| \geqq C_9 x_2^{\frac{k}{2}-1} \varphi(x_2),$$

womit, im Hinblick auf (77), die Abschätzung (69) bewiesen ist.

Man sieht übrigens unschwer ein, daß (69) *bei festem φ für eine auf der positiven Abszissenachse überall dichte Menge von irrationalen α-Werten erfüllt ist.* Liegt nämlich irgendein endlicher Dezimalbruch $a > 0$ vor, so lasse ich (70), (72) unverändert, ersetze (71) durch

$$\frac{2}{a}(1 + m_{2r+1})(2r+2)' \leqq \frac{1}{4}(2r)',$$

nehme

$$\alpha = a + \sum_{r=1}^{\infty}(2r)'$$

und verlange überdies $\alpha < a + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben). Dann zeigt der obige Beweis fast wörtlich, daß (69) erfüllt ist.

Ich will jetzt, um Satz 1 verschärfen zu können, α einschränken; und zwar setze ich voraus, daß *der n-te Kettenbruchnenner von α nicht schneller als eine feste Potenz von n anwächst.* In Zeichen: es sei

$$\alpha = a_0 + \frac{1\,|}{|\,a_1} + \frac{1\,|}{|\,a_2} + \dots \tag{78}$$

die Entwicklung von α in einen regelmäßigen Kettenbruch [15]). Dann soll es ein $\varrho = \varrho(\alpha)$ geben, so daß

$$a_n \leqq c_7 n^{\varrho} \qquad (n \geqq 1) \tag{79}$$

ist. Es gilt dann der folgende

[15]) Der Kettenbruch (78) ist unendlich, die Entwicklung selbst eindeutig. Vgl. z. B. O. Perron, „Die Lehre von den Kettenbrüchen" [Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1913], S. 39. Ich zitiere das Buch weiterhin kurz mit Perron.

Satz 3. *Es sei* $k \geqq 10$. *Dann ist für jedes irrationale* $\alpha > 0$, *das der Voraussetzung* (79) *genügt,*

$$P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-\frac{6}{5}} \log^{\frac{\varrho}{5}} x\right). \tag{80}$$

Zu diesen α gehören alle positiven quadratischen Irrationalitäten; für sie ist die Entwicklung (78) periodisch (Perron, S. 74), mithin $\varrho = 0$ wählbar. Sieht man von einer unbestimmten Ausnahmemenge der α vom Lebesgueschen Maße Null ab, so gilt nach É. Borel und F. Bernstein[16]: bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ist für fast alle $\alpha > 0$ zugleich

$$a_n = O(n^{1+\varepsilon}), \qquad a_n = \Omega(n^{1-\varepsilon}). \tag{81}$$

In diesem Sinne ergibt also Satz 3 z. B.: für fast alle $\alpha > 0$ ist

$$P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-\frac{6}{5}} \log^{\frac{1}{4}} x\right).$$

Daß die Abschätzung (80) definitiv ist, glaube ich nicht; indessen beginnen hier bereits die Schwierigkeiten, von denen ich in der Einleitung sprach.

Dem Beweise von Satz 3 schicke ich zwei Hilfssätze voraus[17].

Hilfssatz 2. *Das irrationale* $\alpha > 0$ *erfülle die Bedingung* (79); N, m *und* r *seien natürliche Zahlen. Dann ist für* $N \geqq 2$

$$\left|\sum_{n=0}^{N} e\left(\alpha \frac{mn^2}{r}\right)\right| \leqq c_8 \sqrt[4]{mr}\, \sqrt{N} \log^{\frac{\varrho}{4}} N. \tag{82}$$

Beweis. Da m und r einen konstanten Proportionalitätsfaktor vertragen, so sei, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, $mr \geqq 3$.

Es seien: $\beta > 0$ eine beliebige Irrationalzahl,

$$\beta = b_0 + \frac{1\,|}{|\,b_1} + \frac{1\,|}{|\,b_2} + \ldots \qquad (b_0 = [\beta]) \tag{83}$$

---

[16]) Literatur bei G. H. Hardy und J. E. Littlewood, „Some problems of Diophantine approximation. II. The trigonometrical series associated with the elliptic ϑ-functions" [Acta Mathematica **37** (1914), S. 193–239], S. 215. Vgl. hierzu noch K. Knopp, „Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten" [Mathematische Zeitschrift **95** (1925), S. 409–426], § 3.

[17]) Alles, was ich bis zum Schluß dieser Arbeit vorzubringen habe, hängt aufs engste mit der Gleichverteilungslehre der Folge (44) zusammen, von der ich bereits beim Beweise von Satz 1 Gebrauch gemacht habe. Einen systematischen Aufbau dieser Theorie gibt H. Behnke, „Zur Theorie der diophantischen Approximationen" [Abhandlungen des Mathematischen Seminars Hamburg **3** (1924), S. 261–318], insb. die Abschnitte **C** und **D**. Ich muß mich hier mit der Erwähnung dieser inhaltsreichen Arbeit begnügen, da ich von den Behnkeschen Sätzen keinen Gebrauch machen kann und aus räumlichen Gründen nicht näher auf die Zusammenhänge eingehen darf.

ihre regelmäßige Kettenbruchentwicklung,

$$\beta_n = \frac{1}{|}\,\frac{1}{b_{n+1}} + \frac{1}{|}\,\frac{1}{b_{n+2}} + \dots \qquad (n \geqq 0,\ \beta_0 = R(\beta)) \tag{84}$$

die Kettenbruchreste. Man hat dann die leicht beweisbaren Ungleichungen [18])

$$0 < \beta_n < 1, \qquad \beta_n \beta_{n+1} < \frac{1}{2}. \tag{85}$$

Setze ich daher

$$\mathsf{B}_n = \beta_0 \beta_1 \dots \beta_n \qquad (n \geqq 0);\ \mathsf{B}_{-1} = 1, \tag{86}$$

so ist wegen (85)

$$\lim_{n=\infty} \mathsf{B}_n = 0.$$

Zu jedem N läßt sich somit ein $\nu = \nu(N) \geqq 0$ so bestimmen (ich frage nicht, ob eindeutig), daß

$$N\mathsf{B}_\nu < 1 \leqq N\mathsf{B}_{\nu-1} \tag{87}$$

ist.

Ich setze ferner

$$s(N,\beta) = \sum_{n=0}^{N} e\left(\beta \frac{n^2}{2}\right), \qquad t(N,\beta) = \sum_{n=0}^{N} e\left((\beta+1)\frac{n^2}{2}\right). \tag{88}$$

In diesen Bezeichnungen gilt nach Hardy und Littlewood [19]), sofern $0 < \beta < 1$ ist,

$$\left|\begin{matrix} s \\ t \end{matrix}(N,\beta)\right| \leqq K_1 \operatorname{Min}\left(N\sqrt{\mathsf{B}_{\nu-1}} + \frac{1}{\sqrt{\mathsf{B}_{\nu-1}}}, \frac{1}{\sqrt{\mathsf{B}_\nu}}\right). \tag{89}$$

Aus (89) folgt sofort, daß für beliebiges irrationales $\beta > 0$

$$|s(N,\beta)| \leqq K_1 \operatorname{Min}\left(N\sqrt{\mathsf{B}_{\nu-1}} + \frac{1}{\sqrt{\mathsf{B}_{\nu-1}}}, \frac{1}{\sqrt{\mathsf{B}_\nu}}\right) \tag{90}$$

ist. In der Tat hat man wegen (88), je nachdem $[\beta] \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 2$ ist,

$$s(N,\beta) = s(N, R(\beta)) \quad \text{oder} \quad = t(N, R(\beta));$$

ferner entsprechen nach (83), (84), (86) und (87) den Zahlen β und $R(\beta)$ dieselben β_n, B_n, ν.

---

[18]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood, loc. cit. [16]), S. 211–212.

[19]) loc. cit. [16]), S. 213 (im allgemeineren Rahmen). Die tiefliegende Abschätzung (89) beruht im wesentlichen auf asymptotischen Transformationsformeln für die Summen (88). Diese Transformationsformeln werden von den Verfassern mittels des Cauchyschen Integralsatzes bewiesen; eine einfachere Begründung (Fourrierreihen) gab seitdem J. G. van der Corput, „Über Summen, die mit den elliptischen ϑ-Funktionen zusammenhängen", Mathematische Annalen 87 (1922), S. 66–77.

Nach (87) ist

$$\frac{1}{\sqrt{B_{\nu-1}}} \leqq \sqrt{N};$$

man kann daher (90) in die Form bringen

$$|s(N,\beta)| \leqq K_1 \operatorname{Min}\left(N\sqrt{B_{\nu-1}} + \sqrt{N},\ \frac{1}{\sqrt{B_\nu}}\right). \tag{91}$$

Der Kettenbruch (83) liefert die Näherungsbrüche

$$\frac{p_n}{q_n} = b_0 + \frac{1}{|b_1|} + \ldots + \frac{1}{|b_n|} \quad (n \geqq 1); \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{b_0}{1} \tag{92}$$

bereits in ihrer reduzierten Form $(p_n, q_n) = 1$ (Perron, S. 29). Nach Hardy und Littlewood [20]) ist

$$\frac{1}{2B_{n-1}} < q_n < \frac{1}{B_{n-1}} \quad (n \geqq 1). \tag{93}$$

Aus (91) und (93) folgt

$$|s(N,\beta)| \leqq K_2 \operatorname{Min}\left(\frac{N}{\sqrt{q_\nu}} + \sqrt{N},\ \sqrt{q_{\nu+1}}\right). \tag{94}$$

Für die durch (92) gegebenen Näherungen des Kettenbruchs (83) gelten bekanntlich: die Rekursionsformeln

$$q_{n+1} = b_{n+1} q_n + q_{n-1} \qquad (n \geqq 1) \tag{95}$$

(Perron, S. 28), das Näherungsgesetz

$$\frac{1}{2 q_n q_{n+1}} < \left|\beta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \qquad (n \geqq 0) \tag{96}$$

(Perron, S. 43); ferner die Tatsache, daß ein beliebiger Bruch $\frac{p}{q}$ $(p > 0,\ q > 0)$ Näherungsbruch von β ist, wenn die Ungleichung

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2} \tag{97}$$

besteht (Perron, S. 45).

Ich setze jetzt

$$\beta = \alpha \frac{2m}{r}. \tag{98}$$

Mein nächstes Ziel lautet dann [21])

$$q_{n+1} \leqq c_9\, m r\, q_n \log^2(m r\, q_n) \qquad (n \geqq 0). \tag{99}$$

---

[20]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood, „Some problems of Diophantine approximation: The lattice-points of a right-angled triangle (Second memoir.)“ [Abhandlungen des Mathematischen Seminars Hamburg **1** (1922), S. 212–249], S. 213.

[21]) Ich folge dabei genau einer Überlegung von A. Ostrowski, „Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen“ [Abhandlungen des Mathematischen Seminars Hamburg **1** (1922), S. 77–98], S. 84.

Hierin werden q_{n+1}, q_n durch (83), (92) und (98), ϱ durch (78) und (79) geliefert.

Ich bezeichne die Näherungsbrüche von α mit $\frac{u_n}{v_n}$. Aus (95) und (79) folgt dann für $n \geqq 1$

$$v_{n+1} = a_{n+1} v_n + v_{n-1} \leqq (a_{n+1}+1) v_n \leqq (c_7 (n+1)^\varrho + 1) v_n$$

$$\leqq c_{10} (n+1)^\varrho v_n; \tag{100}$$

verlange ich überdies, daß $c_{10} \geqq v_1$ ist, so gilt (100) auch für $n = 0$.

Nun ist, ganz oberflächlich abgeschätzt,

$$4 v_n \geqq 2^{\frac{n+1}{2}}. \tag{101}$$

Diese, natürlich wohlbekannte, Beziehung ist für $n = 0$ oder 1 klar und allgemein ergibt sie sich aus (95) so

$$4 v_{n+2} \geqq 4 v_{n+1} + 4 v_n \geqq 2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} = 2^{\frac{n+3}{2}}.$$

Aus (101) folgt

$$(n+1)^\varrho \leqq c_{11} \log^\varrho (4 v_n), \tag{102}$$

aus (100) und (102)

$$v_{n+1} \leqq c_{12} v_n \log^\varrho (4 v_n). \tag{103}$$

Ich nehme jetzt an, daß für irgendein $n \geqq 0$

$$q_{n+1} \geqq c_9 m r q_n \log^\varrho (m r q_n) \tag{104}$$

ist, Verfügung über $c_9 \geqq 4$ vorbehalten. Aus (96) und (104) folgt dann wegen $m r \geqq 3$

$$\left| \beta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leqq \frac{1}{c_9 m r q_n^2 \log^\varrho (m r q_n)} \tag{105}$$

$$< \frac{1}{4 m r q_n^2}. \tag{106}$$

(98) und (106) ergeben

$$\left| \alpha - \frac{r}{2m} \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2 (2 m q_n)^2}.$$

Nach (97) ist also für ein geeignetes $s \geqq 0$

$$\frac{r}{2m} \frac{p_n}{q_n} = \frac{u_s}{v_s}. \tag{107}$$

Aus (96) und (103) folgt

$$\left| \alpha - \frac{u_s}{v_s} \right| > \frac{1}{2 v_s v_{s+1}} \geqq \frac{c_{13}}{v_s^2 \log^\varrho (4 v_s)}, \tag{108}$$

aus (98), (105) und (107)

$$\left|\alpha - \frac{u_s}{v_s}\right| < \frac{1}{2c_9 (m q_n)^2 \log^\varrho (m r q_n)}, \tag{109}$$

aus (108) und (109)

$$c_9 < c_{14} \frac{v_s^2 \log^\varrho (4 v_s)}{(m q_n)^2 \log^\varrho (m r q_n)}, \tag{110}$$

aus (107)

$$v_s \leqq 2 m q_n, \tag{111}$$

aus (110) und (111)

$$c_9 < 4 c_{14} \frac{\log^\varrho (8 m q_n)}{\log^\varrho (m r q_n)} < c_{15}.$$

Die Ungleichung (104) ist also für kein $n \geqq 0$ mit $c_9 = c_{15} + 4$ erfüllt; für dieses c_9 ist damit (99) nachgewiesen.

Nehme ich jetzt $m r \leqq N^2$ an (für $m r > N^2$ ist (82) klar), so folgt aus (87), (88), (93), (94) und (99)

$$\left| \sum_{n=0}^{N} e\left(\beta \frac{n^2}{2}\right) \right| \leqq c_{16} \operatorname{Min}\left(\frac{N}{\sqrt{q_\nu}} + \sqrt{N}, \sqrt{m r q_\nu} \log^{\frac{\varrho}{2}} N\right).$$

Damit ist aber Hilfssatz 2 bewiesen. Denn für

$$\frac{N}{\sqrt{q_\nu}} \geqq \sqrt[4]{m r}\, \sqrt{N} \log^{\frac{\varrho}{4}} N$$

ist

$$\sqrt{m r q_\nu} \log^{\frac{\varrho}{2}} N \leqq \sqrt{m r} \frac{N}{\sqrt[4]{m r}\, \sqrt{N} \log^{\frac{\varrho}{4}} N} \log^{\frac{\varrho}{2}} N = \sqrt[4]{m r}\, \sqrt{N} \log^{\frac{\varrho}{4}} N.$$

Hilfssatz 3. *Es sei $\psi(u)$ für alle reellen u definiert, reell und dem absoluten Betrage nach $\leqq 1$. Die Funktion $\psi(u)$ besitze überdies die Periode Eins, sei im Intervall $0 < u < 1$ monoton*[22]) *und erfülle die Beziehung*

$$\int_0^1 \psi(u)\, du = 0.\ ^{23}) \tag{112}$$

Es seien z reell, $r \geqq 1$ ganz; $\alpha > 0$ genüge der Bedingung (79).

---

[22]) Ich verlange nur $\psi(u_1) \leqq \psi(u_2)$ oder $\psi(u_1) \geqq \psi(u_2)$ für $0 \leqq u_1 < u_2 < 1$.

[23]) Aus den Voraussetzungen folgt, daß $\psi(u)$ über jedes endliche Stück im Riemannschen Sinne integrabel ist.

Behauptet wird für jedes ganze $N \geqq 2$

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \psi\left(z - \alpha \frac{n^2}{r}\right) \right| \leqq c_{17} \sqrt[4]{r}\, N^{\frac{3}{5}} \log^{\frac{e}{5}} N. \tag{113}$$

Beweis. Das folgende Verfahren ist der van der Corputschen Abschätzungsmethode entnommen[24]), geht aber in der Idee noch weiter auf Pfeiffer zurück.

Es sei $w > 1$. Ich setze, wenn ψ für $0 < u < 1$ nicht abnimmt,

$$\psi^*(u) = \begin{cases} \psi(u) + 2\left(1 - \frac{1}{w}\right) & \text{für} \quad R(u) \leqq \frac{1}{w} \\ \psi(u) - \frac{2}{w} & \text{für} \quad \frac{1}{w} < R(u) < 1, \end{cases} \tag{114}$$

wenn ψ daselbst nicht zunimmt,

$$\psi^*(u) = \begin{cases} \psi(u) - \frac{2}{w} & \text{für} \quad R(u) < 1 - \frac{1}{w} \\ \psi(u) + 2\left(1 - \frac{1}{w}\right) & \text{für} \quad 1 - \frac{1}{w} \leqq R(u) < 1. \end{cases} \tag{115}$$

Im folgenden bedeutet $\pm$, daß im Falle (114) das obere, im Falle (115) das untere Vorzeichen zu nehmen ist. Man sieht dann leicht ein (vgl. bei van der Corput a. a. O.), daß folgende Ungleichung besteht

$$\psi(u) \leqq \psi^*(u \pm v) + \frac{2}{w} \qquad \left(0 \leqq v \leqq \frac{1}{w};\ u \text{ beliebig}\right). \tag{116}$$

Aus (116) folgt

$$\sum_{n=0}^{N} \psi\left(z - \alpha \frac{n^2}{r}\right) \leqq w \sum_{n=0}^{N} \int_0^{\frac{1}{w}} \psi^*\left(z - \alpha \frac{n^2}{r} \pm v\right) dv + \frac{2(N+1)}{w}. \tag{117}$$

Nunmehr liefert, unter Berücksichtigung von (112), (114) und (115), eine Fourierentwicklung

$$w \int_0^{\frac{1}{w}} \psi^*(u \pm v)\, dv = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e(mu) \tag{118}$$

mit

$$a_0 = 0, \qquad |a_m| \leqq \operatorname{Min}\left(\frac{1}{|m|}, \frac{w}{m^2}\right) \qquad (m \neq 0). \tag{119}$$

Aus (117), (118) und (119) ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} \psi\left(z - \alpha \frac{n^2}{r}\right) &\leqq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=0}^{N} e\left(mz - \alpha \frac{m n^2}{r}\right) \right| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{m}, \frac{w}{m^2}\right) + \frac{2(N+1)}{w} \\ &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=0}^{N} e\left(\alpha \frac{m n^2}{r}\right) \right| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{m}, \frac{w}{m^2}\right) + \frac{2(N+1)}{w}. \end{aligned} \tag{120}$$

[24]) J. G. van der Corput, „Zahlentheoretische Abschätzungen“ [Mathematische Annalen 84 (1921), S. 53—79], S. 68—69.

Ich spezialisiere jetzt w und nehme ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß

$$w = \left[N^{\frac{2}{5}} \log^{-\frac{\varrho}{5}} N\right] > 1. \tag{121}$$

(121) ist nämlich für $N > c_{18} \geqq 2$ erfüllt, (113) sicherlich für $2 \leqq N \leqq c_{18}$.

Mit dieser Wahl von w folgt aus (82) und (120) für $N \geqq 2$

$$\sum_{n=0}^{N} \psi\left(z - \alpha \frac{n^2}{r}\right) \leqq 2 \sum_{m=1}^{w} \frac{1}{m} \left| \sum_{n=0}^{N} e\left(\alpha \frac{m n^2}{r}\right) \right|$$

$$+ 2w \sum_{m=w+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left| \sum_{n=0}^{N} e\left(\alpha \frac{m n^2}{r}\right) \right| + \frac{2(N+1)}{w}$$

$$\leqq 2 c_8 \sqrt[4]{r}\, \sqrt{N} \log^{\frac{\varrho}{4}} N \left(\sum_{m=1}^{w} \frac{1}{m^{\frac{3}{4}}} + w \sum_{m=w+1}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{7}{4}}} \right) + \frac{2(N+1)}{w}$$

$$\leqq c_{19} \sqrt[4]{r w}\, \sqrt{N} \log^{\frac{\varrho}{4}} N + \frac{2(N+1)}{w},$$

also

$$\sum_{n=0}^{N} \psi\left(z - \alpha \frac{n^2}{r}\right) \leqq c_{17} \sqrt[4]{r}\, N^{\frac{3}{5}} \log^{\frac{\varrho}{5}} N. \tag{122}$$

Da $-\psi(u)$ selbst ψ-Funktion im Sinne von Satz 3 ist, darf der Ungleichung (122) links ein Minuszeichen vorangesetzt werden. Damit ist (113) bewiesen.

Beweis von Satz 3. Ich wende Hilfssatz 3 zunächst auf

$$\psi(u) = R(u) - \frac{1}{2}, \qquad z = x, \qquad r = 1$$

an. Dann wird für $N \geqq 2$

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \left(R(x - \alpha n^2) - \frac{1}{2} \right) \right| \leqq c_{17} N^{\frac{3}{5}} \log^{\frac{\varrho}{5}} N,$$

d. h. für wachsendes u

$$\sum_{0 \leqq n \leqq \sqrt{u}} \left(R(x - \alpha n^2) - \frac{1}{2} \right) = O\left(u^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{\varrho}{5}} u\right). \tag{123}$$

Zweitens wende ich den Hilfssatz auf

$$\psi(u) = \psi_q(u), \qquad z = \frac{x - s}{q}, \qquad r = q$$

im Sinne von (10) und (11) an. Dann folgt für $N \geqq 2$

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \psi_q\left(\frac{x-s}{q} - \alpha \frac{n^2}{q}\right) \right| \leqq c_{17} \sqrt[4]{q}\, N^{\frac{3}{5}} \log^{\frac{\varrho}{5}} N,$$

d. h.

$$(124)\qquad \max_{0\leqq s<q}\Big|\sum_{0\leqq n\leqq\sqrt{u}}\psi_q\Big(\frac{x-s}{q}-\alpha\frac{n^2}{q}\Big)\Big| = O\Big(\sqrt[4]{q}\,u^{\frac{3}{10}}\log^{\frac{\varrho}{5}}u\Big).$$

Aus (10), (123) und (124) folgt

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(x) &= O\int_0^{\frac{x}{\alpha}}(x-\alpha u)^{\frac{k-5}{2}}u^{\frac{3}{10}}\Big|\log^{\frac{\varrho}{5}}u\Big|\,du + O\Big(x^{\frac{k-3}{2}}\Big)\\
&+ O\sum_{q=2}^{\infty}\frac{1}{q^{\frac{1}{4}}}\int_0^{\frac{x}{\alpha}}(x-\alpha u)^{\frac{k-5}{2}}u^{\frac{3}{10}}\Big|\log^{\frac{\varrho}{5}}u\Big|\,du + O\Big(x^{\frac{k-3}{2}}\Big) + O\Big(x^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}}\Big)\\
&= O\Big(x^{\frac{k-5}{2}+\frac{3}{10}+1}\log^{\frac{\varrho}{5}}x\Big) + O\Big(x^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}}\Big),
\end{aligned}$$

$$(80)\qquad \mathsf{P}(x) = O\Big(x^{\frac{k}{2}-\frac{6}{5}}\log^{\frac{\varrho}{5}}x\Big).$$

Wiesbaden, den 7. September 1926.

(Eingegangen am 10. September 1926.)

Über Entwicklungen gegebener Funktionen nach Eigenfunktionen von Randwertaufgaben.

Von

A. Hammerstein in Berlin.

Inhalt.

Seite

Einleitung.

I. Eine Restabschätzung für die Bilinearreihe 273

II. Entwicklungssätze in einer Dimension.

§ 1. Die Bilinearreihe des von zwei Veränderlichen abhängigen Kerns 275

§ 2. Ein Satz über die gliedweise Differenzierbarkeit der Bilinearreihe 278

III. Die Bilinearreihe des Kerns in mehreren Dimensionen.

§ 3. Die Funktion $H(r)$ 281

§ 4. Die Bilinearreihe für den zweimal differenzierbaren Kern 281

§ 5. Die Beschränktheit der Partialsummen der Bilinearreihe einer Greenschen Funktion 283

IV. Die mit konvergenzverbessernden Faktoren versehene Bilinearreihe.

§ 6. Die Entwicklung der Greenschen Funktion 285

§ 7. Die Bilinearreihen für die ersten Ableitungen der Greenschen Funktion 288

§ 8. Ausdehnung einiger Ergebnisse auf drei Dimensionen . . 295

V. Die Entwicklung unstetiger Funktionen 297

VI. Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung 304

VII. Anwendung auf die Gleichung der schwingenden Membran . . 307

Einleitung.

In der mathematischen Physik spielt die Entwicklung einer gegebenen Funktion in nach Eigenfunktionen eines Randwertproblems fortschreitende Reihen eine Rolle. Ein klassisches Beispiel hierfür bildet die Frage nach Lösungen von Differentialgleichungen vom Typ derer der Wärmeleitung und der schwingenden Membran bei gegebenem Anfangszustand. Dies sei an der ersteren auseinandergesetzt. Sie lautet in zwei oder drei Dimensionen

$$\frac{\partial u(x,y,(z);T)}{\partial T} = A\,\Delta_{x,y,(z)}\,u(x,y,(z);T),$$

wo A eine positive Konstante bezeichnet.

Die Aufgabe besteht darin, in einem gegebenen Grundgebiet eine solche Lösung $u = u(x,y,(z);T)$ zu finden, die für alle Zeiten T einer Randbedingung genügt und für $T=0$ gegen eine vorgegebene Funktion $f(x,y,(z))$ strebt.

Gelingt es, $f(x,y,(z))$ in „Fourierscher Weise“ nach den Eigenfunktionen φ_ν von

$$\Delta\varphi_\nu + \lambda_\nu\varphi_\nu = 0$$

bei der gegebenen Randbedingung zu entwickeln, so genügt, wie unmittelbar auf Grund des für Dirichletsche Reihen angewandten Abelschen Grenzwertsatzes ersichtlich ist, der klassische Ansatz

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu\varphi_\nu e^{-A\lambda_\nu T} \qquad \left(b_\nu = \int_B f\varphi_\nu\,dx\,dy\,(dz)\right)$$

den Rand- und Anfangsbedingungen.

Daß die Reihe in der Tat eine Lösung der Differentialgleichung darstellt, hat unter der Annahme der Existenz einer solchen und der Stetigkeit von f nebst seinen Ableitungen genügend hoher Ordnung Le Roy[1]) gezeigt.

In Abschnitt VI dieser Arbeit wird ein einfaches Verfahren angegeben, welches es gestattet, die in Rede stehende Reihe lediglich unter Voraussetzung der Konvergenz für $T=0$ als Lösung zu erkennen[2]).

Abschnitt VII enthält, jedoch unter nicht so allgemeinen Voraussetzungen, entsprechende Untersuchungen für die Gleichung der schwingenden Membran.

Es kommt also alles darauf an, festzustellen, wann eine gegebene Funktion nach den Eigenfunktionen von

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$$

entwickelt werden kann.

---

[1]) Sur l'intégration des équations de la chaleur, Ann. éc. norm. (3) **15** (1898), S. 137.

[2]) Über die Eindeutigkeit vergleiche man H. Doetsch, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung II, Math. Zeitschr. **22** (1924), S. 298 ff.

Aus der Theorie der Integralgleichungen weiß man, daß dies dann möglich ist, wenn F im ganzen Grundgebiete stetige Ableitungen erster und stückweise stetige zweiter Ordnung besitzt. Wird nun zugelassen, daß die Funktion F nebst ihren ersten Ableitungen längs gegebener Linien (Flächen) Unstetigkeiten aufweist, so gelangt man zu einem Ergebnis (Abschnitt V), das sich kurz so formulieren läßt:

Ist ε eine beliebig kleine Fehlergrenze, so gibt es stets eine gleichmäßig und absolut konvergierende Entwicklung der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu,$$

die F außerhalb von Streifen der Breite ε um die Unstetigkeitslinien (-flächen) darstellt (Satz 9 und 10); die Koeffizienten c_ν sind dabei mit Hilfe von universellen, d. h. von F unabhängigen Konstanten in ähnlicher Weise wie die Fourierkoeffizienten $\int F \varphi_\nu \, dx \, dy \, (dz)$ gebildet und haben diese bei gegen Null strebendem ε zum Grenzwert. Durch Wahl eines genügend kleinen ε kann also erreicht werden, daß eine feste Anzahl von Anfangsgliedern sich um beliebig wenig von denen der Fourierreihe unterscheidet. Im Falle einer nebst den Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen Funktion F ist die Entwicklung mit der Fourierschen identisch. Daß eine Reihe der genannten Art überhaupt existiert, ist trivial; man hat ja nur F durch eine Funktion zu ersetzen, die im ganzen Grundgebiet samt ihren ersten Ableitungen stetig ist und außerhalb der Streifen der Breite ε um die Unstetigkeitslinien (-flächen) mit F übereinstimmt. Das Wesentliche liegt vielmehr darin, daß die Koeffizienten c_ν in einfacher Weise explizite angegeben werden können.

Schließlich wird, wenn die Funktion F stückweise stetige Ableitungen bis zur $2m$-ten Ordnung besitzt, eine Reihe angegeben, die sie außerhalb der Streifen der Breite ε um die Unstetigkeitslinien und den Rand darstellt, und deren Koeffizienten A_ν die Eigenschaft besitzen, daß $\sum (\lambda_\nu^m A_\nu)^2$ beschränkt bleibt. Man erkennt daraus, wegen $\lambda_\nu \sim \nu$, daß die Konvergenz mit wachsendem m besser wird.

Einen Zugang zu derartigen Entwicklungsfragen, der von A. Kneser[3]) systematisch verfolgt ist, bietet die Theorie der Integralgleichungen. Er besteht darin, daß man die Konvergenz der Bilinearreihe für die zur Randwertaufgabe gehörige Greensche Funktion nachweist und sich von der gliedweisen Differenzierbarkeit überzeugt.

Diese Arbeit enthält daher in erster Linie Untersuchungen über die Entwickelbarkeit eines symmetrischen Kerns mit Unstetigkeiten nach seinen Eigenfunktionen in einer und mehreren Dimensionen.

---

[3]) Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik, 1922.

Bisher bekannt ist darüber folgendes: Die Bilinearreihe konvergiert, wenn der Kern stetig und definit ist[4]), oder im eindimensionalen Falle, wenn er der Bedingung genügt:

$$\text{(I)} \qquad \int_a^b \left(\frac{K(x_1, y) - K(x_2, y)}{x_1 - x_2}\right)^2 dy \leqq C,$$

wo $x_1 \neq x_2$ ist und C eine von x_1 und x_2 unabhängige Konstante bedeutet.

Für einen Kern vom Charakter der Greenschen Funktion gilt für alle ξ, η des Grundgebietes außerhalb einer Umgebung des Aufpunktes x, y, die beliebig klein angenommen werden darf,

$$K(x, y; \xi, \eta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{\varphi_\nu(x, y)\, \varphi_\nu(\xi, \eta)}{\lambda_\nu},$$

wobei φ_ν und λ_ν die Eigenfunktionen und Eigenwerte, a_ν gewisse in Satz 6 angegebene Konstanten bezeichnen[5]).

Diese Ergebnisse sollen im folgenden erweitert werden. Nachdem im ersten Abschnitt eine allgemeingültige Restabschätzung aufgestellt ist, wird im zweiten die Bedingung (I) verallgemeinert. Vor allem kann auf die Beschränktheit des Kerns verzichtet werden (Satz 1). Hieraus ergibt sich mühelos der etwas engere Satz 2, welchem man unmittelbar entnimmt, daß die zu den Besselschen Funktionen und Legendreschen Polynomen gehörigen Kerne entwickelbar sind.

Auf Grund der Konvergenz dieser Bilinearreihen können dann nach dem Verfahren von A. Kneser[6]) Funktionen mit stückweise stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach Besselschen Funktionen bzw. Legendreschen Polynomen entwickelt werden, ohne von deren asymptotischem Verhalten und dem Verteilungsgesetze der Eigenwerte Gebrauch zu machen.

Endlich wird noch eine Voraussetzung angegeben, unter welcher die Bilinearreihe gliedweise differenziert werden kann (Satz 3).

Der III. Abschnitt enthält den Nachweis für die Entwickelbarkeit eines zweimal stetig differenzierbaren Kerns in zwei Dimensionen (Satz 4). Für einen mit der logarithmischen Unstetigkeit der Greenschen Funktion versehenen Kern gelingt es nur zu zeigen, daß die Partialsummen unter einer festen Konstanten verbleiben, solange der variable Punkt vom Auf-

---

[4]) J. Mercer, Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integralequations, Philosoph. Transactions of the Royal Society of London, Serie A, 209 (1909).

[5]) Vgl. die Arbeiten des Verfassers: Sitzungsberichte der preuß. Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Klasse, 1923 u. 1925.

[6]) Vgl. loc. cit. [3]), S. 20.

punkt einen Abstand hat, der nicht unter eine gegebene positive Größe herabsinkt (Satz 5).

Um zu den eingangs erwähnten Resultaten zu gelangen, reichen die genannten Ergebnisse nicht hin. Vielmehr muß hierzu die Bilinearreihe mit konvergenzverbessernden Faktoren versehen werden (Abschnitt IV). Die so modifizierte Entwicklung stellt den Kern dann außerhalb einer Umgebung des Aufpunktes dar, die beliebig klein gewählt werden kann. — Des weiteren wird die gliedweise Differenzierbarkeit dargetan. Ein Teil der Sätze kann auf den Raum übertragen werden.

Die so erzielten Resultate gestatten es, die in Rede stehenden Folgerungen über die Entwickelbarkeit von längs gegebener Linien (Flächen) unstetigen Funktionen zu ziehen. Ein sich nur für diese interessierender Leser kann die Lektüre mit Abschnitt IV beginnen.

I.

Eine Restabschätzung für die Bilinearreihe.

In diesem Abschnitte wird eine Restabschätzung hergeleitet, die in einer und mehreren Dimensionen in gleicher Weise Gültigkeit hat.

Unter dem Grundgebiet B kann sowohl eine Strecke als auch ein beschränkter ebener oder räumlicher von einer stückweise stetig gekrümmten, sich selbst nicht überschneidenden Kurve (Fläche) begrenzter Bereich verstanden werden. Für alle Punktepaare x, ξ bzw. $x, y; \xi, \eta$ bzw. $x, y, z; \xi, \eta, \zeta$ in B, allenfalls mit Ausnahme von $x = \xi$ bzw. $x = \xi$, $y = \eta$ bzw. $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$ sei die Funktion $K(x, \xi)$, $(K(x, y; \xi, \eta)$, $K(x, y, z; \xi, \eta, \zeta))$ erklärt und stetig. Der Einfachheit halber werden die Formeln in diesem Abschnitte für *eine* Dimension aufgeschrieben; für mehrere verlaufen die Untersuchungen ganz ebenso. K sei so beschaffen, daß

$$\int_B K(x, s) K(\xi, s) ds$$

eine stetige Funktion in den beiden Veränderlichen x, ξ ist. Endlich besitze K die Symmetrieeigenschaft

$$K(x, \xi) = K(\xi, x).$$

Fortan werde eine diesen Voraussetzungen genügende Funktion als „Kern“ bezeichnet. Wie aus der Theorie der Integralgleichungen bekannt ist, stellt für jede in B stückweise stetige Funktion $\varphi(s)$

$$\int_B K(x, s) \varphi(s) ds$$

eine stetige Funktion der Veränderlichen x dar und die Integrale

$$\int_B \int_B K(x,\xi)\varphi(\xi)\,dx\,d\xi \quad \text{und} \quad \int_B \int_B K(x,s)K(\xi,s)\,ds\,d\xi$$

sind von der Integrationsreihenfolge unabhängig.

Weiter werde angenommen, daß die Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_B K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = 0$$

unendlich viele Eigenwerte λ_ν, welche man sich der absoluten Größe nach geordnet denke, und die zugehörigen orthogonalen normierten Eigenfunktionen φ_ν besitze. Falls deren nur endlich viele existieren, sagen die folgenden Sätze nichts aus.

Schließlich gilt für jedes stückweise stetige Funktionenpaar φ, ψ

$$(1) \qquad \int_B \int_B K(s,\sigma)\varphi(s)\psi(\sigma)\,ds\,d\sigma = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} \int_B \varphi_\nu(s)\varphi(s)\,ds \int_B \varphi_\nu(\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma.$$

Dem Punkt x von B werde ein abgeschlossener, ganz zu B nebst Rand gehöriger Bereich $\varkappa_x$ zugeordnet, welcher im linearen Fall aus einer Strecke, im ebenen aus einem Kreis und im räumlichen aus einer Kugel besteht, und der x als inneren oder Randpunkt enthält. In gleicher Weise werde zu ξ der Bereich $\varkappa_\xi$ erklärt. Überdies sollen $\varkappa_x$ und $\varkappa_\xi$ vom selben Inhalt l sein.

Zwei Funktionen φ und ψ seien im Grundgebiet durch

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 \text{ für alle Punkte } s \text{ in } \varkappa_x, \\ 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{außerhalb } \varkappa_x; \end{cases}$$

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} 1 \text{ für alle Punkte } \sigma \text{ in } \varkappa_\xi, \\ 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{außerhalb } \varkappa_\xi \end{cases}$$

erklärt. Aus (1) folgt dann mit diesem φ und ψ für jedes ganze n

$$(2) \qquad \int_{\varkappa_x} \int_{\varkappa_\xi} K(s,\sigma)\,ds\,d\sigma = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\lambda_\nu} \int_{\varkappa_x} \varphi_\nu(s)\,ds \int_{\varkappa_\xi} \varphi_\nu(\sigma)\,d\sigma + R_n,$$

wo R_n nach der Schwarzschen und Besselschen Ungleichung durch

$$(3) \qquad |R_n| \leqq \frac{1}{|\lambda_n|} \left\{ \int_B \varphi(s)^2\,ds \cdot \int_B \psi(\sigma)^2\,d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$|R_n| \leqq \frac{l}{|\lambda_n|}$$

abgeschätzt wird. Setzt man

$$K_n(x,\xi) = K(x,\xi) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu},$$

so ergibt sich für jedes ganze n und alle Punkte x, ξ, in denen $K(x, \xi)$ erklärt ist, aus (2) und gemäß der oben angegebenen Bedeutung von l:

$$
\begin{aligned}
& l^2 K_n(x, \xi) \\
& \quad = \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} \left[K_n(x, \xi) - K(s, \sigma) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(\sigma)}{\lambda_\nu} \right] d\sigma\, ds + R_n \\
(4) \qquad & \quad = \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} (K(x, \xi) - K(s, \sigma))\, d\sigma\, ds \\
& \quad - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\lambda_\nu} \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} (\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi) - \varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(\sigma))\, d\sigma\, ds + R_n.
\end{aligned}
$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi) - \varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(\sigma) &= (\varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(s))(\varphi_\nu(\xi) - \varphi_\nu(\sigma)) \\
&\quad + \varphi_\nu(s)(\varphi_\nu(\xi) - \varphi_\nu(\sigma)) + \varphi_\nu(\sigma)(\varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(s))
\end{aligned}
$$

und

$$
\varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(s) = \lambda_\nu \int_B [K(x, u) - K(s, u)]\, \varphi_\nu(u)\, du.
$$

Einsetzen dieser Werte und der dazu entsprechenden in (4) liefert zusammen mit (3):

$$
\begin{aligned}
& l^2 K_n(x, \xi) = \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} (K(x, \xi) - K(s, \sigma))\, d\sigma\, ds \\
& - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \int_B \Big(\int_{\varkappa_x} (K(x, u) - K(s, u))\, ds \Big) \varphi_\nu(u)\, du \\
& \qquad\qquad \times \int_B \Big(\int_{\varkappa_\xi} (K(\xi, u) - K(\sigma, u))\, d\sigma \Big) \varphi_\nu(u)\, du \\
(5) \qquad & - \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\varkappa_x} \varphi_\nu(s)\, ds \cdot \int_B \int_{\varkappa_\xi} \big((K(\xi, u) - K(\sigma, u))\, d\sigma \big) \varphi_\nu(u)\, du \\
& - \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\varkappa_\xi} \varphi_\nu(\sigma)\, d\sigma \cdot \int_B \int_{\varkappa_x} \big((K(x, u) - K(s, u))\, ds \big) \varphi_\nu(u)\, du + R_n \\
& \left(|R_n| \leqq \frac{l}{|\lambda_n|} \right)
\end{aligned}
$$

Von dieser Darstellung der Partialsumme der Bilinearreihe für $K(x, \xi)$, die auch in zwei und drei Dimensionen Gültigkeit besitzt, wird im folgenden wiederholt Gebrauch gemacht.

II.

Entwickelungssätze in einer Dimension.

§ 1.

Die Bilinearreihe des von zwei Veränderlichen abhängigen Kerns.

Satz 1. *Im Grundgebiet $a \leqq x \leqq b$ sei der Kern $K(x, \xi)$ erklärt. Es mögen zwei Konstante α, β, für welche $a \leqq a + \alpha < b - \beta \leqq b$ gilt,*

derart existieren, daß $K(x,\xi)$ in dem Quadrat $a+\alpha \leqq \overset{x}{\xi} \leqq b-\beta$ stetig ist. Außerdem gebe es zwei positive Zahlen γ und C, die von α und β abhängen können, so daß für alle der Ungleichung $a+\alpha \leqq x_1 < x_2 \leqq b-\beta$ genügende Wertepaare x_1, x_2 die Beziehung

$$\int_a^b (K(x_2,u)-K(x_1,u))^2\,du \leqq C(x_2-x_1)^{1+\gamma} \tag{6}$$

statthat. Dann konvergiert die Bilinearreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}$ gleichmäßig in dem Quadrat $a+\alpha \leqq \overset{x}{\xi} \leqq b-\beta$ und stellt dort $K(x,\xi)$ dar.

Beweis. x, ξ bezeichne einen Punkt des Teilquadrates der Behauptung. Als Bereich $\varkappa_x$ bzw. $\varkappa_\xi$ des Abschnittes I wähle man eine Strecke der Länge l, die x bzw. ξ als inneren oder Endpunkt enthält, und die ganz in das Intervall $a+\alpha \leqq s \leqq b-\beta$ hineinfällt. Gemäß der Schwarzschen und Besselschen Ungleichung folgt dann aus (5):

$$\left| l^2 K_n(x,\xi) - \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} (K(x,\xi)-K(s,\sigma))\,d\sigma\,ds \right|$$

$$\leqq |\lambda_n| \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} \left\{ \int_a^b (K(x,u)-K(s,u))^2\,du \cdot \int_a^b (K(\xi,u)-K(\sigma,u))^2\,du \right\}^{\frac{1}{2}} d\sigma\,ds$$

$$+ \int_{\varkappa_\xi} \left\{ \int_{\varkappa_x} 1\,ds \cdot \int_a^b (K(\xi,u)-K(\sigma,u))^2\,du \right\}^{\frac{1}{2}} d\sigma$$

$$+ \int_{\varkappa_x} \left\{ \int_{\varkappa_\xi} 1\,ds \cdot \int_a^b (K(x,u)-K(s,u))^2\,du \right\}^{\frac{1}{2}} ds + |R_n|.$$

In Rücksicht auf (6) und (3) erhält man hieraus:

$$\leqq |\lambda_n| l^2 C l^{1+\gamma} + 2 l\, l^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}} + \frac{l}{|\lambda_n|}.$$

Also wird

$$K_n(x,\xi) \leqq \left| \frac{1}{l^2} \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} (K(x,\xi)-K(s,\sigma))\,d\sigma\,ds \right| + C|\lambda_n| l^{1+\gamma} + 2 C^{\frac{1}{2}} l^{\frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{l\,|\lambda_n|}. \tag{7}$$

Setzt man nun $l = |\lambda_n|^{\frac{-1}{(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}}$, was für hinreichend große Werte von n zulässig ist, so geht l mit wachsendem n gegen Null. Dies zieht, zufolge der Stetigkeit von $K(x,\xi)$ für $a+\alpha \leqq \overset{x}{\xi} \leqq b-\beta$,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{l^2} \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} (K(x,\xi)-K(s,\sigma))\,d\sigma\,ds \right| = 0$$

nach sich und zwar gleichmäßig für alle x, ξ des Quadrates $a-\alpha \leqq \overset{x}{\xi} \leqq b-\beta$.

Für die übrigen Glieder auf der rechten Seite von (7) ergibt sich

$$C|\lambda_n|^{1-(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}} + 2C^{\frac{1}{2}}|\lambda_n|^{\frac{-\frac{\gamma}{2(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}}}{}} + |\lambda_n|^{\frac{1}{(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}}-1}.$$

Da vorstehender Ausdruck mit wachsendem n gleichfalls der Null zustrebt, ist Satz 1 bewiesen.

Der die zu den Besselschen Funktionen und Legendreschen Polynomen gehörigen Kerne enthaltende Satz 2 kann jetzt leicht gefolgert werden:

Satz 2. *$K(x, \xi)$ sei höchstens in den Eckpunkten des Quadrates $a \leqq \overset{x}{\xi} \leqq b$ unstetig; ferner sei $\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x}$ im Innern der beiden Dreiecke, in welches jenes Quadrat durch die die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$ verbindende Diagonale zerlegt wird, stetig und bleibe bei beliebigem hinreichend kleinem α dem Betrage nach für $a + \alpha \leqq x \leqq b - \alpha$, $a \leqq \xi \leqq b$ unterhalb einer allenfalls von α abhängigen Konstanten. Dann konvergiert die Bilinearreihe in jedem im Innern des Definitionsbereiches enthaltenen Teilbereiche gleichmäßig und stellt den Kern dar.*

Zum Beweise hat man gemäß Satz 1 nur zu zeigen, daß für $a + \alpha \leqq x_1 < x_2 \leqq b - \alpha$

$$\int_a^b (K(x_2, u) - K(x_1, u))^2 du \leqq C(x_2 - x_1)^2 \qquad (C = C(\alpha))$$

gilt. In der Tat ist nach dem Rolleschen Theorem

$$\int_a^b (K(x_2, u) - K(x_1, u))^2 du = \int_a^{x_1} \left((x_2 - x_1)\frac{\partial K(\bar{x}(u), u)}{\partial x}\right)^2 du$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \left(K(x_2, x_1) + (u - x_1)\frac{\partial K(x_2, \bar{u})}{\partial u} - K(x_1, x_2) - (u - x_2)\frac{\partial K(x_1, \bar{\bar{u}})}{\partial u}\right)^2 du$$

$$+ \int_{x_2}^b \left((x_2 - x_1)\frac{\partial K(\bar{\bar{x}}(u), u)}{\partial x}\right)^2 du,$$

wo die überstrichenen Größen Mittelwerte bezeichnen. Ist nun für $a + \alpha \leqq x \leqq b - \alpha$ und $a \leqq \xi \leqq b$, wie angenommen $\left|\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x}\right| \leqq M = M(\alpha)$, so folgt auf Grund der Symmetrieeigenschaft von K, wenn $x \neq \xi$ ist,

$$\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} = \frac{\partial K(\xi, x)}{\partial x},$$

und insbesondere für $x_1 < u < x_2$

$$\left|\frac{\partial K(x_1, u)}{\partial u}\right| \leqq M, \qquad \left|\frac{\partial K(x_2, u)}{\partial u}\right| \leqq M.$$

Somit ergibt sich

$$\int_a^b (K(x_2, u) - K(x_1, u))^2 \, du$$

$$\leqq (b-a)(x_2 - x_1)^2 M^2 + 4(x_2 - x_1)^2 M^2 + (b-a)(x_2 - x_1)^2 M^2$$

$$\leqq C(\alpha)(x_2 - x_1)^2,$$

wie behauptet.

§ 2.

Ein Satz über die gliedweise Differenzierbarkeit der Bilinearreihe.

Satz 3. *Der Kern $K(x, \xi)$ sei im Innern des Quadrates $a \leqq \overset{x}{\xi} \leqq b$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen. Ist $a \leqq a + \alpha < b - \beta \leqq b$, so bleibe $\frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x}$ in dem Rechteck $a + \alpha \leqq x \leqq b - \beta$, $a \leqq \xi \leqq b$ beschränkt, und es gelte für $a + \alpha \leqq x_1 < x_2 \leqq b - \beta$*

$$(8) \qquad \int_a^b \left(\frac{\partial K(x_2, u)}{\partial x_2} - \frac{\partial K(x_1, u)}{\partial x_1} \right)^2 du \leqq C \cdot (x_2 - x_1)^2 \qquad (C = C(\alpha, \beta)).$$

Dann ist in dem durch $a + \alpha < \overset{x}{\xi} < b - \beta$ erklärten Quadrate Q_1

$$\frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu} \frac{d\varphi_\nu(x)}{dx}.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem inneren Teilbereiche von Q_1.

Beweis. Offenbar genügt es, den Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz für das Teilquadrat $a + \alpha_1 \leqq \overset{x}{\xi} \leqq b - \beta_1$ zu erbringen, wo α_1 und β_1 beliebige den Ungleichungen $a + \alpha < a + \alpha_1 < b - \beta_1 < b - \beta$ unterworfene Zahlen sind. l und k mögen den Bedingungen $0 < \frac{l}{k} < \frac{1}{2} \operatorname{Min}((\alpha_1 - \alpha), (\beta_1 - \beta))$ genügende Größen bedeuten. Es sei $a + \alpha_1 \leqq \overset{x}{\xi} \leqq b - \beta_1$. Man setze

$$\varphi(s; x, l) = \begin{cases} s - (x - l) & \text{für } x - l \leqq s < x, \\ -s + (x + l) & \text{für } x \leqq x + l, \\ 0 & \text{für die übrigen Werte von } s; \end{cases}$$

$$\psi(\sigma; \xi, k) = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi - k \leqq \sigma \leqq \xi + k, \\ 0 & \text{für die übrigen Werte von } \sigma, \end{cases}$$

und wende (1) mit $\psi(\sigma)$ und $\varphi'(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds}$ an. Dies ergibt

$$\int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l} K(s,\sigma)\varphi'(s)\psi(\sigma)\,ds\,d\sigma = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\lambda_\nu}\int_{x-l}^{x+l}\varphi_\nu(s)\varphi'(s)\,ds\int_{\xi-l}^{\xi+l}\varphi_\nu(\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma + R_n,$$

wobei

$$|R_n| \leqq \frac{1}{|\lambda_n|}\left\{\int_{x-l}^{x+l}\varphi'(s)^2\,ds\int_{\xi-k}^{x+k}\psi(\sigma)^2\,d\sigma\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{2}{|\lambda_n|}\sqrt{lk}$$

wird. Anwendung der Integration nach Teilen liefert

$$(9)\qquad -\int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}\frac{\partial K(s,\sigma)}{\partial s}\varphi(s)\psi(\sigma)\,ds\,d\sigma = -\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\lambda_\nu}\int_{x-l}^{x+l}\varphi_\nu'(s)\varphi(s)\,ds\int_{\xi-k}^{\xi+k}\varphi_\nu(\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma + R_n$$

Mit Benutzung der Abkürzungen

$$\frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x} = K'(x,\xi) \quad \text{und} \quad K_n'(x,\xi) = \frac{\partial K}{\partial x} - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\varphi_\nu'(x)\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}$$

findet sich in Rücksicht auf $\int_{x-l}^{x+l}\varphi(s)\,ds = l^2$ und (9)

$$2kl^2 K_n'(x,\xi) = \int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}(K_n'(x,\xi) - K_n'(s,\sigma))\varphi(s)\psi(\sigma)\,ds\,d\sigma - R_n.$$

Ganz wie in Abschnitt I folgt hieraus

$$2kl^2 K_n'(x,\xi) = \int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}(K'(x,\xi) - K'(s,\sigma))\varphi(s)\,ds$$

$$-\int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}\Big[\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\int_a^b(K'(x,u) - K'(s,u))\varphi_\nu(u)\,du$$

$$\times\int_a^b(K(\xi,u) - K(\sigma,u))\varphi_\nu(u)\,du\Big]\varphi(s)\cdot\psi(\sigma)\,ds\,d\sigma$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\int_{x-l}^{x+l}\varphi_\nu'(s)\varphi(s)\,ds\int_{\xi-k}^{\xi+k}\psi(\sigma)\int_a^b(K(\xi,u) - K(\sigma,u))\varphi_\nu(u)\,du\,d\sigma$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\xi-l}^{\xi+l}\varphi_\nu(\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma\int_{x-l}^{x+l}\varphi(s)\int_a^b(K'(x,u) - K'(s,u))\varphi_\nu(u)\,du\,ds - R_n.$$

Bei Beachtung von

$$\int_{x-l}^{x+l} \varphi_\nu'(s)\,\varphi(s)\,ds = -\int_{x-l}^{x+l} \varphi_\nu(s)\,\varphi'(s)\,ds = -\int_a^b \varphi_\nu(s)\,\varphi'(s)\,ds$$

ergibt die Anwendung der Schwarzschen und Besselschen Ungleichung

$$(10)\qquad \left|2kl^2K_n'(x,\xi) - \int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}(K'(x,\xi)-K'(s,\sigma))\,\varphi(s)\,ds\,d\sigma\right|$$

$$\leqq \int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}|\lambda_n|\left\{\int_a^b (K'(x,u)-K'(s,u))^2\,du\right.$$

$$\left.\times\int_a^b (K(\xi,u)-K(\sigma,u))^2\,du\right\}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)\,ds\,d\sigma$$

$$+\int_{\xi-k}^{\xi+k}\left\{\int_a^b \varphi'(s)^2\,ds\cdot\int_a^b (K(\xi,u)-K(\sigma,u))^2\,du\right\}^{\frac{1}{2}}d\sigma$$

$$+\int_{x-l}^{x+l}\varphi(s)\cdot\left\{\int_a^b \psi(\sigma)^2\,d\sigma\cdot\int_a^b (K\ (x,u)-K'(s,u))^2\,du\right\}^{\frac{1}{2}}ds + |R_n|.$$

Zufolge der Stetigkeit und Beschränktheit von $K'(x,u)$ für $a+\alpha \leqq x \leqq b-\beta$, $a<u<b$ ist nun

$$(11)\qquad \int_a^b (K(x_2,u)-K(x_1,u))^2\,du \leqq C_1(x_2-x_1)^2$$

$$(a+\alpha \leqq x_1 < x_2 \leqq b-\beta),$$

wo $C_1 = C_1(\alpha,\beta)$ eine Konstante bedeutet. Gemäß der Wahl von l und k kann (8) und (11) zur Abschätzung der rechten Seite von (10) angewandt werden, und man erhält als obere Schranke hierfür

$$|\lambda_n|\sqrt{CC_1}\int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}|(x-s)(\xi-\sigma)|\,\varphi(s)\,ds\,d\sigma + \sqrt{2lC_1}\int_{\xi-k}^{\xi+k}|\xi-\sigma|\,d\sigma$$

$$+\sqrt{2kC}\int_{x-l}^{x+l}|x-s|\,\varphi(s)\,ds + \frac{2}{|\lambda_n|}\sqrt{l\cdot k}$$

$$\leqq 4\sqrt{CC_1}\,|\lambda_n|\,k^2l^3 + 2\sqrt{2C_1}\,l^{\frac{1}{2}}k^2 + 2\sqrt{2C}\,k^{\frac{1}{2}}l^3 + \frac{2}{|\lambda_n|}l^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man jetzt, was für hinreichend große Werte von n statthaft ist, $l = |\lambda_n|^{-\frac{4}{10}}$, $k = |\lambda_n|^{-\frac{7}{10}}$, so folgt, wenn C_2 eine Konstante bezeichnet,

$$|K_n'(x,\xi)| \leqq \frac{1}{2kl^2}\left|\int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}(K'(x,\xi)-K'(s,\sigma))\,\varphi(s)\,ds\,d\sigma\right| + C_2|\lambda_n|^{-\frac{1}{20}}.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung, da $K'(x,\xi)$ in dem abgeschlossenen Quadrat $a+\alpha \leqq \frac{x}{\xi} \leqq b-\beta$ stetig ist.

III.

Die Bilinearreihe des Kerns in mehreren Dimensionen.

§ 3.

Die Funktion $H(r)$.

In den folgenden Paragraphen werden auf ebene Probleme bezügliche Fragen behandelt. Im Raume verlaufen die Untersuchungen im wesentlichen analog; die nötigen Modifikationen werden in § 8 angegeben.

Für das nicht zusammenfallende Punktepaar ξ, η und s, t und beliebiges $\varrho > 0$ sei eine Funktion $H_\varrho(\xi, \eta; s, t)$ wie folgt erklärt:

$$H_\varrho(\xi, \eta; s, t) = H(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log\frac{r}{\varrho} + \frac{r^2}{4\pi\varrho^2} - \frac{1}{4\pi} & \text{für } r \leqq \varrho, \\ 0 & \text{für } r \geqq \varrho \end{cases}$$

$$(r = \sqrt{(s-\xi)^2 + (t-\eta)^2}).$$

Dann ist, wie leicht zu sehen, $H(\varrho) = 0$, $\frac{dH(\varrho)}{dr} = 0$ und

$$\Delta_{s,t} H(r) = \frac{\partial^2 H}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \begin{cases} \frac{1}{\pi\varrho^2} & \text{für } r < \varrho, \\ 0 & \text{für } r > \varrho. \end{cases} \tag{12}$$

Für $0 < r \leqq \varrho$ gilt die Abschätzung

$$0 \leqq H(r) \leqq -\frac{1}{2\pi}\log\frac{r}{\varrho}.$$

Bezeichnet $\varkappa_1$ den Kreis mit dem Radius ϱ um ξ, η als Mittelpunkt, so wird

$$\iint_{\varkappa_1} H(r)^2\, ds\, dt = 2\pi \int_0^\varrho H(r)^2 r\, dr \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^\varrho \left(\log\frac{r}{\varrho}\right)^2 r\, dr = \frac{1}{8\pi}\varrho^2, \tag{13}$$

wie sich durch Integration nach Teilen ergibt.

§ 4.

Die Bilinearreihe für den zweimal differenzierbaren Kern.

Satz 4. *Im Grundgebiete B besitze der Kern $K(x, y; \xi, \eta)$ stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Dann ist*

$$K(x, y; \xi, \eta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x, y) \cdot \varphi_\nu(\xi, \eta)}{\lambda_\nu},$$

wo die Reihe für alle auf einen beliebigen im Innern von B enthaltenen Teilbereich B_1 beschränkten Punkte x, y und ξ, η gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Unter ϱ werde eine positive Zahl verstanden, die kleiner ist als der Minimalabstand zwischen dem Rande von B einerseits und B_1 andererseits. Die Punkte x, y und ξ, η mögen dem Bereiche B_1 angehören. Um jeden derselben als Mittelpunkt schlage man einen Kreis $\varkappa_x$ bzw. $\varkappa_\xi$ mit dem Radius ϱ. Diese Kreise gehören B ganz an. Anwendung der Greenschen Formel auf K und die Funktion H des vorigen Paragraphen liefert bei Berücksichtigung der logarithmischen Unstetigkeit von H für beliebiges u, v in B

$$\iint_B (K(s,t;u,v)\,\Delta_{s,t} H_\varrho(x,y;s,t) - H_\varrho(x,y;s,t)\,\Delta_{s,t} K(s,t;u,v))\,ds\,dt = K(x,y;u,v).$$

Daraus folgt gemäß (12)

$$\frac{1}{\pi\varrho^2}\iint_{\varkappa_x} (K(x,y;u,v) - K(s,t;u,v))\,ds\,dt = -\iint_{\varkappa_x} H_\varrho(x,y;s,t)\,\Delta_{s,t} K(s,t;u,v)\,ds\,dt,$$

und des weiteren, wenn die stetige Funktion $\Delta_{s,t} K(s,t;u,v) = L(s,t;u,v)$ gesetzt wird,

$$\iint_B \iint_{\varkappa_x} (K(x,y;u,v) - K(s,t;u,v))\,\varphi_\nu(u,v)\,ds\,dt\,du\,dv = -\pi\varrho^2 \iint_B \iint_{\varkappa_x} H_\varrho(x,y;s,t)\,L(s,t;u,v)\,\varphi_\nu(u,v)\,ds\,dt\,du\,dv.$$

Eine analoge Formel entsteht durch Vertauschung des Punktes x, y mit ξ, η und des Integrationsgebietes $\varkappa_x$ mit $\varkappa_\xi$.

Mit diesen Werten ergibt die Restabschätzung (5) des Abschnittes I:

$$K_n(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{\pi^2\varrho^4}\iint_{\varkappa_x}\iint_{\varkappa_\xi} (K(x,y;\xi,\eta) - K(s,t;\sigma,\tau))\,d\sigma\,d\tau\,ds\,dt$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \iint_B \Big(\iint_{\varkappa_x} HL\,ds\,dt\Big)\varphi_\nu(u,v)\,du\,dv \cdot \iint_B \Big(\iint_{\varkappa_\xi} HL\,d\sigma\,d\tau\Big)\varphi_\nu(u,v)\,du\,dv$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\pi\varrho^2} \iint_{\varkappa_x} \varphi_\nu(s,t)\,ds\,dt \iint_B \Big(\iint_{\varkappa_\xi} HL\,d\sigma\,d\tau\Big)\varphi_\nu(u,v)\,du\,dv$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\pi\varrho^2} \iint_{\varkappa_\xi} \varphi_\nu(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau \iint_B \Big(\iint_{\varkappa_x} HL\,ds\,dt\Big)\varphi_\nu(u,v)\,du\,dv + \frac{R_n}{\pi^2\varrho^4},$$

$$|R_n| \leqq \frac{\pi\varrho^2}{|\lambda_n|}.$$

Hieraus folgt nach der Schwarzschen und Besselschen Ungleichung

$$|K_n(x,y;\xi,\eta)| \leqq \frac{1}{\pi^2\varrho^4}\left|\iint_{\varkappa_x}\iint_{\varkappa_\xi}(K(x,y;\xi,\eta)-K(s,t;\sigma,\tau))\,d\sigma\,d\tau\,ds\,dt\right|$$

$$+|\lambda_n|\left\{\iint_B\left(\iint_{\varkappa_x}HL\,ds\,dt\right)^2du\,dv\iint_B\left(\iint_{\varkappa_\xi}HL\,d\sigma\,d\tau\right)^2du\,dv\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1}{\pi\varrho^2}\left\{\pi\varrho^2\iint_B\left(\iint_{\varkappa_\xi}HL\,d\sigma\,d\tau\right)^2du\,dv\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1}{\pi\varrho^2}\left\{\pi\varrho^2\iint_B\left(\iint_{\varkappa_x}HL\,ds\,dt\right)^2du\,dv\right\}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{|\lambda_n|\pi\varrho^2}.$$

Nun ist aber gemäß (13), wenn $8M$ das Maximum von L^2 in B bezeichnet,

$$\left(\iint_{\varkappa_x}HL\,ds\,dt\right)^2\leqq\iint_{\varkappa_x}H^2\,ds\,dt\iint_{\varkappa_x}L^2\,ds\,dt\ \leqq\frac{1}{8\pi}\varrho^2\cdot 8M\pi\varrho^2=M\varrho^4.$$

Wird noch unter B^* der Flächeninhalt von B verstanden, so ergibt sich

$$|K_n(x,y;\xi,\eta)|\leqq\frac{1}{\pi^2\varrho^4}\left|\iint_{\varkappa_x}\iint_{\varkappa_\xi}(K(x,y;\xi,\eta)-K(s,t;\sigma,\tau))\,d\sigma\,d\tau\,ds\,dt\right|$$

$$+|\lambda_n|B^*M\varrho^4+2\left(\frac{B^*M}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\varrho+\frac{1}{|\lambda_n|\pi\varrho^2}.$$

Setzt man endlich $\varrho=|\lambda_n|^{-\frac{1}{3}}$, was für hinreichend große Werte von n zulässig ist, so verbleiben die letzten drei Glieder auf der rechten Seite der vorigen Ungleichung unter konst.$\cdot|\lambda_n|^{-\frac{1}{3}}$. Hieraus und aus der Stetigkeit von $K(x,y;\xi,\eta)$ folgt die gleichmäßige Konvergenz der Bilinearreihe in dem behaupteten Sinne.

§ 5.

Die Beschränktheit der Partialsummen der Bilinearreihe einer Greenschen Funktion.

Satz 5. *$K(x,y;\xi,\eta)$ besitze folgende drei Eigenschaften einer Greenschen Funktion: Erstens habe K für jedes im Innern des Grundgebietes B gelegene Paar verschiedener Punkte x,y und ξ,η die Gestalt*

$$\frac{-1}{2\pi}\log r+\gamma(x,y;\xi,\eta)\qquad(r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}),$$

wobei γ mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehen ist. Zweitens gelte in B

$$\Delta_{\xi,\eta}K(x,y;\xi,\eta)=0.$$

Drittens sei K symmetrisch. — Randbedingungen sind für K nicht gefordert.

Ist d eine hinreichend kleine positive Größe, so gibt es eine von $x, y; \xi, \eta$ unabhängige ganze Zahl $m = m(d)$, so daß für $n \geqq m$

$$\left| K(x, y; \xi, \eta) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu(x, y)\, \varphi_\nu(\xi, \eta)}{\lambda_\nu} \right| \leqq 1$$

ausfällt, und zwar für alle Punkte x, y und ξ, η, die voneinander und vom Rande des Grundgebietes B keinen kleineren Abstand als d haben.

Beweis. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen der vorangehenden Paragraphen ergibt die Anwendung der Greenschen Formel für zwei verschiedene innere Punkte x, y und ξ, η, deren Abstand vom Rande höchstens d beträgt, mit $\varrho \leqq d$

$$(14)\quad \iint_B (K(x, y; \sigma, \tau)\, \Delta_{\sigma,\tau} H_\varrho(\xi, \eta; \sigma, \tau) - H_\varrho(\xi, \eta; \sigma, \tau)\, \Delta_{\sigma,\tau} K(x, y; \sigma, \tau))\, d\sigma\, d\tau = K(x, y; \xi, \eta) - H_\varrho(\xi, \eta; x, y).$$

Hieraus und aus (12) erhält man zufolge $\Delta K = 0$

$$\frac{1}{\pi \varrho^2} \iint_{\varkappa_x} (K(x, y; \xi, \eta) - K(x, y; \sigma, \tau))\, d\sigma\, d\tau = H_\varrho(\xi, \eta; x, y),$$

$$\frac{1}{\pi \varrho^2} \iint_B \iint_{\varkappa_\xi} (K(\xi, \eta; u, v) - K(\sigma, \tau; u, v))\, \varphi_\nu(u, v)\, d\sigma\, d\tau\, du\, dv = \iint_{\varkappa_\xi} H_\varrho(\xi, \eta; u, v)\, \varphi_\nu(u, v)\, du\, dv.$$

Somit kann die Gleichung (5) des Abschnittes I folgendermaßen geschrieben werden:

$$K_n(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\pi^2 \varrho^4} \iint_{\varkappa_x} \iint_{\varkappa_\xi} (K(x, y; \xi, \eta) - K(s, t; \sigma, \tau))\, d\sigma\, d\tau\, ds\, dt$$

$$- \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \iint_{\varkappa_x} H_\varrho(x, y; u, v)\, \varphi_\nu(u, v)\, du\, dv \cdot \iint_{\varkappa_\xi} H_\varrho(\xi, \eta; u, v)\, \varphi_\nu(u, v)\, du\, dv$$

$$- \frac{1}{\pi \varrho^2} \sum_{\nu=1}^{n} \iint_{\varkappa_x} \varphi_\nu(s, t)\, ds\, dt \cdot \iint_{\varkappa_\xi} H \varphi_\nu\, du\, dv$$

$$- \frac{1}{\pi \varrho^2} \sum_{\nu=1}^{n} \iint_{\varkappa_\xi} \varphi_\nu(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau \iint_{\varkappa_x} H \varphi_\nu\, du\, dv + \frac{R_n}{\pi^2 \varrho^4} \qquad \left(|R_n| \leqq \frac{\pi \varrho^2}{|\lambda_n|} \right).$$

Haben nun die Punkte x, y und ξ, η vom Rande und voneinander keiner kleineren Abstand als d, so kann ein $\varrho_0 = \varrho_0(d) \leqq \frac{d}{2}$ derart be-

stimmt werden, daß, falls $\varrho \leqq \varrho_0$ gewählt wird, für alle s, t im Kreise $\varkappa_x$ und σ, τ im Kreise $\varkappa_\xi$

$$|K(x, y; \xi, \eta) - K(s, t; \sigma, \tau)| \leqq \frac{1}{\pi}$$

ausfällt, da ja die Funktion $K(x, y; \xi, \eta)$ in dem fraglichen Bereich stetig ist. Infolgedessen ergibt sich, wenn wieder die Schwarzsche und Besselsche Ungleichung herangezogen wird,

$$|K_n(x, y; \xi, \eta)| \leqq \frac{1}{\pi} + |\lambda_n| \left\{ \iint\limits_{\varkappa_x} H^2 \, du \, dv \cdot \iint\limits_{\varkappa_\xi} H^2 \, du \, dv \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{\pi \varrho^2} \left\{ \pi \varrho^2 \iint\limits_{\varkappa_\xi} H^2 \, du \, dv \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi \varrho^2} \left\{ \pi \varrho^2 \iint\limits_{\varkappa_x} H^2 \, du \, dv \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{|\lambda_n| \pi \varrho^2}$$

und nach (13)

$$|K_n(x, y; \xi, \eta)| \leqq \frac{1}{\pi} + |\lambda_n| \frac{1}{8\pi} \varrho^2 + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} + \frac{1}{\pi |\lambda_n| \varrho^2}.$$

Schließlich werde $m = m(d)$ so groß gewählt, daß $|\lambda_m|^{-\frac{1}{2}} \leqq \frac{d}{2}$ ausfällt. Dann kann für $n \geqq m$ in der vorstehenden Ungleichung $\varrho = |\lambda_n|^{-\frac{1}{2}}$ gesetzt werden, woraus, wie behauptet,

$$|K_n(x, y; \xi, \eta)| \leqq \frac{1}{\pi} + \frac{1}{8\pi} + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} + \frac{1}{\pi} < 1$$

folgt.

IV.

Die mit konvergenzverbessernden Faktoren versehene Bilinearreihe.

§ 6.

Die Entwickelung der Greenschen Funktion.

Die in den folgenden Abschnitten zur Verwendung kommenden Beweismethoden sind von den bisherigen verschieden. Auch wird von den gewonnenen Ergebnissen kein Gebrauch gemacht. Nur die Definitionen und Bezeichnungen sind aus dem Vorangehenden übernommen.

Satz 6. *$K(x, y; \xi, \eta)$ sei ein Kern von der in Satz 5 geforderten Art, welcher überdies nur positive Eigenwerte besitze. Der Punkt ξ, η sei auf einen inneren abgeschlossenen Teilbereich B_1 von B beschränkt; g bedeute eine positive ganze Zahl. Unter ϱ werde eine den Ungleichungen $0 < \varrho < 1$ genügende Größe verstanden, die so klein gewählt sei, daß*

der Kreis $\varkappa_g$ mit dem Radius $g\cdot\varrho$ um ξ,η als Mittelpunkt dem Bereich B für jedes ξ,η in B_1 ganz angehört. Setzt man

$$a_\nu = \frac{2}{\varrho\sqrt{\lambda_\nu}} J_1(\varrho\sqrt{\lambda_\nu}),$$

unter J_1 die Besselsche Funktion 1. Art verstanden, so ist für

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \geqq (g\varrho)^2$$

$$K(x,y;\xi,\eta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x,y)\,\varphi_\nu(\xi,\eta)}{\lambda_\nu},$$

wobei die Reihe für alle x,y in B und alle ξ,η in B_1 gleichmäßig und absolut konvergiert. Zufolge der Symmetrie können die Punkte x,y und ξ,η ihre Rollen vertauschen.

Beweis. Der Satz soll zunächst mit $g=1$ bewiesen werden[7]).

Aus (14) erhält man[8]) wegen $\Delta K = 0$ für alle von ξ,η verschiedenen x,y in B nach dem bekannten Entwickelungssatz aus der Theorie der Integralgleichungen

$$(15)\quad K(x,y;\xi,\eta) - H_\varrho(\xi,\eta;x,y) = \iint_B K(x,y;\sigma,\tau)\,\Delta_{\sigma,\tau} H_\varrho(\xi,\eta;\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \iint_B \Delta_{\sigma,\tau} H_\varrho(\xi,\eta;\sigma,\tau)\,\varphi_\nu(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau.$$

Der Rest der Reihe wird nach der Schwarzschen und Besselschen Ungleichung durch

$$\sum_{\nu=n}^{n+p} \left|\frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}\right| \cdot \left|\iint_B \Delta_{\sigma,\tau} H\cdot\varphi_\nu\,d\sigma\,d\tau\right| \leqq \left\{\sum_{\nu=n}^{n+p}\left(\frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}\right)^2 \cdot \iint_B (\Delta_{\sigma,\tau} H)^2\,d\sigma\,d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}$$

---

[7]) In der Arbeit des Verfassers „Über die Entwickelung eines logarithmisch unstetigen Kerns nach seinen Eigenfunktionen" (Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Klasse vom 10. Dez. 1925) findet sich ein Beweis dieses Spezialfalles, welcher der Vollständigkeit halber hier nochmals wiedergegeben sei.

[8]) Für einen Leser, der sich nur für den Beweis des Satzes 6 interessiert, sei bemerkt, daß hierzu die Einführung der Funktion H unnötig ist. Die Beziehung (16), aus der alles weitere folgt, kann nämlich bereits aus dem Umstand gewonnen werden, daß $K(x,y;\sigma,\tau)$ in jedem den Punkt x,y nicht enthaltenden Teilbereiche von B reguläre Potentialfunktion von σ,τ ist, und also für $(x-\xi)^2-(y-\eta)^2>\varrho^2$ die Darstellung $K(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(x,y;\sigma(r,\vartheta),\tau(r,\vartheta))\,d\vartheta$ gilt, wobei das Integral über die Berandung eines Kreises mit dem Radius $r\leqq\varrho$ um ξ,η als Mittelpunkt zu erstrecken ist. Durch Multiplikation mit r und Integration nach r zwischen den Grenzen 0 und ϱ ergibt sich dann (16). Aus Stetigkeitsgründen gilt diese Relation auch noch auf dem Rande von $\varkappa_1$. Die Darstellung des Textes zeigt darüber hinaus, welchen Wert die Reihe der Behauptung im Kreise $\varkappa_1$ annimmt.

abgeschätzt. Da gemäß (12) $\iint_B (\Delta_{\sigma,\tau} H)^2 \, d\sigma \, d\tau = \frac{1}{\pi \varrho^2}$ ist, zieht die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}\right)^2$ in x, y die der ursprünglichen Reihe in dem behaupteten Sinne nach sich.

Es ist also nach (12) und (15)

$$K(x,y;\xi,\eta) - H(\xi,\eta;x,y) = \frac{1}{\pi\varrho^2} \iint_{\varkappa_1} K(x,y;\sigma,\tau)\, d\sigma\, d\tau$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \frac{1}{\pi\varrho^2} \iint_{\varkappa_1} \varphi_\nu(\sigma,\tau)\, d\sigma\, d\tau .$$

Insbesondere für $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \geqq \varrho^2$ folgt hieraus

$$(16) \qquad K(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{\pi\varrho^2} \iint_{\varkappa_1} K(x,y;\sigma,\tau)\, d\sigma\, d\tau$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \frac{1}{\pi\varrho^2} \iint_{\varkappa_1} \varphi_\nu(\sigma,\tau)\, d\sigma\, d\tau .$$

Setzt man nun $K(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi} \log r + \gamma(x,y;\xi,\eta)$, so ist $\gamma(x,y;\xi,\eta)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die der Gleichung $\Delta\gamma = 0$ genügt, und die Integralgleichung für φ_ν lautet sodann

$$\varphi_\nu(\xi,\eta) = -\frac{\lambda_\nu}{2\pi} \iint_B \log r\, \varphi_\nu(\sigma,\tau)\, d\sigma\, d\tau + \lambda_\nu \iint_B \gamma(\xi,\eta;\sigma,\tau)\, \varphi_\nu(\sigma,\tau)\, d\sigma\, d\tau .$$

Bildet man auf beiden Seiten die Δ-Ableitung, so findet sich in bekannter Weise

$$\Delta\, \varphi_\nu(\xi,\eta) + \lambda_\nu \varphi_\nu(\xi,\eta) = 0 .$$

Zufolge $\lambda_\nu > 0$ kann mit beliebigem positivem $R < \varrho$ der Webersche Mittelwertsatz angewandt werden[9]); dieser ergibt, wenn $\tilde{\varphi}_\nu(R,\vartheta)$ die aus φ_ν durch Einführung von Polarkoordinaten R, ϑ um ξ, η als Anfangspunkt entstehende Funktion bezeichnet und unter J_0 die Besselsche Funktion verstanden wird:

$$\varphi_\nu(\xi,\eta)\, J_0(\sqrt{\lambda_\nu}\cdot R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}_\nu(R,\vartheta)\, d\vartheta .$$

Hieraus folgt

$$\varphi_\nu(\xi,\eta) \int_0^{\varrho} J_0(\sqrt{\lambda_\nu}\cdot R)\, R\, dR = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varrho} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}_\nu(R,\vartheta)\, R\, d\vartheta\, dR .$$

---

[9]) Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen, Math. Annalen 1, S. 1.

Geht man auf der rechten Seite wieder zu rechtwinkligen Koordinaten über, und macht in dem Integral auf der linken die Substitution $\sqrt{\lambda}\cdot R = z$, so liefert dies

$$\varphi_\nu(\xi,\eta)\frac{2\pi}{\lambda_\nu}\int_0^{\varrho\sqrt{\lambda_\nu}} J_0(z)\,z\,dz = \iint_{\varkappa_1}\varphi_\nu(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau.$$

Gemäß der Relation[10]) $z J_0(z) = \frac{d}{dz}(z J_1(z))$ folgt:

$$\iint_{\varkappa_1}\varphi_\nu(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau = \varphi_\nu(\xi,\eta)\frac{2\pi\varrho}{\sqrt{\lambda_\nu}}J_1(\varrho\cdot\sqrt{\lambda_\nu}),$$

$$\frac{1}{\pi\varrho^2}\iint_{\varkappa_1}\varphi_\nu(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau = \varphi_\nu(\xi,\eta)\frac{2}{\varrho\sqrt{\lambda_\nu}}J_1(\varrho\cdot\sqrt{\lambda_\nu}), \tag{17}$$

$$= a_\nu\varphi_\nu(\xi,\eta).$$

Einsetzen in (16) ergibt die Behauptung für den Fall $g=1$. Aus bekannten Eigenschaften der Besselschen Funktionen erschließt man sofort $\lim_{\varrho\to 0} a_\nu(\varrho) = 1$ und $|a_\nu(\varrho)| \leqq c(\varrho)\frac{1}{\lambda_\nu^{\frac{3}{4}}}$, wo c eine nur von ϱ abhängige Konstante bedeutet.

Für beliebiges g wird der Beweis durch Induktion geführt. Sei also der Satz für $g-1$ richtig. Um ξ,η werde der Kreis $\varkappa_g$ mit dem Radius $g\cdot\varrho$ geschlagen. Der Nachweis ist für nicht in seinem Innern gelegenes x,y zu führen. Sämtliche Punkte σ,τ des Kreises $\varkappa_1$ gehören dann einem Bereich an, der von der Berandung von B keinen kleineren Abstand als $(g-1)\varrho$ hat, und für sie gilt $(x-\sigma)^2+(y-\tau)^2 \geqq (g-1)^2\varrho^2$. Infolgedessen kann in (16) für $K(x,y;\sigma,\tau)$ die Reihenentwickelung mit $g-1$ eingesetzt werden:

$$K(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{\pi\varrho^2}\iint_{\varkappa_1}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{g-1}\frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}\varphi_\nu(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{g-1}\frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}\frac{1}{\pi\varrho^2}\iint_{\varkappa_1}\varphi_\nu(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau.$$

Gemäß (17) folgt hieraus die Behauptung für jedes g.

§ 7.

Die Bilinearreihen für die ersten Ableitungen der Greenschen Funktion.

In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, daß die mit den konvergenzverbessernden Faktoren versehene Bilinearreihe für $g \geqq 2$ gliedweise differenziert werden darf.

---

[10]) Z. B. Watson, Theory of Bessel Functions, S. 18.

Satz 7. *$K(x,y;\xi,\eta)$ bedeute einen Kern der in Satz 6 gekennzeichneten Art. Der Punkt ξ,η werde auf einen inneren abgeschlossenen Teilbereich B_1 von B beschränkt. g sei eine ganze Zahl, die größer als 1 ist. Wird ϱ so klein gewählt, daß $g\cdot\varrho$ den Minimalabstand des Bereiches B_1 von der Berandung von B nicht übersteigt, dann gilt für alle x,y in B mit $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \geqq (g\varrho)^2$*

$$\frac{\partial K(x,y;\xi,\eta)}{\partial \xi} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_\nu(\xi,\eta),$$

$$\frac{\partial K(x,y;\xi,\eta)}{\partial \eta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi_\nu(\xi,\eta).$$

Die Reihen konvergieren gleichmäßig und absolut für alle x,y in B und alle ξ,η in B_1.

Beweis. Offenbar genügt der Nachweis für die Richtigkeit der zweiten Gleichung. Hierzu gehe man von der Relation (16) aus:

$$K(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{\pi\varrho^2} \int_{\xi-\varrho}^{\xi+\varrho} \int_{\eta-w}^{\eta+w} K(x,y;\sigma,\tau)\, d\tau\, d\sigma \qquad \left(w = +\sqrt{\varrho^2-(\xi-\sigma)^2}\right),$$

$$\frac{\partial K(x,y;\xi,\eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{\pi\varrho^2} \int_{\xi-\varrho}^{\xi+\varrho} \big(K(x,y;\sigma,(\eta+w)) - K(x,y;\sigma,(\eta-w))\big)\, d\sigma.$$

Die Punkte $\sigma, \eta+w$ und $\sigma,\eta-w$ liegen auf dem Kreise mit dem Radius ϱ um ξ,η, und haben infolgedessen vom Rande von B und von x,y keinen größeren Abstand als $(g-1)\varrho$. Demgemäß kann für K die Entwicklung aus Satz 6 mit $g-1$ eingeführt werden, die absolut und in σ gleichmäßig konvergiert:

$$\frac{\partial K(x,y;\xi,\eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{\pi\varrho^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{g-1} \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \int_{\xi-\varrho}^{\xi+\varrho} (\varphi_\nu(\sigma,\eta+w) - \varphi_\nu(\sigma,\eta-w))\, d\sigma$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{g-1} \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\pi\varrho^2} \int_{\xi-\varrho}^{\xi+\varrho} \int_{\eta-w}^{\eta+w} \varphi_\nu(\sigma,\tau)\, d\sigma\, d\tau.$$

In Rücksicht auf (17) ist dies die Reihe der Behauptung.

Die Aussage des Satzes 7 ist in x,y und ξ,η nicht mehr symmetrisch, da die Differentiation nach ξ bzw. η ausgeführt wird und der Punkt ξ,η auf B_1 beschränkt bleiben muß, während x,y in B variieren kann. Daß auch umgekehrt ξ,η den ganzen Wertevorrat von B durchlaufen kann, falls der Punkt x,y B_1 nicht verläßt, soll unter weiteren Einschränkungen über K bewiesen werden. Hierzu wird eine Abschätzung der Greenschen

Funktion benötigt, die im Falle eines mit einer analytischen Randkurve versehenen Bereiches bereits durch Poincaré bekannt ist.

Hilfssatz 1. *Der einfach zusammenhängende Bereich B der schlichten Ebene besitze eine Berandung, die sich aus einer endlichen Anzahl von analytischen Kurvenstücken zusammensetzt*[11]). *Die Winkel, unter denen zwei derselben zusammenstoßen, sollen größer als 0 und höchstens π sein, d. h. es seien keine Spitzen und einspringende Ecken vorhanden. $G(x,y;\xi,\eta)$ bezeichne die zu B gehörige auf dem Rande verschwindende Greensche Funktion. Dann existiert eine von $x, y; \xi, \eta$ unabhängige Konstante a, so daß für alle inneren Punkte x, y und ξ, η des Bereiches*

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| \leqq \frac{a}{r}, \qquad \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| \leqq \frac{a}{r} \qquad \left(r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)$$

ausfällt.

Beweis. Man setze $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ und verstehe unter $w = f(z)$ eine solche Funktion, die den Bereich B der z-Ebene konform auf den Einheitskreis der w-Ebene abbildet. Dann ist bekanntlich, wenn noch die Abkürzung $f(\zeta) = \omega$ eingeführt wird,

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{-1}{2\pi}\Re \log \frac{f(z)-f(\xi)}{1-f(z)\bar{f}(\xi)}$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\Re \log \frac{w-\omega}{1-w\bar{\omega}},$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\Re\left[\frac{f'(z)}{w-\omega}\left(1+\bar{\omega}\frac{w-\omega}{1-w\bar{\omega}}\right)\right],$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{2\pi}\Im\left[\frac{f'(z)}{w-\omega}\left(1+\bar{\omega}\frac{w-\omega}{1-w\bar{\omega}}\right)\right]$$

und

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{z-\zeta}\right|\left|\frac{f'(z)(z-\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}\right|\cdot\left|1+\bar{\omega}\frac{w-\omega}{1-w\bar{\omega}}\right|.$$

Dieselbe Abschätzung gilt für $\left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|$. Zufolge $|w| \leqq 1$ und $|\omega| \leqq 1$ ist, da ja $\frac{w-\omega}{w\bar{\omega}-1}$ eine Abbildung des Einheitskreises in sich darstellt, $\left|1+\bar{\omega}\frac{w-\omega}{1-w\bar{\omega}}\right| \leqq 2$. Somit genügt es, die Existenz einer von z und ζ unabhängigen Konstanten β mit der Eigenschaft nachzuweisen, daß für alle inneren Punkte z und ζ von B

$$\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{f'(z)(z-\zeta)}\right| \geqq \beta \tag{18}$$

[11]) Diese Kurvenstücke sind dabei auch noch in den Eckpunkten, in denen zwei derselben zusammenstoßen, als analytisch vorausgesetzt.

ausfällt. Zu diesem Zwecke betrachte man

$$F(z,\zeta)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(\zeta)}{f'(z)\,(z-\zeta)} & \text{für } z\neq\zeta,\\ 1 & \text{für } z=\zeta\end{cases}$$

als Funktion der beiden Veränderlichen z und ζ. Dieselbe ist für alle z und ζ in B nebst Rand mit Ausschluß der Ecken stetig und von Null verschieden, da bekanntlich $f(z)$ auch noch auf dem Rande, abgesehen von den Ecken, analytisch ist und daselbst $f'(z)\neq 0$ gilt. Wäre nun die Annahme (18) nicht richtig, so müßte es zwei Folgen, z_ν und ζ_ν, geben, die sich in einer Ecke häufen, und für welche $F(z_\nu,\zeta_\nu)$ gegen 0 strebt. Es bleibt demnach nur zu zeigen, daß dies nicht möglich ist. Ohne Beschränkung kann hierbei die Ecke als im Nullpunkt gelegen angenommen werden, d. h. $z_\nu\to 0$, $\zeta_\nu\to 0$.

Zunächst wird folgendes Lemma über die Funktion F nachgewiesen: Sind z_ν und ζ_ν zwei in B gelegene Punktfolgen, für die $z_\nu\to 0$, $\zeta_\nu\to 0$ sowie $\left|\dfrac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right|<1$ gilt, so gibt es hierzu eine positive Konstante β_1, so daß für alle ν von einer Stelle an

$$|F(z_\nu,\zeta_\nu)|\geqq\beta_1$$

ausfällt.

Zum Beweise sei der von den beiden die Ecke bildenden Kurvenstücken eingeschlossene Winkel mit $\alpha\pi$ bezeichnet $(0<\alpha<1)$. Nach Lichtenstein[12]) gestattet dann $f'(z)$ in der Umgebung des Nullpunktes die Darstellung

$$f'(z)=z^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot f_1(z), \tag{19}$$

wobei f_1 eine stetige, für $z=0$ nicht verschwindende Funktion bedeutet und $z^{\frac{1}{\alpha}-1}$, $z=|z|e^{i\psi}$ $(0\leqq\psi<2\pi)$ gesetzt, den Wert $|z|^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{i\psi\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}$ hat. $F(z_\nu,\zeta_\nu)$ kann nunmehr in die Gestalt gebracht werden:

$$\begin{aligned}F(z_\nu,\zeta_\nu)&=\frac{1}{(z_\nu-\zeta_\nu)f'(z_\nu)}\int_{\zeta_\nu}^{z_\nu}f'(\sigma)\,d\sigma\\ &=\frac{1}{(z_\nu-\zeta_\nu)z_\nu^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_{\zeta_\nu}^{z_\nu}\sigma^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{f_1(\sigma)}{f_1(z_\nu)}\,d\sigma.\end{aligned} \tag{20}$$

Dabei sei der Integrationsweg nach folgender Vorschrift gewählt: Man

[12]) Über die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken, Journal f. d. Mathematik 140.

schreite längs der geradlinigen Verbindungslinie von ζ_ν nach z_ν fort, soweit diese in B verläuft; verläßt sie B, so gehe man längs der Randlinie bis zu ihrem Wiedereintritt weiter. Da die beiden Stücke der Berandung als analytische Bögen vorausgesetzt sind, und zwar auch noch über die Ecke hinaus, existiert eine von ν unabhängige Konstante γ derart, daß die Länge des Integrationsweges die Größe $\gamma|z_\nu-\zeta_\nu|$ nicht übertrifft. Aus demselben Grunde und wegen $|\zeta_\nu|<|z_\nu|$ ist für hinreichend großes ν auf dem ganzen Integrationswege $|o|\leqq|z_\nu|$. Aus (20) erhält man

$$(21)\quad F(z_\nu,\zeta_\nu)=\frac{1}{(z_\nu-\zeta_\nu)\,z_\nu^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_{\zeta_\nu}^{z_\nu}\sigma^{\frac{1}{\alpha}-1}d\sigma+\frac{1}{z_\nu-\zeta_\nu}\int_{\zeta_\nu}^{z_\nu}\left(\frac{\sigma}{z_\nu}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\left(\frac{f_1(\sigma)}{f_1(z_\nu)}-1\right)d\sigma$$

Der zweite Posten wird dem Betrage nach gemäß dem soeben Bemerkten durch

$$\frac{1}{|z_\nu-\zeta_\nu|}\gamma|z_\nu-\zeta_\nu|\,\mathrm{Max}\left|\frac{f_1(\sigma)}{f_1(z_\nu)}-1\right|$$

abgeschätzt, wo das Maximum auf dem Integrationswege zu nehmen ist. Dieser Ausdruck strebt wegen der Stetigkeit von $f_1(z)$ und $f_1(0)\neq 0$ mit wachsenden ν gegen 0, denn mit z_ν und ζ_ν rücken sämtliche Punkte des Integrationsweges in den Nullpunkt hinein.

Es muß also nur noch dargetan werden, daß der Absolutwert des ersten Postens in (21) über einer festen Zahl verbleibt. Derselbe hat, $z_\nu=|z_\nu|e^{i\Psi_\nu}$, $\zeta_\nu=|\zeta_\nu|e^{iX_\nu}$ gesetzt, den Wert

$$\alpha\frac{|z_\nu|^{\frac{1}{\alpha}}e^{i\frac{\Psi_\nu}{\alpha}}-|\zeta_\nu|^{\frac{1}{\alpha}}e^{i\frac{X_\nu}{\alpha}}}{(|z_\nu|e^{i\Psi_\nu}-|\zeta_\nu|e^{iX_\nu})\,|z_\nu|^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{i\Psi_\nu\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}}=\alpha\frac{1-\left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right|^{\frac{1}{\alpha}}e^{i\frac{1}{\alpha}(X_\nu-\Psi_\nu)}}{1-\left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right|e^{i(X_\nu-\Psi_\nu)}}.$$

Da nun die Punkte z_ν und ζ_ν, sowie der Integrationsweg dem Bereiche B angehören, so bleibt von einem ν an, der Bedeutung von α gemäß, $|X_\nu-\Psi_\nu|$ unter $\left(\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)\pi$ und es ist also

$$\frac{1}{\alpha}|X_\nu-\Psi_\nu|\leqq\frac{3}{2}\pi.$$

Demzufolge kann sich der Zähler des zuletzt gefundenen Ausdruckes mit wachsendem ν der Null nur dann nähern, wenn für eine Teilfolge

$$\left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right|\to 1\quad\text{und}\quad|X_\nu-\Psi_\nu|\to 0,\ \text{d. h. } Z_\nu=\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\to 1$$

gilt. Wegen $\lim_{Z_\nu\to 1}\alpha\frac{1-Z_\nu^{\frac{1}{\alpha}}}{1-Z_\nu}=1$ jedoch sinkt der ganze Ausdruck dem Be-

trage nach nicht unter eine positive Konstante herab. Somit ist das Lemma bewiesen.

Um nun die Behauptung für zwei beliebige Folgen z_ν und ζ_ν als richtig zu erkennen, zerlege man diese in die durch

$$\left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right| < 1, \qquad \left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right| = 1, \qquad \left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right| > 1$$

gekennzeichneten Teilfolgen. Die beiden ersten sind erledigt. Für die dritte hat man gemäß (19)

$$F(z_\nu, \zeta_\nu) = F(\xi_\nu, z_\nu)\frac{f'(\zeta_\nu)}{f'(z_\nu)} = F(\zeta_\nu, z_\nu)\left(\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{f_1(\zeta_\nu)}{f_1(z_\nu)}.$$

Aus den Eigenschaften von $f_1(z)$ folgt $\frac{f_1(\zeta_\nu)}{f_1(z_\nu)} \to 1$. Nach dem Lemma existiert wegen $\left|\frac{z_\nu}{\zeta_\nu}\right| < 1$ eine Zahl β_2, so daß für hinreichend großes ν

$$|F(\zeta_\nu, z_\nu)| \geqq \beta_2$$

ist. Also ist für $\left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right| > 1$ von einer Stelle an

$$|F(z_\nu, \zeta_\nu)| \geqq \frac{1}{2}\beta_2.$$

Daher gibt es keine Folgen, für welche

$$\lim F(z_\nu, \zeta_\nu) = 0$$

gilt, womit der Beweis von Hilfssatz 1 erbracht ist.

Aus ihm kann jetzt leicht eine Abschätzung für die Ableitungen der Eigenfunktionen gewonnen werden:

Hilfssatz 2. *Ist B ein Bereich der in Hilfssatz 1 gekennzeichneten Art, so bestehen für die Eigenfunktionen φ_ν und Eigenwerte λ_ν der zu ihm gehörigen am Rande verschwindenden Greenschen Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$, als Kern einer Integralgleichung aufgefaßt, für alle Punkte ξ, η in B und $\nu \geqq \nu_0$ die Ungleichungen*

$$\left|\frac{\partial \varphi_\nu(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right| \leqq b\,\lambda_\nu(\log \lambda_\nu)^{\frac{1}{2}}, \qquad \left|\frac{\partial \varphi_\nu(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right| \leqq b\,\lambda_\nu(\log \lambda_\nu)^{\frac{1}{2}},$$

wobei ν_0 und b von ξ, η und ν unabhängige Konstante bedeuten[13]).

Beweis. Aus der für die normierten Eigenfunktionen gültigen Integralgleichung

$$\varphi_\nu(\xi, \eta) = \lambda_\nu \iint_B G(\xi, \eta; \sigma, \tau)\,\varphi_\nu(\sigma, \tau)\,d\sigma\,d\tau \tag{22}$$

[13]) Man kann übrigens unschwer weit bessere Abschätzungen in jedem keinen Randpunkt enthaltenden Teilbereich finden, was für unsere Zwecke jedoch nicht ausreicht.

findet man auf Grund der Schwarzschen Ungleichung, wenn unter A_1 eine von ξ, η und ν unabhängige Konstante verstanden wird,

$$(23) \qquad |\varphi_\nu(\xi,\eta)| \leqq \lambda_\nu \Big\{ \iint\limits_B G^2 \, d\sigma \, d\tau \cdot \iint\limits_B \varphi_\nu^2 \, d\sigma \, d\tau \Big\}^{\frac{1}{2}} \leqq A_1 \lambda_\nu .$$

ξ, η bedeute einen Punkt im Innern oder auf dem Rande von B. Man schlage um ihn einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{\lambda_\nu}$ und nenne $\mathfrak{B}$ dessen Durchschnitt mit B. Nun folgt aus (22)

$$\left| \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \xi} \right| \leqq \lambda_\nu \left(\left| \iint\limits_{B-\mathfrak{B}} \frac{\partial G}{\partial \xi} \varphi_\nu \, d\sigma \, d\tau \right| + \left| \iint\limits_{\mathfrak{B}} \frac{\partial G}{\partial \xi} \varphi_\nu \, d\sigma \, d\tau \right| \right)$$

$$< \lambda_\nu \left(\left\{ \iint\limits_{B-\mathfrak{B}} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)^2 d\sigma \, d\tau \iint\limits_B \varphi_\nu^2 \, d\sigma \, d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} + \iint\limits_{\mathfrak{B}} \left| \frac{\partial G}{\partial \xi} \right| |\varphi_\nu| \, d\sigma \, d\tau \right).$$

In den Integralen werden jetzt Polarkoordinaten r, ϑ um ξ, η als Anfangspunkt eingeführt. Dann liefert Hilfssatz 1

$$\left| \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \xi} \right| \leqq \lambda_\nu a \left(\left\{ \iint\limits_{B-\mathfrak{B}} \frac{dr \, d\vartheta}{r} \right\}^{\frac{1}{2}} + \iint\limits_{\mathfrak{B}} |\varphi_\nu| \, dr \, d\vartheta \right)$$

oder, wenn R den größten gegenseitigen Abstand zweier Randpunkte von B bedeutet, in Rücksicht auf (23)

$$\left| \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \xi} \right| \leqq a \lambda_\nu \left(\left\{ \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\frac{1}{\lambda_\nu}}^{R} \frac{dr \, d\vartheta}{r} \right\}^{\frac{1}{2}} + A_1 \lambda_\nu \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{1}{\lambda_\nu}} dr \, d\vartheta \right)$$

$$= a \lambda_\nu (\{2\pi (\log R + \log \lambda_\nu)\}^{\frac{1}{2}} + 2\pi A_1).$$

Hieraus entnimmt man die Behauptung unmittelbar.

Jetzt kann die Differenzierbarkeit der für die Greensche Funktion gültigen Reihe in dem erwähnten Sinne gezeigt werden.

Satz 8. *Der einfach zusammenhängende Bereich B besitze eine Berandung, die sich aus einer endlichen Anzahl von analytischen Kurvenstücken zusammensetzt, welche weder in Spitzen noch in einspringenden Ecken zusammenstoßen sollen. $G(x, y; \xi, \eta)$ bezeichne die zu ihm gehörige am Rande verschwindende Greensche Funktion. Wird der Punkt x, y auf einen ganz im Innern von B enthaltenden Teilbereich B_1 beschränkt, so ist für alle ξ, η in B, ganzes $g \geqq 2$ und hinreichend kleines ϱ*

$$\frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{\varrho} \frac{\varphi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu(\xi, \eta)}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial \eta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu(\xi,\eta)}{\partial \eta},$$

$$((x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \geqq (g\varrho)^2).$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für ξ, η in B und x, y in B_1.

Beweis. Für den Rest der Reihe findet sich bei Beachtung von (17) und Hilfssatz 2 für genügend großes p und q die Abschätzung

$$\sum_{\nu=p}^{q} \left| a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu(\xi,\eta)}{\partial \xi} \right| = \sum_{\nu=p}^{q} \left| \frac{\partial \varphi_\nu(\xi,\eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{a_\nu^{g-1}}{\lambda_\nu} \right| \left| \frac{1}{\pi\varrho^2} \iint_{\varkappa_1} \varphi_\nu(s,t)\, ds\, dt \right|$$

$$\leqq \left\{ \sum_{\nu=p}^{q} \left(\frac{\partial \varphi_\nu(\xi,\eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{a_\nu^{g-1}}{\lambda_\nu} \right)^2 \frac{1}{\pi^2\varrho^4} \iint_{\varkappa_1} 1\, ds\, dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \left\{ \frac{b}{\pi\varrho^2} \sum_{\nu=p}^{q} \log \lambda_\nu\, a_\nu^{2(g-1)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Berücksichtigt man, daß a_ν für hinreichend große Werte von ν unter konst. $\lambda_\nu^{-\frac{3}{4}}$ liegt (S. 288), so ergibt sich für den Rest die obere Schranke

$$\text{konst.} \left\{ \sum_{\nu=p}^{q} \log \lambda_\nu \cdot \lambda_\nu^{-\frac{3}{2}(g-1)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Die Konvergenz der Quadratsumme der reziproken Eigenwerte zieht somit für $g \geqq 3$ die der Reihe der Behauptung nach sich und zwar gleichmäßig in x, y und ξ, η. Aber auch für $g = 2$ kann dieselbe erschlossen werden, da für die Greensche Funktion bekanntlich $\lambda_\nu \sim \nu$ ist. Somit ist die gliedweise Differenzierbarkeit nach ξ und ebenso nach η gerechtfertigt.

§ 8.

Ausdehnung einiger Ergebnisse auf drei Dimensionen.

Es ist nicht schwer zu erkennen, daß sich ein Teil der in den vorangehenden Paragraphen entwickelten Sätze auf drei Dimensionen ausdehnen läßt.

Die Funktion H_ϱ ist wie folgt zu erklären:

Um den Punkt ξ, η, ζ schlage man die Kugel $\varkappa_1$ mit dem Radius ϱ und setze für einen von ξ, η, ζ verschiedenen Punkt u, v, w

$$H_\varrho(\xi,\eta,\zeta;u,v,w) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} + \frac{r^2}{2\varrho^3} - \frac{1}{2\varrho}\right) & \text{für } u, v, w \text{ in } \varkappa_1, \\ 0 & \text{„ } u, v, w \text{ außerhalb } \varkappa_1, \end{cases}$$

$$r = \sqrt{(\xi-u)^2+(\eta-v)^2+(\zeta-w)^2}.$$

Man erkennt leicht, daß diese Funktion der in zwei Dimensionen eingeführten (§ 3) analoge Eigenschaften hat:

$$H(\varrho) = 0, \qquad \frac{dH(\varrho)}{dr} = 0, \qquad \Delta H = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varrho^3} (r \leqq \varrho) \\ 0 \quad (r > \varrho), \end{cases}$$

$$\iiint_{K_1} H^2 \, du\, dv\, dw \leqq \text{konst. } \varrho.$$

Mit ihrer Hilfe läßt sich Satz 4 nebst Beweis ohne weiteres übertragen, wobei man $\varrho = |\lambda_n|^{-\frac{1}{6}}$ zu wählen hat.

Die Greensche Funktion im Raume hat bekanntlich die Gestalt

$$K(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\pi r} + \gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$$

$$\left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}\right),$$

wo γ mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehen ist. Ferner gilt $\Delta K = 0$ und $\lambda_\nu > 0$.

Für sie besteht das Analogon zu Satz 6 und 7, wenn darin $\varkappa_g$ die Kugel mit dem Radius $g \cdot \varrho$ um ξ, η, ζ als Mittelpunkt bedeutet, und

$$a_\nu = \frac{-3}{\varrho^2 \lambda_\nu} \cos(\sqrt{\lambda_\nu}\,\varrho) + \frac{3}{\varrho^3 \lambda_\nu^{\frac{3}{2}}} \sin(\sqrt{\lambda_\nu}\,\varrho)$$

gesetzt ist.

Beim Beweise ist dabei der Webersche Mittelwertsatz durch den Helmholtzschen[14]) zu ersetzen. Dieser besagt: Jede der Gleichung

$$\Delta \varphi_\nu - \lambda_\nu \varphi_\nu = 0 \qquad (\lambda_\nu > 0)$$

genügende Funktion φ_ν kann in der Form

$$\varphi_\nu(\xi, \eta, \zeta)\, R \sin(\sqrt{\lambda_\nu}\, R) = \frac{\sqrt{\lambda_\nu}}{4\pi} \iint \varphi_\nu \, d\sigma,$$

wobei das Integral über die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R zu erstrecken ist, geschrieben werden. Durch Integration nach R zwischen den Grenzen 0 und ϱ ergibt sich

$$\varphi_\nu(\xi, \eta, \zeta) \frac{4\pi}{\sqrt{\lambda_\nu}} \int_0^\varrho R \sin(\sqrt{\lambda_\nu}\, R)\, dR = \iiint_{\varkappa_1} \varphi_\nu(u, v, w)\, du\, dv\, dw,$$

(17a)

$$a_\nu \varphi_\nu(\xi, \eta, \zeta) = \frac{3}{4\pi\varrho^3} \iiint_{\varkappa_1} \varphi_\nu(u, v, w)\, du\, dv\, dw,$$

wenn a_ν den soeben angegebenen Wert bezeichnet. Dies ist die (17) ent-

[14]) Z. B.: F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, S. 217 (1891).

sprechende Formel. Die übrigen Teile der Beweise übertragen sich unmittelbar.

Es sei noch bemerkt, daß $\lim_{\varrho \to 0} a_\nu(\varrho) = 1$ und $a_\nu(\varrho) \underset{\nu \to \infty}{\sim} \frac{1}{\lambda_\nu}$ ist.

V.

Die Entwicklung unstetiger Funktionen.

Die Ergebnisse des IV. Abschnittes können zur Entwicklung gegebener Funktionen mit Unstetigkeiten nach den Eigenfunktionen von $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ herangezogen werden.

Lediglich unter Verwendung der Sätze 6 und 7 soll ein Satz bewiesen werden, der sowohl in der Ebene als auch im Raume Gültigkeit besitzt, der Einfachheit halber aber nur in zwei Dimensionen formuliert wird.

Satz 9. *Vorgelegt sei ein Bereich B, dessen Berandung aus einer geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden, stückweise stetig gekrümmten Linie besteht. Derselbe werde durch eine endliche Anzahl von ganz in seinem Innern verlaufenden, sich nicht treffenden Kurven C_ν von derselben Beschaffenheit wie die Berandung in Teilbereiche B_ν zerlegt.*

Die Funktion $F(x, y)$ besitze in jedem der Teilbereiche stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung und strebe nebst ihren Normalableitungen bei Annäherung an C_ν von der Art der Annäherung unabhängigen, längs C_ν stetigen Werten zu, die freilich beim Heranrücken von verschiedenen Seiten nicht übereinzustimmen brauchen. Weiter existiere $\iint_{B_\nu} \Delta F(s,t)^2\, ds\, dt$ für jedes B_ν. Endlich genüge F auf dem Rande von B einer Randbedingung der Form

$$h_1 \frac{\partial F}{\partial N} + h_2 F = 0,$$

wobei N die äußere Normale, h_1 und h_2 positive Konstante bezeichnen.

Unter λ_ν, φ_ν seien die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen von

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$$

bei der Randbedingung

$$h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial N} + h_2 \varphi = 0$$

verstanden.

g bedeute eine ganze Zahl größer als 1.

Dann gilt bei beliebigem hinreichend kleinen $\varrho > 0$ für alle Punkte x, y, deren Abstand von den Kurven C_ν nicht kleiner als $g \cdot \varrho$ ist,

$$F(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x, y) \left(a_\nu^g \iint_B F \varphi_\nu\, ds\, dt + \frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu} \iint_B \Delta F \varphi_\nu\, ds\, dt \right).$$

Die Konstanten a_ν sind dabei die im vorigen Abschnitt eingeführten von F unabhängigen Größen.

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für alle x, y in B.

Dem Beweise seien einige Bemerkungen vorausgeschickt.

Bezeichnet K die zu B und der Randbedingung gehörige Greensche Funktion, so kann der zweite Posten jedes Summengliedes in der Form

$$(24) \qquad (a_\nu^2 - 1) \iint_B \iint_B K(s,t;\sigma,\tau)\, \Delta F(s,t)\, \varphi_\nu(\sigma,\tau)\, ds\, dt\, d\sigma\, d\tau$$

geschrieben werden. Daraus ist ersichtlich, daß obige Entwicklung, falls F der Randbedingung genügt und längs aller C_ν nebst seiner Normalableitung stetig bleibt, mit der üblichen Fourierentwicklung übereinstimmt, weil alsdann

$$\iint_B K(s,t;\sigma,\tau)\, \Delta F(s,t)\, ds\, dt = -F(\sigma,\tau)$$

gilt. Im anderen Falle unterscheiden sich die ersten Koeffizienten der Reihe der Behauptung nur wenig von den Fourierkoeffizienten, da die ersten a_ν nahe an 1 liegen. Für große ν hingegen wird zufolge $a_\nu \sim \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ der Einfluß der mit der unstetigen Funktion F gebildeten Koeffizienten $\iint_B F \varphi_\nu\, ds\, dt$ abgeschwächt, und die mit dem stetigen

$$\iint_B K(s,t;\sigma,\tau)\, \Delta F(s,t)\, ds\, dt$$

gebildeten gewinnen das Übergewicht. Daß die Koeffizienten dann nicht mehr mit den Fourierkoeffizienten übereinstimmen, ergibt sich, wenn für F eine nicht identisch verschwindende den Randbedingungen genügende und in B die Gleichung $\Delta F = 0$ befriedigende Funktion gewählt wird.

Will man zulassen, daß die Kurven C_ν nicht geschlossen sind, sondern zwei Punkte des Randes von B verbinden, und soll ferner F keiner Randbedingung unterworfen sein, in welchem Falle die Reihe freilich F nur noch außerhalb einer gewissen Umgebung des Randes darstellen kann, so muß Satz 8 herangezogen werden. Die Voraussetzungen sind demgemäß einzuschränken, und der Beweis bleibt nur noch in zwei Dimensionen stichhaltig. Das Ergebnis läßt sich wie folgt formulieren:

Satz 10. *Vorgelegt ein Bereich B der schlichten Ebene, dessen Berandung aus einer geschlossenen sich selbst nicht überschneidenden Linie besteht, die sich aus einer endlichen Anzahl analytischer Bögen zusammensetzt, die weder in Spitzen noch in einspringenden Ecken zusammenstoßen. Derselbe werde durch endlich viele sich nicht treffende, stückweise stetig gekrümmte, entweder geschlossene oder zwei Randpunkte von B verbindende Kurven C_ν in die Teilbereiche B_ν zerlegt.*

Die Funktion $F(x, y)$ besitze in jedem dieser Teilbereiche stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung und strebe nebst ihrer Normalableitung bei Annäherung an C_ν und den Rand von B stetigen Grenzwerten zu. Weiter existiere $\iint_{B_\nu} \Delta F \varphi_\nu \, ds\, dt$ für jedes B_ν.

Unter λ_ν, φ_ν seien die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen von

$$\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$$

bei der Randbedingung $\varphi = 0$ verstanden.

g bedeute eine ganze Zahl größer als 1.

Dann gilt bei beliebigem, hinreichend kleinem ϱ für alle Punkte x, y, deren Abstand von C_ν und dem Rande von B kleiner als $g \cdot \varrho$ ist,

$$F(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x, y) \left(a_\nu^g \iint_B F \varphi_\nu \, ds\, dt + \frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu} \iint_B \Delta F \varphi_\nu \, ds\, dt \right).$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für alle x, y in B.

Beweis. Der Anfang der Beweise der Sätze 9 und 10 ist gemeinsam. Über B seien zunächst nur die Voraussetzungen von Satz 9, über C_ν die von Satz 10 gemacht, F unterliege keiner Randbedingung.

Der Rand von B werde mit C bezeichnet. x, y bedeute einen nicht auf C und C_ν gelegenen Punkt. Man wende die Greensche Formel mit F und der zur gegebenen Randbedingung[15]) $h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial N} + h_2 \varphi = 0$ gehörigen Greenschen Funktion K von B auf sämtliche Bereiche B_ν einzeln an. Dabei ist jeweils, falls die zweiten Ableitungen von F bei Annäherung an die Berandung nicht endlich bleiben, in üblicher Weise zunächst ein kleineres Gebiet zu nehmen, welches nachträglich stetig in das ursprüngliche übergeführt wird. Addiert man die Resultate, so findet sich

$$(25) \quad \sum^{\nu} \iint_{B_\nu} (F(s, t) \Delta_{s,t} K(x, y; s, t) - K(x, y; s, t) \Delta F(s, t)) \, ds\, dt$$
$$= F(x, y) + \int_C \left(F \frac{\partial K}{\partial N} - K \frac{\partial F}{\partial N} \right) dl + \sum_\nu \int_{C_\nu} \left(F \Big|_i^a \frac{\partial K}{\partial N} - K \frac{\partial F}{\partial N} \Big|_i^a \right) dl.$$

Dabei bedeutet $F\Big|_i^a$ bzw. $\frac{\partial F}{\partial N}\Big|_i^a$ die Differenz der beiderseitigen Grenzwerte an C_ν bei sinngemäßer Festsetzung des Vorzeichens der Normalableitung.

Von jetzt ab habe der Punkt x, y von allen C_ν mindestens den Abstand $g \cdot \varrho$.

Unter den Voraussetzungen des Satzes 9 verschwindet das Integral über C, und sämtliche Punkte von C_ν haben sowohl vom Rande (bei hinreichend kleinem ϱ), als auch von x, y keinen kleineren Abstand

[15]) Diese bezieht sich natürlich auf die Berandung C von B.

als $g \cdot \varrho$. Für K und $\frac{\partial K}{\partial N}$ können auf der rechten Seite von (25) also die Entwickelungen gemäß der auch in drei Dimensionen gültigen Sätze 6 und 7 eingeführt werden, wobei für den dort mit B_1 bezeichneten Teilbereich die Vereinigung der Kurven C_ν zu wählen ist.

Unter den Voraussetzungen des Satzes 10 ist weiterhin zu verlangen, daß der Punkt x, y auch von C um mindestens $g \cdot \varrho$ entfernt ist. K ist jetzt die auf dem Rande verschwindende Greensche Funktion von B. Für K kann wieder die Entwickelung aus Satz 6, für $\frac{\partial K}{\partial N}$ hingegen die nach Satz 8 genommen werden. Der dort auftretende Teilbereich B_1 ist wie folgt zu wählen: Von B werde die Vereinigung aller Kreise mit dem Radius $g \cdot \varrho$, deren Mittelpunkte auf C oder C_ν liegen, weggenommen. Die dann von B verbleibenden Punkte machen B_1 aus.

In beiden Fällen erhält man also für die Integrale auf der rechten Seite von (25) für alle in Frage kommenden Punkte x, y mit Rücksicht auf die gleichmäßige Konvergenz

$$\int_C + \sum^\nu \int_{C_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu^g}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x, y) \Big(\int_C \Big(F \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial N} - \varphi_\nu \frac{\partial F}{\partial N} \Big) dl + \sum^\nu \int_{C_\nu} \Big(F \Big|_i^a \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial N} - \varphi_\nu \frac{\partial F}{\partial N} \Big|_i^a \Big) dl \Big),$$

wobei freilich im Falle des Satzes 9 die Integrale über C verschwinden. Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

Wird unter den Integralen

$$\varphi_\nu = \lambda_\nu \iint_B K \varphi_\nu \, d\sigma \, d\tau \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial N} = \lambda_\nu \iint_B \frac{\partial K}{\partial N} \varphi_\nu \, d\sigma \, d\tau$$

gesetzt, so erhält man in Rücksicht auf die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge [16])

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \varphi_\nu(x, y) \iint_B \Big(\int_C \Big(F \frac{\partial K}{\partial N} - K \frac{\partial F}{\partial N} \Big) dl + \sum^\nu \int_{C_\nu} \Big(F \Big|_i^a \frac{\partial K}{\partial N} - K \frac{\partial F}{\partial N} \Big|_i^a \Big) dl \Big) \varphi_\nu(\sigma, \tau) \, d\sigma \, d\tau,$$

oder wegen (25) und $\Delta K = 0$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \varphi_\nu(x, y) \Big(- \iint_B F \varphi_\nu \, d\sigma \, d\tau - \iint_B \iint_B K \Delta F \varphi_\nu \, ds \, dt \, d\sigma \, d\tau \Big).$$

[16]) Eine nähere Begründung hierfür findet sich z. B. bei A. Kneser, loc. cit. 3, S. 191.

Weiter gilt nach dem Entwicklungssatze aus der Theorie der Integralgleichungen

$$\iint_B K(x, y; s, t)\, \Delta F(s, t)\, ds\, dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x, y) \iint_B \iint_B K\, \Delta F \varphi_\nu\, ds\, dt\, d\sigma\, d\tau,$$

wobei die Reihe wiederum absolut und gleichmäßig konvergiert.

Eintragen der beiden zuletzt gefundenen Werte in (25) ergibt in Rücksicht auf $\Delta K = 0$ und (24) die Behauptung beider Sätze.

Zum Schluß dieses Abschnittes soll unter der Voraussetzung der Existenz höherer Ableitungen der Funktion F in den Teilbereichen B_ν eine besser konvergente Reihe aufgestellt werden. Es gilt

Satz 11. *Der Bereich B und die Kurven C_ν seien von der in Satz 9 oder 10 gekennzeichneten Art. Die Funktion $F(x, y)$ besitze in jedem Teilbereiche B_ν stetige Ableitungen bis zur $(2m+1)$-ten Ordnung, und genüge, falls über B und C_ν die Annahmen von Satz 9 gemacht sind, noch bei Annäherung des Punktes x, y an den Rand der Bedingung*

$$\lim \left(h_1 \frac{\partial \Delta^{(\mu)} F}{\partial N} + h_2 \Delta^{(\mu)} F \right) = 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m),$$

wobei $\Delta^{(\mu)} F$ bedeutet, daß der Laplacesche Operator Δ μ-mal auf die Funktion F angewandt werden soll ($\Delta^{(0)} F = F$). Für jedes B_ν existiere ferner $\iint_{B_\nu} (\Delta^{(m)} F(s, t))^2\, ds\, dt$. Dann ist unter Beibehaltung der Bezeichnungen von Satz 9 bzw. 10 für alle Punkte x, y, die mindestens den Abstand $mg\varrho$ vom Rande und den C_ν haben

$$F(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \varphi_\nu(x, y),$$

$$A_\nu = a_\nu^g \sum_{\mu=0}^{m-1} \left(\frac{a_\nu - 1}{\lambda_\nu} \right)^\mu \iint_B \Delta^{(\mu)} F \varphi_\nu\, ds\, dt + \left(\frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu} \right)^m \iint_B \Delta^{(m)} F \varphi_\nu\, ds\, dt.$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

Wählt man $g \geqq \frac{4(m+1)}{3}$, so besitzen die Koeffizienten die Eigenschaft, daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_\nu^m A_\nu)^2$ konvergiert.

Beweis. Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe leuchtet leicht wie folgt ein: Wegen $a_\nu \leqq c \frac{1}{\lambda_\nu^{\frac{3}{4}}}$ (S. 288) und $g \geqq 2$ ist $|a_\nu^g \varphi_\nu(x, y)| \leqq c^g \left| \frac{\varphi_\nu}{\lambda_\nu} \right|$.

Da die Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_\nu}{\lambda_\nu} \right)^2$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\iint_B \Delta^{(\mu)} F \varphi_\nu\, ds\, dt \right)^2$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots, m)$ gleichmäßig konvergieren, folgt in Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichung dasselbe für die Reihe der Behauptung.

Der Beweis für die Gestalt der Koeffizienten A_ν wird durch Induktion geführt.

Für $m=1$ ist die Aussage in den Sätzen 9 bzw. 10 enthalten. $F(x, y)$ besitze in jedem B_ν Ableitungen bis zur $(2m+1)$-ten Ordnung. Die Behauptung sei für $m-1$ richtig und ist für m zu zeigen.

Gemäß der Annahme gilt für alle Punkte x, y, die von dem Rande und den Kurven C_ν einen größeren Abstand als $(m-1)g\varrho$ haben,

$$\Delta F = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \varphi_\nu(x, y),$$

$$D_\nu = a_\nu^g \sum_{\nu=0}^{m-2} \left(\frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu}\right)^\mu \iint_B \Delta^{(\mu+1)} F \varphi_\nu \, ds\, dt + \left(\frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu}\right)^{m-1} \iint_B \Delta^{(m)} F \varphi_\nu \, ds\, dt.$$

Ferner ist nach Satz 9 bzw. 10 für alle Punkte x, y, deren Abstand vom Rande und den Kurven C_ν mindestens $g\varrho$ beträgt,

$$F(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x, y) a_\nu^g \iint_B F \varphi_\nu \, ds\, dt + S,$$

wobei zur Abkürzung

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x, y) \left(\frac{a_\nu^g}{\lambda_\nu} - \frac{1}{\lambda_\nu}\right) \iint_B \Delta F \varphi_\nu \, ds\, dt$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu} \iint_B \Delta F \varphi_\nu \, ds\, dt - \iint_B K(x, y; s, t) \Delta F(s, t) \, ds\, dt$$

gesetzt ist. Unter $\varkappa$ sei die Kreisscheibe mit dem Radius $g\varrho$ um x, y als Mittelpunkt verstanden. Dann wird

$$\iint_B K \Delta F \, ds\, dt = \iint_\varkappa K \Delta F \, ds\, dt + \iint_{B-\varkappa} K \Delta F \, ds\, dt.$$

Verlangt man nun, daß der Punkt x, y von den Kurven C_ν und vom Rande mindestens den Abstand $mg\varrho$ hat, so sind alle Punkte s, t von $\varkappa$ um mehr als $(m-1)g\varrho$ von den C_ν und vom Rande entfernt; für ΔF gilt in $\varkappa$ die eingangs vermerkte Entwicklung. Setzt man diese in das erste Integral auf der rechten Seite ein, in das zweite hingegen die für K nach Satz 6, so ergibt sich

$$\iint_B K \Delta F \, ds\, dt = \iint_\varkappa K \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \varphi_\nu(s, t) \, ds\, dt + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu} \iint_{B-\varkappa} \Delta F \varphi_\nu \, ds\, dt.$$

Somit wird:

$$S=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}\iint_\varkappa \Delta F\varphi_\nu\,ds\,dt-\iint_B K\sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu\varphi_\nu(s,t)\,ds\,dt$$
$$+\iint_{B-\varkappa} K\sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu\varphi_\nu(s,t)\,ds\,dt.$$

Führt man wiederum im ersten Integral für ΔF, im dritten für K die Reihen ein, so findet sich, wenn noch im mittleren Posten gliedweise integriert wird[17]),

$$S=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}\iint_\varkappa \sum_{\mu=1}^{\infty} D_\mu\varphi_\mu(s,t)\varphi_\nu(s,t)\,ds\,dt$$
$$-\sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu\frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}+\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu\frac{\varphi_\mu(x,y)}{\lambda_\mu}\iint_{B-\varkappa}\sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu\varphi_\nu(s,t)\varphi_\mu(s,t)\,ds\,dt$$
$$=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g\frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}D_\nu-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}D_\nu.$$

Also wird

$$F(x,y)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(x,y)\left(a_\nu^g\iint_B F\varphi_\nu\,ds\,dt+\frac{a_\nu^g-1}{\lambda_\nu}D_\nu\right).$$

In Rücksicht auf den angegebenen Wert von D ist dies die behauptete Entwickelung.

Um endlich die Aussage über die Koeffizienten als richtig zu erkennen, beachte man, daß wegen $|a_\nu|\leqq c\frac{1}{\lambda_\nu^{\frac{3}{4}}}$ (S. 288), wenn $g\geqq\frac{4(m+1)}{3}$ ist, $|a_\nu^g|\leqq c^g\frac{1}{\lambda_\nu^{m+1}}$ ausfällt. Wird dann $\lambda_\nu^m A_\nu$ in der Form

$$\lambda_\nu^m A_\nu=\lambda_\nu^m a_\nu^g E_\nu+(-1)^m\iint_B \Delta^{(m)}F\varphi_\nu\,ds\,dt$$

---

[17]) Die gliedweise Integration kann etwa wie folgt gerechtfertigt werden. Es ist für ganzes N

$$\iint_B K\sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu\varphi_\nu a\,ds\,dt=\sum_{\nu=1}^{N} D_\nu\iint_B K\varphi_\nu\,ds\,dt+\iint_B K\sum_{\nu=N+1}^{\infty} D_\nu\varphi_\nu\,ds\,dt$$

und

$$\left|\iint_B K\sum_{\nu=N+1}^{\infty} D_\nu\varphi_\nu\,ds\,dt\right|\leqq\left\{\iint_B K^2\,ds\,dt\iint_B\left(\sum_{\nu=N+1}^{\infty} D_\nu\varphi_\nu\,ds\,dt\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Dieser Restposten hat zufolge der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_{\nu=N+1}^{\infty} D_\nu\varphi_\nu$ den Limes 0 für $N\to\infty$.

geschrieben, so verbleiben die Größen $|\lambda_\nu^m a_\nu^g E_\nu|$ unterhalb $\frac{1}{\lambda_\nu}$, multipliziert mit einer von ν unabhängigen Konstanten. Die Konvergenz von $\frac{1}{\lambda_\nu^2}$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\iint_B \Delta^{(m)} F \varphi_\nu \, ds\, dt\right)^2$ zieht dann die von $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\lambda_\nu^m A_\nu)^2$ nach sich, was gezeigt werden sollte.

Es sei noch bemerkt, daß, wenn ϱ hinreichend klein ist, die ersten a_ν sich wenig von der Einheit unterscheiden, woraus folgt, daß die Anfangsglieder der Entwicklung von F wenig von denen der Fourierreihe abweichen.

Unter den Voraussetzungen von Satz 9 behält Satz 11 auch in drei Dimensionen Gültigkeit.

VI.

Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung.

Auf Grund des Satzes 9 kann jetzt leicht die Lösung der Randwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung in der Ebene und im Raume angegeben werden. Das Ergebnis lautet, der Einfachheit halber in zwei Dimensionen formuliert, wie folgt:

Satz 12. *Unter B werde ein Bereich verstanden, dessen Berandung aus einer geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden, stückweise stetig gekrümmten Linie besteht. Derselbe werde durch eine endliche Anzahl von ganz in seinem Innern verlaufenden, sich nicht treffenden Kurven C_ν von derselben Beschaffenheit wie die Berandung in Teilbereiche B_ν zerlegt.*

Die Funktion $F(x, y)$ besitze in jedem der Teilbereiche stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung und strebe nebst ihren Normalableitungen bei Annäherung an C_ν Werten zu, die von der Art des Heranrückens unabhängig und längs C_ν stetig sind, indessen beim Heranrücken von verschiedenen Seiten nicht übereinzustimmen brauchen. Weiter existiere $\iint_{B_\nu} \Delta F(s,t)^2 \, ds\, dt$ für jedes B_ν. Endlich genüge F auf dem Rande von B einer Randbedingung der Form

$$h_1 \frac{\partial F}{\partial N} + h_2 F = 0,$$

wobei N die äußere Normale, h_1 und h_2 positive Konstante bezeichnen.

Unter λ_ν und φ_ν seien die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen von

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$$

bei der Randbedingung

$$h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial N} + h_2 \varphi = 0$$

verstanden. g bedeute eine ganze Zahl größer als 1.

Für hinreichend kleines ϱ, alle x, y in B und $T > 0$, stellt

$$u(x, y; T) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x, y)\, e^{-A\lambda_\nu T},$$

$$c_\nu = a_\nu^g \iint_B F\varphi_\nu\, ds\, dt + \frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu} \iint_B \Delta F \varphi_\nu\, ds\, dt$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\Delta u \qquad (A > 0)$$

dar, welche für die Punkte x, y des Randes von B und alle T der Bedingung

$$h_1 \frac{\partial u}{\partial N} + h_2 u = 0$$

genügt, und die für $T = 0$ und alle x, y, deren Abstand von C_ν nicht kleiner als $g \cdot \varrho$ ist, mit $F(x, y)$ übereinstimmt[18]).

Beweis. Die in Satz 9 erwiesene absolute Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x, y)$ hat zur Folge, daß die Reihe der Behauptung in jedem Intervall $0 \leqq T \leqq T_1$ gleichmäßig konvergiert; demnach bleibt u bei Annäherung von T an den Wert 0 stetig, und die Funktion hat somit gemäß Satz 9 die für $T = 0$ verlangte Eigenschaft.

Zufolge der für ganzes $k > 0$, $T \geqq T_0 > 0$ und $\nu \geqq \nu_0(k, A, T_0)$ gültigen Relation

$$0 < \lambda_\nu^k e^{-\lambda_\nu A T} \leqq \lambda_\nu^k e^{-\lambda_\nu A T_0} \leqq 1$$

folgt die absolute und für $T \geqq T_0$ gleichmäßige Konvergenz der Reihen

$$\frac{\partial u}{\partial T} = -A \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x, y)\, \lambda_\nu e^{-A\lambda_\nu T} \tag{26}$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = A^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x, y)\, \lambda_\nu^2 e^{-A\lambda_\nu T}. \tag{27}$$

$\frac{\partial u}{\partial T}$ sowie $\frac{\partial^2 u}{\partial T^2}$ sind also für alle Punkte x, y in B und $T > 0$ stetige Funktionen.

---

[18]) Auf Satz 12 läßt sich folgender Fall zurückführen: $F(x, y)$ ist keiner Randbedingung unterworfen. Gesucht eine Lösung von $\frac{\partial u}{\partial T} = A\Delta u$, die für alle T die Randwerte von F hat, und für $T = 0$ außerhalb eines Streifens um die Unstetigkeitslinien mit F übereinstimmt. Man hat nur unter u_1 die in B reguläre Potentialfunktion zu verstehen, welche die Randwerte von F hat, und u_2 nach Satz 12 als die am Rande verschwindende Lösung von $\frac{\partial u_2}{\partial T} = A\Delta u_2$ zu bestimmen, die für $T = 0$ mit $F(x, y) - u_1(x, y)$ außerhalb einer Umgebung der Kurven C_ν übereinstimmt. $u = u_1 + u_2$ ist die gesuchte Lösung.

Daß u der Differentialgleichung genügt[19]), wird leicht folgendermaßen eingesehen. Es ist, wenn K die zur Randbedingung gehörige Greensche Funktion von $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ bedeutet, für $T > 0$

$$\begin{aligned} u(x, y; T) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x, y) e^{-A\lambda_\nu T} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{-A\lambda_\nu T} \lambda_\nu \iint_B K(x, y; s, t)\, \varphi_\nu(s, t)\, ds\, dt \\ &= \iint_B K(x, y; s, t) \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(s, t)\, \lambda_\nu e^{-A\lambda_\nu T}\, ds\, dt, \end{aligned}$$

wo die Vertauschbarkeit der Summation mit der Integration wie in Anm. 17 gerechtfertigt wird.

In Rücksicht auf (26) erhält man hieraus[20])

$$u(x, y; T) = -\frac{1}{A} \iint_B K(x, y; s, t) \frac{\partial u(s, t; T)}{\partial T}\, ds\, dt. \tag{28}$$

Auf Grund von (26) und (27) ergibt sich ganz ebenso

$$\frac{\partial u(x, y; T)}{\partial T} = \frac{-1}{A} \iint_B K(x, y; s, t) \frac{\partial^2 u(s, t; T)}{\partial T^2}\, ds\, dt. \tag{29}$$

Nach bekannten Sätzen über die Greensche Funktion kann aus (29) die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial^2 u}{\partial T \partial x}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial T \partial y}$ in B erschlossen werden, derzufolge man nun (28) die von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sowie die behauptete Relation

$$\Delta u(x, y; T) = \frac{1}{A} \frac{\partial u(x, y; T)}{\partial T}$$

entnimmt.

Da endlich K die Randbedingnng erfüllt, zeigt (28), daß dasselbe für u bei beliebigem $T > 0$ gilt, womit der Satz völlig bewiesen ist.

Zusatz. Will man zulassen, daß die Kurven C_ν auch zwei Punkte der Berandung von B verbinden, so müssen die Voraussetzungen des Satzes 12 über B durch die von Satz 10 ersetzt werden, und für K und φ_ν ist das Verschwinden auf dem Rande von B zu fordern. Das vorige

---

[19]) Das Beweisverfahren läßt sich leicht auf die Differentialgleichung $L(u) = P(x, y) \frac{\partial u}{\partial T}$ ausdehnen, wenn $L(u) = \frac{\partial (p u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (p u_y)}{\partial y} - q u$ ist, wobei die Funktionen $p(x, y) > 0$, $q(x, y) \geqq 0$, $P(x, y) > 0$ genügend oft differenzierbar sind. Man hat dabei unter φ_ν die Eigenfunktionen von $L(\varphi) + \lambda P\varphi$ zu verstehen.

[20]) Integraldifferentialgleichungen der Form von (28) sind von Amoroso behandelt. (Sopra un equazione integro-differenziale del tipo parabolico. I. II. Rom. Acc. L. Rend. (5) 21_2.) In dem Beweis des Textes wird jedoch von der Theorie der Integraldifferentialgleichungen kein Gebrauch gemacht.

Beweisverfahren liefert sodann, wenn statt Satz 9 jeweils Satz 10 zur Verwendung kommt, daß wiederum

$$u(x, y; T) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x, y)\, e^{-A\lambda_\nu T},$$

wo die Konstanten c_ν dieselbe Bedeutung wie in Satz 12 haben, eine am Rande verschwindende Lösung darstellt, die jedoch für $T = 0$ mit $F(x, y)$ nur noch in *den* Punkten x, y übereinstimmt, die außer von C_ν auch noch von der Berandung von B mindestens den Abstand $g \cdot \varrho$ haben.

VII.

Anwendung auf die Gleichung der schwingenden Membran.

In diesem Abschnitte sollen Untersuchungen, die denen des vorigen analog sind, für die Gleichung der schwingenden Membran durchgeführt werden, jedoch unter weniger weitgehenden Voraussetzungen.

Satz 13. *Unter φ_ν seien die der Randbedingung $h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial N} + h_2 \varphi = 0$ genügenden Eigenfunktionen der Differentialgleichung*

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$$

in einem Bereiche B verstanden. Sind die Konstanten A_ν und B_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ so beschaffen, daß $\sum_{\nu=1}^{M} (\lambda_\nu^3 A_\nu)^2$ und $\sum_{\nu=1}^{M} (\lambda_\nu^{\frac{5}{2}} B_\nu)^2$ unter von M unabhängigen Konstanten verbleiben, so stellt

$$u(x, y; T) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(A_\nu \cos \sqrt{\lambda_\nu}\, T + \frac{B_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}} \sin \sqrt{\lambda_\nu}\, T \right) \varphi_\nu(x, y) \tag{30}$$

eine für alle T der Randbedingung $h_1 \frac{\partial u}{\partial N} + h_2 u = 0$ genügende Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u(x, y; T)}{\partial T^2} = \Delta u(x, y; T)$$

dar.

Beweis. Die Reihe (30) kann viermal gliedweise nach T differenziert werden, denn für

$$\frac{\partial^4 u}{\partial T^4} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2 \left(A_\nu \cos \sqrt{\lambda_\nu}\, T + \frac{B_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}} \sin \sqrt{\lambda_\nu}\, T \right) \varphi_\nu(x, y)$$

gilt die Restabschätzung

$$\sum_{\nu=p}^{q} \lambda_\nu^3 \left(A_\nu + \frac{B_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}} \right) \frac{\varphi_\nu}{\lambda_\nu}$$

$$\leqq \left(\sum_{\nu=p}^{q} (\lambda_\nu^3 A_\nu)^2 \cdot \sum_{\nu=p}^{q} \left(\frac{\varphi_\nu}{\lambda_\nu} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\nu=p}^{q} (\lambda_\nu^{\frac{5}{2}} B_\nu)^2 \sum_{\nu=p}^{q} \left(\frac{\varphi_\nu}{\lambda_\nu} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

was zufolge der über A_ν und B_ν gemachten Annahme und der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_\nu}{\lambda_\nu}\right)^2$ die der Reihe für $\frac{\partial^4 u}{\partial T^4}$ nach sich zieht.

Nun ist, wenn K die zur Randbedingung gehörige Greensche Funktion bezeichnet,

$$(31)\qquad u(x,y;T)$$
$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(A_\nu\cos\sqrt{\lambda_\nu}\,T+\frac{B_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}}\sin\sqrt{\lambda_\nu}\,T\right)\lambda_\nu\iint_B K(x,y;s,t)\,\varphi_\nu(s,t)\,ds\,dt$$
$$=-\iint_B K(x,y;s,t)\,\frac{\partial^2 u(s,t;T)}{\partial T^2}\,ds\,dt,$$

wobei die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Summation und Integration wie in Anmerkung 17 gerechtfertigt werden kann. Ebenso ergibt sich

$$\frac{\partial^2 u(x,y;T)}{\partial T^2}=-\iint_B K(x,y;s,t)\,\frac{\partial^4 u(s,t;T)}{\partial T^4}\,ds\,dt.$$

Aus dieser Gleichung erschließt man die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial^3 u}{\partial T^2\,\partial x}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial T^2\,\partial y}$ und als Folge davon aus (31) die von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, sowie $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial T^2}$, was gezeigt werden sollte.

Daß u der Randbedingung genügt, kann (31) unmittelbar entnommen werden.

Zusatz. *Satz 13 nebst Beweis läßt sich ohne weiteres auf die allgemeinere Differentialgleichung*

$$p(x,y)\,\Delta u+p_x(x,y)\,u_x+p_y(x,y)\,u_y-q(x,y)\,u=P(x,y)\,u_{TT},$$

wobei die Funktionen p, q, P genügend oft differenzierbar sind, und $p>0$, $q\geqq 0$, $P>0$ ist, ausdehnen.

Aus Satz 13 folgt sofort: *Haben die Funktionen F_1 und F_2 im Bereiche B stetige, beschränkte partielle Ableitungen bis zur sechsten Ordnung einschließlich, verschwindet ferner auf dem Rande von B sowohl F_1 und F_2 als auch*[21]) ΔF_1, $\Delta^{(2)}F_1$, ΔF_2, $\Delta^{(2)}F_2$, *so stellt die mit den*

[21]) Dies ist natürlich so zu verstehen, daß die im Innern von B stetigen Funktionen ΔF_1 usw. bei Annäherung an den Rand gegen 0 streben. Diese Forderung ist unter der Annahme, daß eine Lösung $u(x,y,T)$ mit stetigen Ableitungen genügend hoher Ordnung existiert, auch notwendig. Sind nämlich die Funktionen $\frac{\partial^l u(x,y,T)}{\partial T^l}$ für alle x,y des abgeschlossenen Bereiches B und alle T stetig, so folgt aus der für alle T gültigen Bedingung $u(\bar{x},\bar{y},T)=0$, wo $\bar{x},\bar{y}$ die Punkte des Randes durchläuft, $\frac{\partial^l u(\bar{x},\bar{y},T)}{\partial T^l}=0$. Die rechten Seiten der Gleichungen

(Fortsetzung der Fußnote 21 auf der nächsten Seite.)

Fourierkoeffizienten

$$A_\nu = \iint_B F_1 \varphi_\nu \, ds\, dt, \qquad B_\nu = \iint_B F_2 \varphi_\nu \, ds\, dt$$

gebildete Reihe (30) *eine am Rande verschwindende Lösung von* $\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = \Delta u$ *dar, für welche*

$$u(x, y, 0) = F_1(x, y), \qquad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial T} = F_2(x, y)$$

ist. Die Eigenfunktionen φ_ν *sind dabei der Randbedingung* $\varphi_\nu = 0$ *zu unterwerfen.*

Es ist nämlich, wie man wegen $\Delta \varphi_\nu = -\lambda_\nu \varphi_\nu$ durch wiederholte Anwendung der Greenschen Formel erkennt:

$$A_\nu = -\frac{1}{\lambda_\nu} \iint_B F_1 \Delta \varphi_\nu \, ds\, dt = -\frac{1}{\lambda_\nu} \iint_B \Delta F_1 \, \varphi_\nu \, ds\, dt = \frac{1}{\lambda_\nu^2} \iint_B \Delta F_1 \, \Delta \varphi_\nu \, ds\, dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_\nu^2} \iint_B \Delta^{(2)} F_1 \, \varphi_\nu \, ds\, dt = -\frac{1}{\lambda_\nu^3} \iint_B \Delta^{(3)} F_1 \, \varphi_\nu \, ds\, dt$$

und

$$B_\nu = -\frac{1}{\lambda_\nu^3} \iint_B \Delta^{(3)} F_2 \, \varphi_\nu \, ds\, dt.$$

Die Größen A_ν und B_ν haben in der Tat die in Satz (13) verlangten Eigenschaften.

Läßt man zu, daß die Funktionen F_1 und F_2 mit ihren Differentialquotienten längs gegebener Linien Unstetigkeiten aufweisen, so kann eine Lösung angegeben werden, die mit dem Anfangszustand außerhalb einer beliebig klein wählbaren Umgebung der Unstetigkeitslinien und des Randes übereinstimmt, und deren erste Koeffizienten A_ν, B_ν um beliebig wenig von den Fourierkoeffizienten abweichen. Es gilt nämlich, wie aus Satz 13 und 11, mit $m = 3$ angewandt, ohne weiteres erschlossen wird:

Satz 14. *Unter B sei ein Bereich verstanden, dessen Berandung aus einer geschlossenen, sich selbst nicht überschneidenden, stückweise stetig gekrümmten Linie C besteht. Derselbe werde durch eine endliche Anzahl von ganz in seinem Innern verlaufenden, sich nicht treffenden Kurven* C_ν

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = \Delta u, \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial T^4} = \frac{\partial^2}{\partial T^2} \Delta u = \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = \Delta^{(2)} u,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial T^3} = \Delta \frac{\partial u}{\partial T}, \qquad \frac{\partial^5 u}{\partial T^5} = \Delta \frac{\partial^3 u}{\partial T^3} = \Delta^{(2)} \frac{\partial u}{\partial T}$$

nehmen für $T = 0$ bezüglich die Werte ΔF_1, $\Delta^{(2)} F_1$, ΔF_2, $\Delta^{(2)} F_2$ an, die, wenn sich der Punkt x, y dem Rande nähert, der Null zustreben, weil dasselbe für die linken Seiten gilt

von derselben Beschaffenheit wie die Berandung im Teilbereiche B_ν zerlegt. Läßt man zu, daß die Kurven C_ν auch zwei Punkte von C verbinden können, so muß dieses stückweise analytisch, ohne Spitzen und einspringende Ecken angenommen werden.

Die Funktionen $F_1(x,y)$ und $F_2(x,y)$ mögen in jedem B_ν stetige Ableitungen bis zur siebenten Ordnung einschließlich besitzen, die bei Annäherung an C und C_ν stetigen, von der Art des Heranrückens unabhängigen Grenzwerten zustreben. Wenn C nicht stückweise analytisch ist[22]*, müssen F_1 und F_2 überdies der Randbedingung $h_1 \frac{\partial \Delta^{(\mu)} F}{\partial N} + h_2 \Delta^{(\mu)} F = 0\,(\mu = 0, 1, 2, 3)$ genügen. Weiter existiere $\iint_B (\Delta^{(3)} F)^2\, ds\, dt$ für jedes B_ν.*

Unter λ_ν und φ_ν seien die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen von

$$\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$$

bei der Randbedingung

$$h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial N} + h_2 \varphi = 0$$

verstanden. Im Falle, daß einige der Kurven C_ν im Rande enden, muß $h_1 = 0$ sein. g bedeute eine ganze Zahl größer als 6.

Für hinreichend kleines ϱ, alle x, y in B und alle T stellt

$$u(x,y;T) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(A_\nu \cos \sqrt{\lambda_\nu}\, T + \frac{B_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}} \sin \sqrt{\lambda_\nu}\, T \right) \varphi_\nu(x,y),$$

$$A_\nu = a_\nu^g \sum_{\mu=0}^{2} \left(\frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu} \right)^\mu \iint_B \Delta^{(\mu)} F_1 \varphi_\nu\, ds\, dt + \left(\frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu} \right)^3 \iint_B \Delta^{(3)} F_1 \varphi_\nu\, ds\, dt,$$

$$B_\nu = a_\nu^g \sum_{\mu=0}^{2} \left(\frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu} \right)^\mu \iint_B \Delta^{(\mu)} F_2 \varphi_\nu\, ds\, dt + \left(\frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu} \right)^3 \iint_B \Delta^{(3)} F_2 \varphi_\nu\, ds\, dt$$

eine Lösung von

$$\frac{\partial^2 u(x,y;T)}{\partial T^2} = \Delta u(x,y;T)$$

dar, die der Randbedingung $h_1 \frac{\partial u}{\partial N} + h_2 u = 0$ genügt und so beschaffen ist, daß für alle Punkte x, y, die mindestens den Abstand $3g\varrho$ vom Rande und den C_ν haben,

$$u(x,y;0) = F_1(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y;0)}{\partial T} = F_2(x,y)$$

gilt.

Sind die Funktionen F_1 und F_2 sowie ihre Δ-Ableitungen keinen Randbedingungen unterworfen, so muß C stückweise analytisch voraus-

---

[22]) Das bedeutet soviel, als daß für C und die C_ν die Voraussetzungen von Satz 9 gelten.

gesetzt werden. Versteht man unter u_1 *die reguläre Potentialfunktion mit den Randwerten von* $F_1(x, y)$, *und unter* u_2 *die nach dem soeben angegebenen Verfahren zu bildende, am Rande verschwindende Lösung von* $\frac{\partial^2 u_2}{\partial T^2} = \Delta u_2$, *für welche außerhalb einer Umgebung von* C *und* C_ϱ $u_2(x, y; 0) = F_1(x, y) - u_1(x, y)$, $\frac{\partial u_2(x, y; 0)}{\partial T} = F_2(x, y)$ *gilt, so ist* $u = u_1 + u_2$ *eine solche Lösung von* $\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = \Delta u$, *die für alle* T *die Randwerte von* F_1 *hat und mit ihrer Ableitung nach* T *außerhalb von Streifen der Breite* $3g\varrho$ *um den Rand und die Unstetigkeitslinien von* F_1 *und* F_2 *die vorgegebenen Anfangswerte annimmt.*

(Eingegangen am 31. Oktober 1926.)

On Kakeya's problem and a similar one.

Von

A. S. Besicovitch in Kopenhagen.

Kakeya in the paper "*Some problems on maximum and minimum regarding ovals*"[1]) proposed the following problem.

Find a figure of the least area on which a segment of length 1 *can be turned through* 360° *by a continuous movement.*

It was believed that this figure was a hypocycloïd of area $\frac{\pi}{8}$, i. e. half the area of a circle of diameter 1. The problem attracted attention but until now no solution has been given[2]).

In a paper published in 1920 in a Russian Journal[3]), not knowing Kakeya's problem, I solved an equivalent one. Two volumes of this Journal were issued but they did not reach abroad because of the isolation of Russia at that time. Since then the publication of the Journal has stopped and there is no hope for the appearance of the Journal abroad. It therefore appeares of interest to republish this problem, and to give at the same time the solution of Kakeya's problem.

In my paper I constructed *a set of segments of length* 1 *of all directions, such that its Jordan measure is zero.*

It is not exactly the solution of Kakeya's problem, because the continuity condition is naturally not satisfied[4]), but in my integrability question I did not need this condition.

---

[1]) Tôhoku Science Reports **6** (July 1917), pp. 71–88.

[2]) G. D. Birkhof, The Origin, Nature and Influence of Relativity, 1925, p. 4. — J. Pál, Ein Minimumproblem für Ovale, Math. Annalen **83** (1921), pp. 311–319. — Ford, On Kakeya's minimum area problem, Bull. Amer. M. S. **28** (1922), pp. 45–53. Mr. J. Pál gave a complete solution of the problem under the restriction that the required area should be convex.

[3]) Journal de la Société des Math. et de Phys. à l'Univ. à Perm. T. II, 1920. Sur deux questions de l'intégrabilité.

[4]) By a continuous movement of a segment we mean a movement for which the coordinates of both ends of the segment are continuous functions of a parameter. It is easy to see that for any turn of the segment the set of all positions of the segment has an area >0.

For the solution of my problem I had to prove the lemma of § 7 on translation of elementary triangles. I am obliged to Doctor J. Pal for his calling my attention to the Kakeya's problem and to the fact that my lemma gives its solution (§ 9).

§ 1.

Let ABC be any triangle (fig. 1) of altitude h and area α. Divide its base AB into n equal parts and join the points of division to the vertex C (to avoid complication in the figure, only the first few of these lines are shown). Then the triangle ABC will be divided into n *elementary triangles*. Perform an arbitrary translation of each elementary

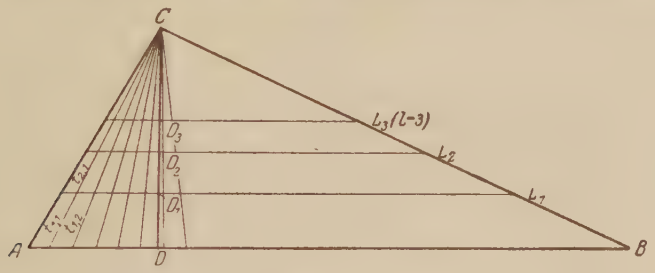


fig. 1.

triangle along the side AB (i. e. translation which leaves the base of an elementary triangle on the line AB). Now the question is, *is it possible to choose the number n and to perform the translations in such a way that the area covered by the elementary triangles in their new position is as small as we please.*

Let k be an arbitrarily great positive number. We shall show that by a certain sequence of translations we reduce the area covered by the elementary triangles to less than the k-th part of the original area.

Mark the points $D_1, D_2, \ldots, D_l$ on the altitude CD of the triangle ABC such that

$$CD_1 = \frac{2k-1}{2k} CD;\ CD_2 = \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 CD;\ \ldots;\ CD_l = \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^l CD.$$

Let l be the least number for which

$$\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^l < \sqrt{\frac{1}{2k}}. \tag{1}$$

Through the points $D_1, D_2, \ldots, D_l$ draw lines $L_1, L_2, \ldots, L_l$, parallel to AB. Every elementary triangle will be divided into l trapezia and one triangle above the lime L_l. There will be l strips of trapezia: the

first between AB and L_1, the second between L_1 and L_2, and so on. Denote the trapezia of the i-th strip by

$$t_{i,1}; t_{i,2}; \ldots; t_{i,n},$$

and the length of the lower base of each of these trapezia by a_i. We have evidently

$$a_i \frac{2k-1}{2k} = a_{i+1}.$$

§ 2.

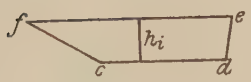


fig. 2.

Take a segment cd (fig. 2) of length ra_i $(r \geqq 1)$ and put any m consecutive trapezia of the i-th strip

$$t_{i,s+1}; t_{i,s+2}; \ldots; t_{i,s+m} \tag{2}$$

in such a way that the lower base of each of them lies entirely in the segment cd (having possibly one or both end-points in common with this segment). On this segment construct the trapezium $cdef$ whose sides cf and de are parallel respectively to the right side of the trapezium $t_{i,s+m}$ and to the left side of $t_{i,s+1}$. It is easy to see that, whatever be the disposition of the trapezia (2) on the segment cd, they will always lie entirely inside the trapezium $cdef$. We have

$$ef = ra_i + \frac{m}{2k} a_i.$$

The area of $cdef$ is equal to

$$\left[2r + \frac{m}{2k}\right] a_i \frac{h_i}{2},$$

where h_i is the altitude of the i-th strip; and the sum of the areas of the trapezia (2) is equal to

$$m\left(1 + \frac{2k-1}{2k}\right) a_i \frac{h_i}{2}.$$

Let us take m so great that the first of these two numbers is less than the second divided by $2k$. We have to satisfy the inequality

$$\left[2r + \frac{m}{2k}\right] a_i \frac{h_i}{2} < \frac{m}{2k}\left(1 + \frac{2k-1}{2k}\right) a_i \frac{h_i}{2};$$

which gives

$$m > \frac{8k^2}{2k-1} r.$$

§ 3.

Define a set of positive numbers

$$r_1, r_2, \ldots, r_l$$

and a set of positive integers

$$m_1, m_2, \ldots, m_l$$

as follows

$$(3,_1) \quad r_1 = 1, \qquad m_1 > \frac{8k^2}{2k-1} r_1,$$

$$(3,_2) \quad r_2 = \left(r_1 + \frac{m_1}{2k}\right)\frac{2k}{2k-1}, \qquad m_1 m_2 > \frac{8k^2}{2k-1} r_2,$$

$$(3,_3) \quad r_3 = \left(r_2 + \frac{m_1 m_2}{2k}\right)\frac{2k}{2k-1}, \qquad m_1 m_2 m_3 > \frac{8k^2}{2k-1} r_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(3,_l) \quad r_l = \left(r_{l-1} + \frac{m_1 m_2 \ldots m_{l-1}}{2k}\right)\frac{2k}{2k-1}, \qquad m_1 m_2 \ldots m_l > \frac{8k^2}{2k-1} r_l$$

and put

$$n = m_1 m_2 \ldots m_l.$$

§ 4.

The first operation.

Divide the elementary triangles into groups, each containing m_1 consecutive triangles. Translate the elementary triangles of each group in

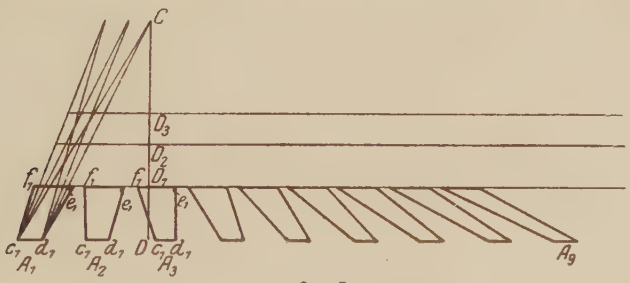


fig. 3.

such a way that the base of each triangle coincides with the base of the first triangle of the group (fig. 3). We obtain $m_2 m_3 \ldots m_l = n_2$ figures

$$(4) \qquad A_1, A_2, \ldots, A_{n_2}.$$

On the base of every figure A_j are placed m_1 consecutive trapezia of the first strip. Corresponding to every A_j construct the trapezium $c_1 d_1 e_1 f_1$ in the first strip, as described in § 2. We shall have

$$c_1 d_1 = a_1, \qquad (r_1 = 1), \qquad f_1 e_1 = \left(1 + \frac{m_1}{2k}\right) a_1.$$

By $(3,_1)$ and by § 2 we conclude that the area of $c_1 d_1 e_1 f_1$ is less than the $2k$-th part of the sum of the m_1 areas of the consecutive trapezia of the first strip which were translated into $c_1 d_1 e_1 f_1$ by the first operation. Therefore the sum of all trapezia $c_1 d_1 e_1 f_1$ and a fortiori of

the parts of all figures (4) included in the first strip is less than the area of the first strip of the triangle ABC divided by $2k$. The same relation will hold whatever translations we may give to the figures (4) without deforming them.

§ 5.

The second operation.

Let us now divide the figures (4) into groups, each of m_2 consecutive figures. Translate the figures (4) of each group in such a way that

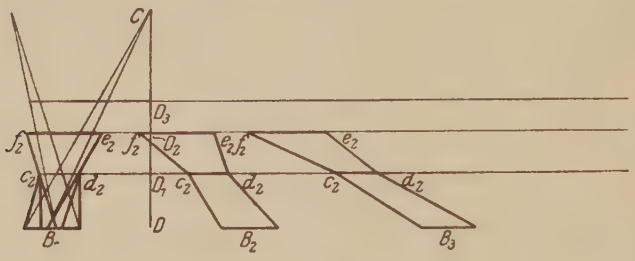


fig. 4.

the segment $e_1 f_1$ of each figure coincides with the segment $e_1 f_1$ of the first figure of the group (fig. 4). We obtain $m_3 m_4 \ldots m_l = n_3$ figures

$$B_1, B_2, \ldots, B_{n_3}. \tag{5}$$

Each B_i $(i = 1, 2, \ldots, n_3)$ has a segment $e_1 f_1$, which is the common position of m_2 coincident segments. Denote by $c_2 d_2$ these coinciding segments. On the segment $c_2 d_2$ of every B_i are placed $m_1 m_2$ consecutive trapezia of the second strip. Corresponding to the segment $c_2 d_2$ of every B_i construct the trapezium as described in § 2. We shall have

$$c_2 d_2 = e_1 f_1 = \left(r_1 + \frac{m_1}{2k}\right) a_1 = \left(r_1 + \frac{m_1}{2k}\right) \frac{2k}{2k-1} a_2 = r_2 a_2;$$

$$e_2 f_2 = \left(r_2 + \frac{m_1 m_2}{2k}\right) a_2.$$

By (3_2) and by § 2 we conclude that the area of $c_2 d_2 e_2 f_2$ is less than the $2k$-th part of the sum of the $m_1 m_2$ areas of the consecutive trapezia of the second strip, which were translated into $c_2 d_2 e_2 f_2$, by the first and second operations. Therefore the sum of all trapezia $c_2 d_2 e_2 f_2$ and a fortiori of the parts of all figures (5) included in the second strip is less than the area of the second strip of the triangle ABC divided by $2k$. The same relation will hold whatever translations we may give to the figures (5) without deforming them.

§ 6.

The third operation.

Divide the figures (5) into groups, each of m_3 consecutive figures. Translate the figures (5) of each group in such a way that the segment $e_2 f_2$ of each figure coincides with the same segment of the first figure of the group (fig. 5). We obtain $m_4 m_5 \dots m_l = n_4$ figures

(6) $\qquad C_1, C_2, \dots, C_{n_4}.$

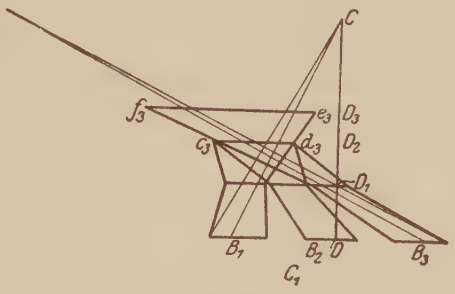


fig. 5.

Each of these figures has a segment $e_2 f_2$, which is the common position of m_3 coincident segments. Denote by $c_3 d_3$ these coinciding segments. On the segment $c_3 d_3$ of every C_i $(i = 1, 2, \dots, n_4)$ are placed $m_1 m_2 m_3$ consecutive trapezia of the third strip. Corresponding to the segment $c_3 d_3$ of every C_i construct the trapezium $c_3 d_3 e_3 f_3$ as described in § 2. We shall have

$$c_3 d_3 = e_2 f_2 = \left(r_3 + \frac{m_1 m_2}{2k}\right) \frac{2k}{2k-1} a_3 = r_3 a_3,$$

$$e_3 f_3 = \left(r_3 + \frac{m_1 m_2 m_3}{2k}\right) a_3.$$

In the same way as in § 4 and § 5 we see that the sum of all the parts of figures (6) included in the third strip is less than the area of the third strip of the triangle ABC divided by $2k$.

§ 7.

Proceeding in this way we perform l consecutive operations. By observing that $n = m_1 m_2 \dots m_l$ we see that we shall obtain the single figure T as a result of all these operations (fig. 5). The area of the part of T included in any of strips is less than the area of the part of the triangle ABC included in the same strip divided by $2k$. Therefore the area of the part of T lying below the line L_l is less than the similar part of the triangle ABC divided by $2k$ and a fortiori less than the area of the whole triangle ABC divided by $2k$. On the other hand the area of the part of T lying above the line L_l cannot be greater than the area of the similar part of the triangle ABC and consequently by (1) is also less than the area of ABC divided by $2k$; from which we conclude that *the area of T is less than the area of ABC divided by k.*

Thus by a proper choice of n we can, by means of the above trans-

lations, render the area covered by the elementary triangles as small as we please.

We denote by R_k the set of all l of our operations.

Remark 1. The base of every elementary triangle remains on AB in the course of all translations; therefore the distance between the vertices of any two elementary triangles of the figure T is less than AB.

Remark 2. In the course of all operations all elementary triangles are translated only to the left.

§ 8.

Consider a circle with centre at the origin O, and radius 1. Describe about this circle an equilateral triangle ABC and join the point O to the points A, B, C. Perform the operation R_{2k} on each of the triangles OAB, OBC, OCA, taking as their bases AB, BC, CA respectively. The elementary triangles in their new position will cover an area less than the area of ABC divided by $2k$ and a fortiori less than the area of the circle divided by k.

Our circle is divided by elementary triangles into sectors, the number of which is equal to the number of elementary triangles. We may consider translations of elementary triangles as translations of the sectors. Denote by U the figure formed by all the sectors in their final position. The area of U is less than or equal to the sum of the areas of the three figures T corresponding to the triangles OAB, OBC, OCA. Consequently we have constructed an arbitrarily small area which contains segments of length 1 in all directions.

§ 9.

Consider now any two consecutive sectors OD_1D_2, OD_3D_4 (fig. 6). Since two of their sides are parallel (e. g. $OD_2 \parallel OD_3$) we can take two radii OD_2', OD_3' which form an arbitrarily small angle. At their point of intersection, E, we take the sector $EG_2'G_3'$ of radius 1. Consider the figure F consisting of the sectors OD_1D_2, OD_3D_4, $EG_2'G_3'$ and of lines ED_2', ED_3'. Turn the segment OD_1 about the point O until it coincides with OD_2', then move it along the line $D_2'E$ until it coincides with EG_2', then turn it to EG_3', then move it along ED_3' until it coincides with OD_3', and then turn it to OD_4. Thus we have turned a segment of length 1 from the position OD_1 to OD_4 by a continuous movement remaining always on the figure F.

fig. 6.

Observe that the area of $EG_2'G_3'$ may be arbitrarily small.

§ 10.

Corresponding to any two consecutive sectors of U construct a figure F, and denote by V the set U enlarged in this way.

By § 9 we see that the difference between the area of V and the area of U may be arbitrarily small; and that we can turn a segment of length 1 by a continuous movement through 360° remaining always on the figure V. Since k is arbitrary, the area of U and consequently of V may be arbitrarily small. Thus the solution of Kakeya's problem is as follows. *There are figures of arbitrarily small area in which it is possible to turn a segment of length* 1 *through* 360° *by a continuous movement and remaining always in the figure.*

§ 11.

We shall now show by means of our lemma how to construct the set mentioned in § 1, i. e. a set of segments of length 1 in all directions such that its Jordan measure is zero.

Let us take again the triangle ABC of § 1, and assume that its area is equal to α. Consider the set D of segments joining the point C to each point of AB. Let

$$k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$$

be a set of positive numbers such that $k_{i+1} > 2k_i$ for every i. Perform the operation R_{k_1} on the triangle ABC and denote by T_1 the figure formed by the elementary triangles in their final position. We consider the operation R_{k_1} and the similar further operations as operations of translation of segments of the set D. To avoid ambiguity, assume that any segment of D, which is a common side of two elementary triangles, is connected, during the translations with the triangle on the right hand side.

Let l_1 be the number of all the elementary triangles of the figure T_1. Border the left side of each elementary triangle with a parallelogram of base $\frac{AB}{2k_1 l_1}$ (fig. 7). Denote by S_1 the figure T_1 enlarged in this way. Since the area of T_1 is $< \frac{\alpha}{k_1}$ the area of S_1 is $< \frac{2\alpha}{k_1}$.

fig. 7.

Divide the base of each elementary triangle of T_1 into equal parts of length $< \frac{AB}{4k_1 l_1}$ and join the points of division to the vertex of the elementary triangle. Denote by U_1 the system of all triangles obtained in this way. Perform the operation R_{k_2} on each triangle of the set U_1. We shall obtain a new figure which we denote by T_2. The area of figure T_2

is $< \frac{\alpha}{k_2}$, because the operation R_{k_2} decreases the area of each triangle of U_1 more than k_2 times. Let l_2 be the number of elementary triangles of the figure T_2. Border the left side of each triangle of T_2 by a parallelogram of base $\frac{AB}{2k_2 l_2}$. Denote by S_2 the figure T_2 enlarged in this way. The area of S_2 is $< \frac{2\alpha}{k_2}$. Divide now the base of each triangle of T_2 into equal parts of length $< \frac{AB}{4k_2 l_2}$ and join the points of division to the vertex of the elementary triangle. We shall obtain a new system of triangles U_2. Repeat the process, and we shall have the figures T_3, S_3, the set of triangles U_3 and so on. We shall always have the area of $T_i < \frac{\alpha}{k_i}$, the area of $S_i < \frac{2\alpha}{k_i}$, and the length of the base of a triangle of the set $U_i < \frac{AB}{4k_i l_i}$.

All the operations $R_{k_1}, R_{k_2}, R_{k_3}, \ldots$ translate the segments of D only to the left, leaving their lower ends always on the segment AB. Consequently each segment of D tends to some limit position. Denote by E the set of segments of D in their limit positions. We shall prove the following proposition.

The Jordan measure of the set E is zero.

The sequence of operations $R_{k_1}, R_{k_2}, \ldots, R_{k_i}$ translates all the segments of the set D from their original positions in the triangle ABC to their positions in the figure T_i. Observe that the operation $R_{k_{j+1}}$ performed on the triangles of U_j $\left(\text{all of bases} < \frac{AB}{4k_j l_j}\right)$ translates the segments of D from their position on the figure T_j through a distance $< \frac{AB}{4k_j l_j}$. Consequently the operations $R_{k_{i+1}}, R_{k_{i+2}}, \ldots$ translate the segments of D from their position on the figure T_i through a distance less than

$$\frac{AB}{4k_i l_i} + \frac{AB}{4k_{i+1} l_{i+1}} + \frac{AB}{4k_{i+2} l_{i+2}} + \ldots < \frac{AB}{4l_i}\left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i+1}} + \frac{1}{k_{i+2}} + \ldots\right)$$
$$< \frac{AB}{4l_i}\left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{2k_i} + \frac{1}{2^2 k_i} + \ldots\right) < \frac{AB}{2k_i l_i}.$$

Therefore the segments of E all lie in the figure S_i for each value of i. Thus the Jordan measure of the set E is less than the area of S_i for every i, i. e. less than $\frac{2\alpha}{k_i}$ for every i. Consequently the Jordan measure of E is zero.

If we make the same construction corresponding to three triangles of § 8, we obtain the required set.

(Eingegangen am 1. November 1926.)

Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper. III.

Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summen von totalpositiven Primzahlen in einem beliebigen Zahlkörper.

Von

Hans Rademacher in Breslau.

Inhaltsverzeichnis.

1. Einleitung.
2. Zahlen- und gruppentheoretische Hilfssätze.
   - 2.1. Die Farey-Zerschneidung.
   - 2.2. Verallgemeinerte Ramanujansche Summen.
   - 2.3. Über Charaktere von Kongruenzklassengruppen.
   - 2.4. Über die Einheiten und über die Heckeschen Größencharaktere.
3. Verallgemeinerung einer Heckeschen Formel.
4. Funktionentheoretische Hilfssätze.
   - 4.1. Über die Heckeschen Zetafunktionen.
   - 4.2. Ein Hilfssatz über die Γ-Funktion.
   - 4.3. Über die hypergeometrische Funktion.
5. Die Fundamentalfunktion.
6. Asymptotische Auswertung der Koeffizienten des Produktes mehrerer Fundamentalfunktionen.
7. Beweis der Hauptsätze.

1. Einleitung.

1.1. Die von den Herren Hardy und Littlewood in ihrer grundlegenden Arbeit über die additive Primzahltheorie[1]) eingeführte und von Herrn Landau vereinfachte Methode[2]) habe ich in zwei Arbeiten auf die additive Primzahltheorie der quadratischen Zahlkörper übertragen[3]). Der Übertragung auf beliebige, vor allem auf nicht totalreelle Körper standen aber noch gewisse Schwierigkeiten im Wege, die in der vorliegenden Arbeit überwunden worden sind. Die dazu benötigten Untersuchungen haben zugleich auch einige Sachverhalte in den quadratischen Körpern in ein klareres Licht gerückt, so daß die vorliegende Abhandlung bei der Spezialisation auf den Körpergrad $n = 2$ an manchen Stellen einfacher ausfallen würde als meine erwähnten früheren Arbeiten. Für das Verständnis der vorliegenden Arbeit wird nirgends die Kenntnis einer der beiden früheren benötigt. Durch eine Bezugnahme auf sie hätte ich doch kaum an Kürze gewinnen können, und daher habe ich es vorgezogen, den allgemeinen Fall jetzt völlig unabhängig von der früheren Erledigung zweier spezieller Fälle zu behandeln.

Zur Bewältigung der Probleme des Körpers n-ten Grades war die Beschaffung einer Reihe von neuen Hilfsmitteln nötig, die wohl auch an sich von Interesse sind. Ich weise nur auf die neue Fassung der Farey-Zerschneidung (**2.1**), auf die verallgemeinerten Ramanujanschen Summen (**2.2**), auf die Untersuchung der Heckeschen λ-Charaktere in ihrer Abhängigkeit von ihrem Modul (**2.4**), auf die Verallgemeinerung einer Heckeschen Formel, durch die eine nach den Einheiten gewonnene Summe umgeformt wird (**3**, Hilfssatz 14), und auf die Abschätzung der hypergeometrischen Funktion (**4.33**, Hilfssatz 19) hin. Ich habe diese Ergebnisse, in Hilfssätzen formuliert, der eigentlichen Durchführung des Beweisganges, die in **5.** beginnt, vorangestellt, nicht nur, um später den Gang der Rechnung nicht zu unterbrechen, sondern auch, weil sie so, nach inneren Gesichtspunkten geordnet, unabhängig von ihrer späteren Verwendung zur Geltung kommen können.

Verstehen wir unter einer Primzahl ϖ eine solche Körperzahl, deren Hauptideal ein Primideal ist, so ist unser Hauptproblem, die Anzahl der Darstellung einer totalpositiven Körperzahl ν als Summe von m total-

[1]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some Problems of "Partitio Numerorum" III: On the Expression of a Number as a Sum of Primes, Acta Mathem. **44** (1922), p. 1—70.

[2]) E. Landau, Zur additiven Primzahltheorie, Rend. Circ. Mat. Palermo **46** (1922), S. 349—356.

[3]) Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper, I, II. Abhandl. a. d. Math. Seminar d. Hamburgischen Universität **3** (1924), S. 109—163, 331—378.

positiven Primzahlen ϖ zu untersuchen. Während aber im totalreellen Körper die Totalpositivität von ν und von den Summanden ϖ es nach sich zieht, daß $0 < \varpi^{(q)} < \nu^{(q)}$ für alle Konjugierten von ν und ϖ gilt und daher die Darstellungszahl nur endlich sein kann, so braucht dies im nicht totalreellen Körper nicht so zu sein. Daher untersuchen wir in beliebigen Körpern statt der Darstellungszahl den allgemeinen Ausdruck

$$(1.11) \qquad \sum_{\substack{\varpi_1+\ldots+\varpi_m=\nu \\ \varpi_j \succ 0}} e^{-\sum_{q=1}^{n} \frac{|\varpi_1^{(q)}|+\ldots+|\varpi_m^{(q)}|}{|\nu^{(q)}|}},$$

worin wir das auch im folgenden beibehaltene Zeichen $\succ 0$ für die Totalpositivität benutzt haben. Der Ausdruck (1.11) ist stets endlich; diejenigen Darstellungen von ν, deren Summanden große Beträge ihrer Konjugierten aufweisen, fallen in (1.11) wenig ins Gewicht. Für totalreelle Körper geht dieser Ausdruck aber, von einem trivialen Faktor e^{-n} abgesehen, in die eigentliche Darstellungszahl über.

Die Untersuchung von (1.11) bedeutet die direkte Verallgemeinerung meiner erwähnten früheren Arbeiten auf den Körper n-ten Grades. Darüber hinausgehend schreibe ich jetzt den Primzahlsummanden noch die Lage in Restklassen nach einem festen Modul $\mathfrak{A}$ vor, so daß also folgende Ausdrücke zu betrachten sind

$$(1.12) \qquad \sum_{\substack{\varpi_1+\ldots+\varpi_m=\nu \\ \varpi_j \equiv \alpha_j \bmod \mathfrak{A} \\ \varpi_j \succ 0}} e^{-\sum_{q=1}^{n} \frac{|\varpi_1^{(q)}|+\ldots+|\varpi_m^{(q)}|}{|\nu^{(q)}|}}$$

mit vorgeschriebenen, zu $\mathfrak{A}$ teilerfremden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.[4]) Die asymptotische Darstellung des Ausdrucks (1.12) findet man im Hauptsatz 2 angegeben.

Der Hauptsatz 1 bezieht sich nur auf totalreelle Körper, handelt aber dafür von einer Ausdehnung des Problems nach einer ganz anderen Seite. Die einzelnen Summen werden hier nicht wie in (1.12) mit Gewichten gegen Null konvergierender Beträge versehen, sondern sozusagen mit Richtungsfaktoren versehen, deren Beträge sämtlich gleich 1 sind. Diese Richtungsfaktoren werden uns von den Heckeschen Größencharakteren $A(\mu)$ geliefert, so daß es sich also um das asymptotische Verhalten des Ausdrucks

[4]) Analoge Kongruenzbedingungen habe ich im Fall des rationalen Körpers eingeführt in meiner Arbeit „Über eine Erweiterung des Goldbachschen Problems", Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 627—657.

$$(1.13)\qquad \sum_{\substack{\varpi_1+\ldots+\varpi_m=\nu \\ \varpi_j\equiv\alpha_j \bmod \mathfrak{N} \\ \varpi_j\succ 0}} \Lambda_1(\varpi_1)\ldots\Lambda_m(\varpi_m)$$

handelt. Das sich hier ergebende, in Hauptsatz 1 formulierte Resultat ist höchst überraschend. Man könnte nämlich erwarten, daß, wenn nicht sämtliche Λ_j Hauptcharaktere sind, die Summe (1.13) infolge gegenseitiger Kompensationen der Summanden von niedrigerer Größenordnung ist, als wenn die Λ_j sämtlich identisch gleich 1 sind. Eine solche Vermutung würde nahegelegt durch das Heckesche Resultat

$$\sum_{N(\mathfrak{p})<x} \lambda((\mathfrak{p})) = o\left(\frac{x}{\log x}\right),^{5})$$

während bekanntlich

$$\sum_{N(\mathfrak{p})<x} 1 \sim \frac{x}{\log x}$$

ist. Statt dessen stellt es sich heraus, daß der Ausdruck (1.13) die gleiche Größenordnung, nämlich

$$(1.14)\qquad \frac{N(\nu)^{m-1}}{(\log N(\nu))^m}$$

bei jeder Wahl der Λ_j besitzt. Die Formel (7.57) des Hauptsatzes 1 zeigt, daß die asymptotische Abhängigkeit von ν eine besonders klare ist. Abgesehen von der Größenordnung (1.14) tritt ν nämlich nur noch in dem Richtungsfaktor $\prod_{j=1}^{m} \Lambda_j(\nu)$ auf. Die einzige Auswirkung der $\Lambda_1, \ldots \Lambda_m$ auf das asymptotische Verhalten des Betrages von (1.13) zeigt die Formel (7.57) in dem aus Γ-Funktionen aufgebauten Faktor, und zwar wird dieser Faktor um so kleiner, je weiter die Größencharaktere Λ_j vom Hauptcharakter entfernt liegen, ist aber für jede Wahl von $\Lambda_1, \ldots \Lambda_m$ fest, von ν unabhängig. Die Rechnung zeigt auch, daß die sogenannte „singuläre Reihe“ (6.84) keineswegs von den Λ_j beeinflußt wird.

In dem größten Teil der vorliegenden Arbeit wird nun weder (1.12) noch (1.13) behandelt, sondern eine für beliebige Zahlkörper brauchbare Kombination beider Ausdrücke, nämlich

$$(1.15)\qquad \Lambda_m(\nu) = \sum_{\substack{\varpi_1+\ldots+\varpi_m=\nu \\ \varpi_j\equiv\alpha_j \bmod \mathfrak{N} \\ \varpi_j\succ 0}} \Lambda_1(\varpi_1)\ldots\Lambda_m(\varpi_m)\cdot e^{-\sum_{q=1}^{n} \frac{|\varpi_1^{(q)}|+\ldots+|\varpi_m^{(q)}|}{|\nu^{(q)}|}}$$

Die Diskussion dieses Ausdrucks in seiner vollen Allgemeinheit stößt jedoch zum Schluß auf eine eigentümliche Schwierigkeit, nämlich die Frage

[5]) E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen II, Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 11—51, insbes. § 7. S 35.

des Nichtverschwindens des in (6.78) mit T_m bezeichneten Terms. Nur für die in den beiden Hauptsätzen betrachteten Fälle konnte ich bisher das Nichtverschwinden von T_m nachweisen.

Wie in meinen beiden Arbeiten über die quadratischen Zahlkörper, so spielen auch hier die Heckeschen $\zeta(s, \lambda)$-Funktionen die Hauptrolle. Und genau so wie in den bisherigen Untersuchungen zur additiven Primzahltheorie gelangt man auch hier nicht zu endgültig bewiesenen Sätzen. Vielmehr enthalten die beiden Hauptsätze eine Annahme über die Lage der Nullstellen der sämtlichen Heckeschen $\zeta(s, \lambda)$-Funktionen des Körpers. Wenn wir unter Θ die obere Grenze der Realteile aller Nullstellen aller $\zeta(s, \lambda)$ des Körpers verstehen, so lautet diese, der bekannten Hardy-Littlewoodschen analoge Hypothese:

Es sei

$$\Theta < \frac{3}{4}. \tag{1.16}$$

Ich habe die Annahme (1.16) jedoch erst ganz am Schlusse der vorliegenden Arbeit in (7.52) eingeführt, und zwar bei dem Vergleich der Größenordnung des Hauptgliedes in (6.82) mit der Größenordnung des von Θ abhängenden O-Gliedes. Bis dahin werden alle Rechnungen mit einem Θ durchgeführt, von dem nur $\frac{1}{2} \leqq \Theta \leqq 1$ bekannt ist. Selbst wenn also (1.16) nicht zutreffen sollte, so würden nur die beiden Hauptsätze bedeutungslos werden, die Hilfssätze und die weiteren Rechnungen jedoch richtig bleiben.

Nicht nur wegen ihres hypothetischen Charakters möchte ich auf die in den Hauptsätzen formulierten Resultate nicht den Hauptakzent der folgenden Untersuchungen legen. Das Wesentliche der vorliegenden Arbeit sehe ich vielmehr in dem Aufsuchen analytischer Funktionen, die der zu untersuchenden Struktur des Zahlkörpers angepaßt sind und diese Struktur in gewisser Weise widerspiegeln. In dieser Hinsicht leistet der Hilfssatz 14 das Wichtigste, da durch seine Vermittlung schließlich die für unser Problem besonders geeigneten Heckeschen $\zeta(s, \lambda)$-Funktionen in der Beweisführung auftreten.

Ich bemerke noch, daß außer der Hypothese (1.16) noch eine weitere, allerdings weniger belangvolle Einschränkung zu machen ist: genau so wie in den Hardy-Littlewoodschen Untersuchungen gelangt man auch hier nur zu Aussagen über Darstellungen durch Summen von mindestens drei Primzahlsummanden.

1.2. Es mögen hier noch die Festsetzungen und Bezeichnungen zusammengestellt werden, von denen im folgenden immer wieder Gebrauch gemacht worden ist.

Der zugrunde liegende Zahlkörper sei vom Grade n und befinde sich unter r_1 reellen und $2r_2$ komplexen konjugierten Zahlkörpern, $r_1 + 2r_2 = n$. Die konjugierten Zahlkörper unterscheiden wir durch obere Indizes, z. B. $\mu^{(q)}$, und zwar ordnen wir die konjugierten Körper so, daß die Indizes $q = 1, 2, \ldots, r_1$ den reellen und $q = r_1 + 1, \ldots, n$ den $2r_2$ komplexen Körpern zukommen. Wie üblich, bezeichnen wir mit r die Anzahl der Einheiten des Körpers; es ist $r = r_1 + r_2 - 1$. Der Zahlkörper habe ferner die Diskriminante d und die Differente $\mathfrak{d}$.

Nach dem Vorgange von Herrn Hecke werde nun der Zahlkörper zu dem Bereiche $\mathfrak{Z}$ idealer Zahlen erweitert, die durch $\hat{\mu}$, $\hat{\alpha}$, ... usw. bezeichnet werden sollen[6]). Jede ideale Zahl repräsentiert ein Ideal, und alle Repräsentanten desselben Ideals unterscheiden sich nur um Einheitsfaktoren, die Körperzahlen sind. Der Bereich $\mathfrak{Z}$ kann auch aufgefaßt werden als ein kleinster den Zahlkörper enthaltender Bereich, in dem außer der Multiplikation und der Division auch die Operation des Aufsuchens des größten gemeinsamen Teilers ausnahmslos durchführbar ist und dessen sämtliche Einheiten dem zugrunde gelegten Zahlkörper angehören. Den Idealklassen des Zahlkörpers entsprechend zerfällt der Bereich $\mathfrak{Z}$ der idealen Zahlen in Klassen idealer Zahlen. Innerhalb einer Klasse ist die Addition ausführbar.

Für Primzahlen des Körpers ist das Zeichen ϖ reserviert, für ideale Primzahlen demgemäß das Zeichen $\hat{\varpi}$. Das gewöhnliche π bedeutet dagegen wie üblich die kleinste positive Nullstelle der Funktion $\sin z$.

Die in der Rechnung auftretenden positiven Konstanten sind, soweit es auf ihren Wert nicht ankommt, ohne Unterschied mit C bezeichnet worden, ohne Rücksicht auf ihre Gleichheit oder Verschiedenheit. Die Konstanten C brauchen keine absoluten zu sein; außer von dem zugrunde gelegten Zahlkörper können sie noch abhängen von Θ, ε, m und dem Ideal $\mathfrak{A}$, sowie von den m bestimmten Größencharakteren $\Lambda_1(\hat{\mu}), \ldots \Lambda_m(\hat{\mu})$. Unabhängig sind sie dagegen von der zu zerlegenden Zahl ν,[7]) von den Summations- und Integrationsvariablen und von den Variablen der auftretenden analytischen Funktionen. Wegen der Vielheit der vorkommenden Variablen habe ich das O-Zeichen erst zum Schluß angewendet, und zwar nur im Sinne wachsender $N(\nu)$.

1.3. Einige im folgenden häufiger zitierte Bücher und Abhandlungen

---

[6]) In dem Bereiche $\mathfrak{Z}$ sind also die Körperzahlen selbst in ähnlicher Weise als spezielle ideale Zahlen enthalten, wie z. B. im Bereiche aller komplexen Zahlen die reellen Zahlen als spezielle komplexe Zahlen vorkommen.

[7]) Sie sind übrigens auch, wie man sich bei jedem einzelnen Schritt der Rechnung überzeugen kann, unabhängig von der Wahl der zu $\mathfrak{A}$ teilerfremden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

führe ich in der folgenden Liste auf; im Texte sind diese Schriften dann in leicht erkennbarer Abkürzung zitiert.

E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. (Zweite Mitteilung.) Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 11—51.

— Analytische Funktionen und algebraische Zahlen, I. Teil. Abhandl. a. d. Math. Seminar d. Hamburgischen Universität 1 (1922), S. 102—126.

— Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923.

E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Leipzig u. Berlin 1918.

— Über Ideale und Primideale in Idealklassen, Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 52—154.

G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, University Press, 1922.

2. Zahlen- und gruppentheoretische Hilfssätze.

2.1. Die Farey-Zerschneidung.

2.1. Die Variablen $z_1, z_2, \ldots, z_{r_1}$ seien reell, $z_{r_1+1}, \ldots z_n$ komplex, jedoch mit der Einschränkung, daß $z_{p+r_2} = \bar{z}_p$ für $r_1 < p \leqq r_1 + r_2$ sei. Die Menge der „Punkte“ $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ bildet eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, die durch eine verallgemeinerte, zur Zahl M gehörende Farey-Zerschneidung zerlegt werden soll, deren Eigenschaften in den Hilfssätzen 2 bis 4 beschrieben werden. Hilfssatz 1 dient zur Vorbereitung [8]).

Hilfssatz 1. *Es sei* $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ *eine Basis des Körpers,* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *eine Basis des Ideals* $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ ($\mathfrak{d}$ *die Differente des Körpers*). *Es sei ferner* $M > N(\mathfrak{d})$. *Zu jedem Punkt* $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *aus* $\mathfrak{M}$ *gibt es dann eine Körperzahl von der Gestalt*

$$\gamma = \frac{a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_n\omega_n}{b_1\Omega_1 + b_2\Omega_2 + \ldots + b_n\Omega_n} \tag{2.11}$$

von der Art, daß

$$|z_q - \gamma^{(q)}| \leqq \frac{1}{M^{\frac{1}{n}} \left| b_1\Omega_1^{(q)} + \ldots + b_n\Omega_n^{(q)} \right|} \tag{2.12}$$

und

$$0 < \left| b_1\Omega_1^{(q)} + \ldots + b_n\Omega_n^{(q)} \right| \leqq M^{\frac{1}{n}} \qquad (q = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.13}$$

worin $a_1, a_2, \ldots, a_n, \; b_1, b_2, \ldots, b_n$ *ganze rationale Zahlen sind.*

[8]) Hilfssatz 1 rührt von Herrn Siegel (Math. Annalen 88, S. 184—210, speziell S. 189, Hilfssatz 4) her. Die in unseren Hilfssätzen 2 bis 4 dargestellte Farey-Zerschneidung hat den Vorzug, in **6.5** eine vom Körpergrad nicht abhängende Größenordnung des Restgliedes zu geben. Wenn dies auch für das vorliegende Problem nicht entscheidend ist, so ist es doch von methodischer Bedeutung.

Beweis. Die $2n$ Ungleichungen

$$\begin{aligned} &|z_q(b_1\Omega_1^{(q)}+b_2\Omega_2^{(q)}+\ldots+b_n\Omega_n^{(q)}) \\ &\qquad -(a_1\omega_1^{(q)}+a_2\omega_2^{(q)}+\ldots+a_n\omega_n^{(q)})| \leqq M^{-\frac{1}{n}} \\ &|b_1\Omega_1^{(q)}+b_2\Omega_2^{(q)}+\ldots+b_n\Omega_n^{(q)}| \leqq M^{\frac{1}{n}} \qquad (q=1,2,\ldots,n), \end{aligned} \tag{2.14}$$

in denen das Produkt der $2n$ rechten Seiten gleich dem absoluten Betrag der Determinante der $2n$ linksstehenden Linearformen ist, lassen nach Minkowski[9]) eine nicht triviale Lösung in ganzen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zu. Speziell sind nicht sämtliche b dieser Lösung gleich Null, da sonst aus den n ersten Ungleichungen (2.14)

$$|N(a_1\omega_1+a_2\omega_2+\ldots+a_n\omega_n)| \leqq \frac{1}{M} < \frac{1}{N(\mathfrak{d})}$$

folgen würde gegen die Voraussetzung, daß $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ eine Basis von $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ ist. Aus (2.14) gehen (2.12) und (2.13) dann sofort hervor.

Hilfssatz 2. *Es sei wieder $M > N(\mathfrak{d})$. Zu jeder Körperzahl γ, für die die Norm des Nenners $\mathfrak{a}$ von $\gamma\mathfrak{d}$ höchstens gleich M ist, werde aus $\mathfrak{M}$ der Bereich $\mathfrak{G}_\gamma$ durch die Ungleichung*

$$\prod_{q=1}^{n}\left(1+M^{\frac{2}{n}}|z_q-\gamma^{(q)}|\right) \leqq \frac{2^n M}{N(\mathfrak{a})} \tag{2.15}$$

ausgeschnitten. Die Gesamtheit dieser $\mathfrak{G}_\gamma$ überdeckt $\mathfrak{M}$ völlig.

Beweis. Es sei $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{M}$. Zu beweisen ist, daß er einem $\mathfrak{G}_\gamma$ angehört. Zu $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ nehmen wir eine der ihm nach Hilfssatz 1 zugeordneten Körperzahlen γ, aus deren Darstellung (2.11) man erkennt, daß der Nenner $\mathfrak{a}$ von $\gamma\mathfrak{d}$ die Bedingung von Hilfssatz 2 erfüllt. Wir werden zeigen, daß in dem $\mathfrak{G}_\gamma$ zu diesem γ der Punkt $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ liegt. In der Tat, nach (2.12) und (2.13) ist

$$\begin{aligned} \prod_{q=1}^{n}\left(1+M^{\frac{2}{n}}|z_q-\gamma^{(q)}|\right) &\leqq \prod_{q=1}^{n}\left(1+\frac{M^{\frac{1}{n}}}{|b_1\Omega_1^{(q)}+\ldots+b_n\Omega_n^{(q)}|}\right) \\ &= \frac{1}{|N(b_1\Omega_1+\ldots+b_n\Omega_n)|}\prod_{q=1}^{n}\left(|b_1\Omega_1^{(q)}+\ldots+b_n\Omega_n^{(q)}|+M^{\frac{1}{n}}\right) \\ &\leqq \frac{2^n M}{|N(b_1\Omega_1+\ldots+b_n\Omega_n)|} \leqq \frac{2^n M}{N(\mathfrak{a})}, \end{aligned}$$

dies heißt aber nach (2.15), daß $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ wirklich zu $\mathfrak{G}_\gamma$ gehört, was zu beweisen war.

[9]) Minkowski, Geometrie der Zahlen (Leipzig 1910).

Hilfssatz 3. *Für die γ des vorigen Hilfssatzes liegen die zu verschiedenen γ gehörenden Bereiche $\mathfrak{H}_\gamma$*

$$\prod_{q=1}^{n}\left(1+M^{\frac{2}{n}}\,|z_q-\gamma^{(q)}|\right)\leqq\frac{M}{\sqrt{N(\mathfrak{b})\,N(\mathfrak{a})}} \tag{2.16}$$

getrennt. Außerdem ist $\mathfrak{H}_\gamma$ in $\mathfrak{G}_\gamma$ enthalten[10]).

Beweis. Die zweite Behauptung folgt einfach daraus, daß (2.16) eine stärkere Einschränkung als (2.15) bewirkt. Nehmen wir gegen die erste Behauptung an, daß der Punkt $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sowohl zu $\mathfrak{H}_{\gamma_1}$ als auch zu $\mathfrak{H}_{\gamma_2}$ gehöre. Es sei $\mathfrak{a}_1$ der Nenner von $\gamma_1\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_2$ der Nenner von $\gamma_2\mathfrak{b}$. Nach (2.16) ist dann einerseits

$$\begin{aligned}\frac{M^2}{N(\mathfrak{b})\,N(\mathfrak{a}_1)\,N(\mathfrak{a}_2)}&\geqq\prod_{q=1}^{n}\left(1+M^{\frac{2}{n}}\,|z_q-\gamma_1^{(q)}|\right)\prod_{q=1}^{n}\left(1+M^{\frac{2}{n}}\,|z_q-\gamma_2^{(q)}|\right)\\&\geqq\prod_{q=1}^{n}\left(1+M^{\frac{2}{n}}\,|\gamma_1^{(q)}-\gamma_2^{(q)}|\right)>\prod_{q=1}^{n}\left(M^{\frac{2}{n}}\,|\gamma_1^{(q)}-\gamma_2^{(\gamma)}|\right)\\&=M^2\,|N(\gamma_1-\gamma_2)|\,,\end{aligned}$$

also

$$|N(\gamma_1-\gamma_2)|<\frac{1}{N(\mathfrak{b})\,N(\mathfrak{a}_1)\,N(\mathfrak{a}_2)}\,. \tag{2.17}$$

Nun ist aber anderseits, wenn die Ideale $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ durch die ganzen idealen Zahlen $\hat{\delta}$, $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$ repräsentiert werden,

$$\gamma_1\hat{\delta}=\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\alpha}_1},\qquad\gamma_2\hat{\delta}=\frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\alpha}_2}$$

mit ganzen idealen Zahlen $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, also

$$|N(\gamma_1-\gamma_2)|=\frac{|N(\gamma_1\hat{\delta}-\gamma_2\hat{\delta})|}{N(\mathfrak{b})}=\frac{1}{N(\mathfrak{b})}\left|N\left(\frac{\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_2-\hat{\beta}_2\hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2}\right)\right|\geqq\frac{1}{N(\mathfrak{b})\,N(\mathfrak{a}_1)\,N(\mathfrak{a}_2)},$$

was (2.17) widerspricht. Damit ist auch der erste Teil des Hilfssatzes 3 bewiesen.

Hilfssatz 4. *Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ läßt sich so in quadrierbare Bereiche $\mathfrak{F}_\gamma$ zerschneiden, die zu den Körperzahlen γ gehören, für welche die Nennernorm $N(\mathfrak{a})$ von $\gamma\mathfrak{b}$ höchstens M ist, daß erstens*

$$\mathfrak{H}_\gamma\prec\mathfrak{F}_\gamma\prec\mathfrak{G}_\gamma \tag{2.18}$$

und zweitens zu zwei Körperzahlen $\gamma_1\equiv\gamma_2\left(\mathrm{mod}\,\frac{1}{\mathfrak{b}}\right)$ geometrisch kongruente und parallel orientierte Bereiche $\mathfrak{F}_\gamma$ gehören. Daraus folgt insbesondere,

[10]) Für die γ mit $\frac{M}{\sqrt{N(\mathfrak{b})}}<N(\mathfrak{a})\leqq M$ ist (2.16) nicht erfüllbar, daher $\mathfrak{H}_\gamma$ als leer anzusehen.

daß die zu einem System $\bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ *inkongruenter* γ *gehörenden* $\mathfrak{F}_\gamma$ *zusammen einen Bereich* $\mathfrak{B}$ *bilden, der zu jedem Punkt* $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *genau einen ihm* $\bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ *kongruenten enthält.*

Beweis. Ist γ_0 eine beliebige von den zugelassenen Körperzahlen, so sei $\mathfrak{B}_{\gamma_0}$ die Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{H}_\gamma$ außer $\mathfrak{H}_{\gamma_0}$. Aus den zugelassenen Körperzahlen γ greifen wir ein System $\bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ inkongruenter γ heraus, z. B. diejenigen, die in der Darstellung $\gamma = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \ldots + x_n\omega_n$ mit rationalen x_q durch $0 \leqq x_q < 1$ ausgezeichnet sind. Dieses System heiße T; es umfaßt endlich viele Zahlen γ [11]), die wir in eine Reihenfolge $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_u$ gebracht denken. Dann sei

$$\mathfrak{F}^*_{\gamma_1} = \mathfrak{G}_{\gamma_1}(\mathfrak{M} - \mathfrak{B}_{\gamma_1}),$$

in Worten: $\mathfrak{F}^*_{\gamma_1}$ sei diejenige Teilmenge von $\mathfrak{G}_{\gamma_1}$, die mit keinem $\mathfrak{H}_\gamma$, außer $\mathfrak{H}_{\gamma_1}$, einen Punkt gemeinsam hat. Da die $\mathfrak{H}_\gamma$ nach dem vorigen Hilfssatz getrennt liegen, ist $\mathfrak{H}_{\gamma_1}$ in $\mathfrak{F}^*_{\gamma_1}$ enthalten. Nun kann $\mathfrak{F}^*_{\gamma_1}$ noch Paare von einander $\bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ kongruenten Punkten [12]) enthalten. Es werde daher $\mathfrak{F}^*_{\gamma_1}$ noch $\bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ reduziert. Gehört einer von zwei kongruent gelegenen Punkten zu $\mathfrak{H}_{\gamma_1}$, so werde dieser beibehalten, der andere ausgelassen. In $\mathfrak{H}_{\gamma_1}$ selbst kann kein Paar kongruenter Punkte liegen, da die $\mathfrak{H}_\gamma$ getrennt liegen und speziell für $\bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ kongruente γ auch geometrisch kongruent sind. Wenn dagegen in $\mathfrak{H}^*_{\gamma_1}$ die kongruent gelegenen Punkte $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ und $(z_1', z_2', \ldots, z_n')$ beide nicht zu $\mathfrak{H}_{\gamma_1}$ gehören, so betrachten wir ihre Darstellung mit reellen x_j und x_j'

$$\begin{aligned} z_q &= x_1\omega_1^{(q)} + x_2\omega_2^{(q)} + \ldots + x_n\omega_n^{(q)}, \\ z_q' &= x_1'\omega_1^{(q)} + x_2'\omega_2^{(q)} + \ldots + x_n'\omega_n^{(q)} \end{aligned} \qquad (q = 1, 2, \ldots, n)$$

mit der Eigenschaft

$$x_j \equiv x_j' \pmod 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann sei j_0 der kleinste Index, für den $x_j - x_j' \neq 0$ ausfällt. Es werde $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ oder $(z_1', z_2', \ldots, z_n')$ beibehalten, je nachdem $x_{j_0} < x_{j_0}'$ oder $x_{j_0} > x_{j_0}'$ ist. Der nach der Ausführung dieser Reduktionen verbleibende Teil von $\mathfrak{F}^*_{\gamma_1}$ sei $\mathfrak{F}_{\gamma_1}$. Auch $\mathfrak{F}_{\gamma_1}$ enthält noch $\mathfrak{H}_{\gamma_1}$. Das so konstruierte $\mathfrak{F}_{\gamma_1}$ erfüllt somit (2.18). Jedem zu γ_1 $\bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ kongruenten γ werde dann

---

[11]) Nämlich in der Anzahl $\sum_{\mathfrak{n}} \varphi(\mathfrak{a})$ mit $N(\mathfrak{a}) \leqq M$.

[12]) D. h. solche, deren Differenz im Ideal $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ liegt.

als $\mathfrak{F}_\gamma$ diejenige Menge zugeordnet, die aus $\mathfrak{F}_{\gamma_1}$ durch diejenige Translatation hervorgeht, die γ_1 in γ überführt. Die Restmenge von $\mathfrak{M}$, die nach Wegnahme von $\mathfrak{F}_{\gamma_1}$ und aller dazu $\bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ kongruenten Stücke entsteht, heiße $\mathfrak{M}_1$. Dann bilden wir

$$\mathfrak{F}_{\gamma_2}^* = \mathfrak{G}_{\gamma_2}(\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_1 \mathfrak{B}_{\gamma_2}).$$

Da $\mathfrak{M}_1$ alle $\mathfrak{H}_\gamma$ außer $\mathfrak{H}_{\gamma_1}$ und den dazu kongruenten enthält, so ist speziell $\mathfrak{H}_{\gamma_2}$ in $\mathfrak{M}_1$, also auch in $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_1 \mathfrak{B}_{\gamma_2}$ und daher auch in $\mathfrak{F}_{\gamma_2}^*$ enthalten. Mittelst der wie oben durchgeführten Reduktion $\bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ entstehe $\mathfrak{F}_{\gamma_2}$ aus $\mathfrak{F}_{\gamma_2}^*$. Man sieht leicht wie vorhin, daß $\mathfrak{F}_{\gamma_2}$ die Forderung (2.18) erfüllt. Den zu $\gamma_2 \bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ kongruenten Zahlen werden die $\mathfrak{F}_{\gamma_2} \bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ kongruenten $\mathfrak{F}_\gamma$ zugeordnet. Von $\mathfrak{M}_1$ ziehen wir nun $\mathfrak{F}_{\gamma_2}$ und die dazu $\bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ kongruenten $\mathfrak{F}_\gamma$ ab; die Restmenge heiße $\mathfrak{M}_2$. Dann sei weiter

$$\mathfrak{F}_{\gamma_3}^* = \mathfrak{G}_{\gamma_3}(\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_2 \mathfrak{B}_{\gamma_3})$$

usf. bis

$$\mathfrak{F}_{\gamma_u}^* = \mathfrak{G}_{\gamma_u}(\mathfrak{M}_{u-1} - \mathfrak{M}_{u-1} \mathfrak{B}_{\gamma_u}).$$

Die so bestimmten $\mathfrak{F}_{\gamma_1}, \mathfrak{F}_{\gamma_2}, \ldots, \mathfrak{F}_{\gamma_u}$ samt ihren $\bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ kongruenten $\mathfrak{F}_\gamma$ erfüllen sämtlich (2.18), wie eine Wiederholung unserer Schlüsse lehrt. Ferner zeigt die Konstruktion ohne weiteres, daß zwei verschiedene $\mathfrak{F}_\gamma$ punktfremd sind. Zu beweisen bleibt nur noch, daß sie insgesamt ganz $\mathfrak{M}$ ausfüllen. In der Tat, es sei $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{M}$. Liegt er in einem $\mathfrak{H}_\gamma$, so wird er nach (2.18) von dem zugehörigen $\mathfrak{F}_\gamma$ überdeckt. Wir nehmen daher an, daß $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in keinem $\mathfrak{H}_\gamma$ (also auch in keinem $\mathfrak{B}_\gamma$) liege. Nun liegt der Punkt nach Hilfssatz 2 in einem $\mathfrak{G}_{\gamma_*}$. Es sei nun γ_k diejenige Körperzahl aus dem System T, die $\gamma_k \equiv \gamma_* \bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ erfüllt. Durch die Addition von $\gamma_k - \gamma_*$ verschieben wir $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in $(z_1', z_2', \ldots, z_n')$ und $\mathfrak{G}_{\gamma_*}$ in $\mathfrak{G}_{\gamma_k}$. Dann gehört entweder $(z_1', z_2', \ldots, z_n')$ zu $\mathfrak{F}_{\gamma_k}^*$ oder nicht. Im ersten Falle gehört $(z_1', z_2', \ldots, z_n')$ zu $\mathfrak{F}_{\gamma_k}$ oder zu einem $\bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ kongruenten $\mathfrak{F}_\gamma$; folglich gehört auch $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ zu einem solchen $\mathfrak{F}_\gamma$. Im zweiten Falle kann, da $(z_1', z_2', \ldots, z_n')$ in $\mathfrak{G}_{\gamma_k}$ liegt, dieser Punkt nicht in $\mathfrak{M}_{k-1} - \mathfrak{M}_{k-1} \mathfrak{B}_k$ vorkommen. Da er aber nach Voraussetzung nicht in $\mathfrak{B}_k$ liegen sollte, kann er auch in $\mathfrak{M}_{k-1}$ nicht enthalten sein. Nun geht aber $\mathfrak{M}_{k-1}$ aus $\mathfrak{M}$ nur durch Wegnahme von Stücken $\mathfrak{F}_\gamma$ hervor. In diesem Falle muß es also einen Index $h < k$ geben, so daß $(z_1', z_2', \ldots, z_n')$ samt $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ schon in $\mathfrak{F}_{\gamma_h}$ samt den dazu $\bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ kongruenten Stücken vorkommt.

Daß endlich diese Stücke $\mathfrak{F}_\gamma$ quadrierbare Bereiche sind, folgt daraus, daß sie nach (2.15) und (2.16) und der Konstruktion Durchschnitte von endlich vielen quadrierbaren Bereichen (mit analytischer Berandung) sind.

2.2. Verallgemeinerte Ramanujansche Summen.

2.2. In diesem Abschnitt seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{t}$ feste Ideale, und zwar $\mathfrak{t} | \mathfrak{a}$. Es sei ν eine ganze Körperzahl, γ eine Körperzahl von der Beschaffenheit, daß $\gamma \mathfrak{d}$ den Nenner $\mathfrak{a}$ aufweist. In den folgenden Summen mit teilweise komplizierten Summationsbedingungen soll als Summationsvariable derjenige Buchstabe gelten, der an erster Stelle (eventuell besonders hervorgehoben) in den Bedingungen am Fuße des Summenzeichens steht.

Hilfssatz 5. *Es sei $\mathfrak{b}$ ein Teiler von $\mathfrak{a}$, und α eine zu $\mathfrak{t}$ teilerfremde ganze Zahl.*

Wir schreiben

$$S_\mathfrak{b} = \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} | \varrho \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{t}}} e^{2\pi i S(\gamma \nu \varrho)}. \tag{2.21}$$

Dann gilt

$$S_\mathfrak{b} = 0 \quad \text{für} \quad (\mathfrak{b}, \mathfrak{t}) \neq 1, \tag{2.221}$$

$$S_\mathfrak{b} = 0 \quad \text{für} \quad (\mathfrak{b}, \mathfrak{t}) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\mathfrak{t}} \nmid \nu, \tag{2.222}$$

dagegen

$$S_\mathfrak{b} = e^{2\pi i S(\gamma \nu \varkappa \alpha)} N\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\mathfrak{t}}\right) \quad \text{für} \quad (\mathfrak{b}, \mathfrak{t}) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\mathfrak{t}} \Big| \nu, \tag{2.223}$$

worin $\varkappa$ eine solche Körperzahl ist, die den Bedingungen

$$\varkappa \equiv 1 \pmod{\mathfrak{t}}, \quad \mathfrak{b} | \varkappa \tag{2.224}$$

genügt.

Beweis. Zunächst ist (2.221) klar, denn im Falle $(\mathfrak{b}, \mathfrak{t}) \neq 1$ besitzt $S_\mathfrak{b}$ gar keinen Summanden, da die Forderung $\varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{t}$ in (2.21) zur Folge hat $(\varrho, \mathfrak{t}) = 1$, während aus der Forderung $\mathfrak{b} | \varrho$ im Falle $(\mathfrak{b}, \mathfrak{t}) \neq 1$ auch $(\varrho, \mathfrak{t}) \neq 1$ folgen würde.

Im Falle $(\mathfrak{b}, \mathfrak{t}) = 1$ sei β eine beliebige ganze Zahl mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{b}\mathfrak{t} | \beta. \tag{2.225}$$

Erfüllt dann ϱ die Summationsbedingungen von (2.21), so tut es auch $\varrho + \beta$. Daher gilt

$$S_\mathfrak{b} = \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} | \varrho \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{t}}} e^{2\pi i S(\gamma \nu \varrho)} = \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} | \varrho \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{t}}} e^{2\pi i S(\gamma \nu (\varrho + \beta))} = e^{2\pi i S(\gamma \nu \beta)} S_\mathfrak{b}.$$

Kann man also β so wählen, daß $e^{2\pi i S(\gamma\nu\beta)} \neq 1$, so folgt aus dieser Gleichung $S_{\mathfrak{b}} = 0$. Dies ist dann der Fall, wenn $S(\gamma\nu\beta)$ nicht ganz rational, also $\gamma\nu\beta\mathfrak{d}$ kein ganzes Ideal ist, also der Nenner $\mathfrak{a}$ von $\gamma\mathfrak{d}$ nicht in $\nu\beta$ aufgeht. Dazu genügt aber nach (2.225) schon, daß $\mathfrak{a} \nmid \nu\mathfrak{b}\mathfrak{t}$, da $\frac{\beta}{\mathfrak{b}\mathfrak{t}}$ teilerfremd zu $\mathfrak{a}$ gewählt werden kann. Damit ist (2.222) erwiesen.

Ist dagegen $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\mathfrak{t}} \Big| \nu$, so hat $\gamma\nu\mathfrak{d}$ höchstens den Nenner $\mathfrak{b}\mathfrak{t}$, also kann jedes $\varrho \bmod \mathfrak{b}\mathfrak{t}$ abgeändert werden, ohne den Wert des zugehörigen Summanden in $S_{\mathfrak{b}}$ zu ändern. Bestimmen wir daher eine ganze Zahl $\varkappa$ gemäß (2.224), was wegen $(\mathfrak{b}, \mathfrak{t}) = 1$ stets möglich ist, so darf in jedem Summanden

$$\varrho = \varkappa\alpha$$

gesetzt werden, da ein solches ϱ auch $\mathfrak{b} | \varrho$ und $\varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{t}$ erfüllt. Daher ist dann

$$S_{\mathfrak{b}} = \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} | \varrho \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{t}}} e^{2\pi i S(\gamma\nu\varrho)} = \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} | \varrho \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{t}}} e^{2\pi i S(\gamma\nu\varkappa\alpha)}$$

$$= e^{2\pi i S(\gamma\nu\varkappa\alpha)} \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} | \varrho \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{t}}} 1 = e^{2\pi i S(\gamma\nu\varkappa\alpha)} N\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\mathfrak{t}}\right),$$

womit auch der letzte Teil des Hilfssatzes 5 bewiesen ist.

Hilfssatz 6. *Es ist mit den Bezeichnungen von Hilfssatz* 5

$$\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho, \mathfrak{a}) = 1 \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{t}}}{}' e^{2\pi i S(\gamma\nu\varrho)} = \sum_{\substack{\mathfrak{b} | \mathfrak{a} \\ (\mathfrak{b}, \mathfrak{t}) = 1 \\ \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\mathfrak{t}} | \nu}} \mu(\mathfrak{b}) N\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\mathfrak{t}}\right) e^{2\pi i S(\gamma\nu\varkappa\alpha)}, \tag{2.23}$$

worin nach (2.224) $\varkappa$ *nicht nur von* $\mathfrak{t}$, *sondern auch von dem Ideal* $\mathfrak{b}$, *über das zu summieren ist, abhängt.*

Beweis. Es ist für $\mathfrak{b} | \mathfrak{a}$

$$S_{\mathfrak{b}} = \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} | \varrho \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{t}}} e^{2\pi i S(\gamma\nu\varrho)} = \sum_{\substack{\mathfrak{c} \\ \mathfrak{b} | \mathfrak{c} | \mathfrak{a}}} \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho, \mathfrak{a}) = \mathfrak{c} \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{t}}}{}' e^{2\pi i S(\gamma\nu\varrho)}$$

und folglich, mit der Abkürzung

$$T_{\mathfrak{c}} = \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho, \mathfrak{a}) = \mathfrak{c} \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{t}}}{}' e^{2\pi i S(\gamma\nu\varrho)}, \tag{2.24}$$

$$S_{\mathfrak{b}} = \sum_{\substack{\mathfrak{c} \\ \mathfrak{b} | \mathfrak{c} | \mathfrak{a}}} T_{\mathfrak{c}}.$$

Hiernach ist

$$\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) S_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) \sum_{\substack{\mathfrak{c} \\ \mathfrak{b}|\mathfrak{c}|\mathfrak{a}}} T_{\mathfrak{c}} = \sum_{\mathfrak{c}|\mathfrak{a}} T_{\mathfrak{c}} \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{c}} \mu(\mathfrak{b}) = T_{\mathfrak{1}}$$

und somit nach (2.24)

$$\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho,\mathfrak{a})=1 \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{t}}} e^{2\pi i S(\gamma\nu\varrho)} = \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) S_{\mathfrak{b}}.$$

Nach (2.221) bis (2.224) ist aber hiermit (2.23) bewiesen.

Zwei Spezialfälle von (2.23) wollen wir noch besonders hervorheben, da nur sie im folgenden gebraucht werden. Erstens, für $\nu = 1$ tritt in der Summe rechts in (2.23) wegen $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\mathfrak{t}} \Big| \nu$ nur der Summand $\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}$ auf, aber wegen $(\mathfrak{b}, \mathfrak{t}) = 1$ auch nur bei $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}, \mathfrak{t}\right) = 1$. Daher ergibt sich

$$(2.251) \qquad \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho,\mathfrak{a})=1 \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{t}}} e^{2\pi i S(\gamma\varrho)} = \begin{cases} 0 & \text{für } \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}, \mathfrak{t}\right) \neq 1, \\ \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}\right) e^{2\pi i S(\gamma\varkappa\alpha)} & \text{für } \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}, \mathfrak{t}\right) = 1 \end{cases}$$

mit

$$(2.252) \qquad \varkappa \equiv 1 \pmod{\mathfrak{t}}, \qquad \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}} \Big| \varkappa.$$

Zweitens sei $\mathfrak{t} = 1$. Dann erübrigt sich in (2.23) links die Bedingung $\varrho \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{t}}$ als von selbst erfüllt und rechts die Bedingung $(\mathfrak{b}, \mathfrak{t}) = 1$. Daher ist zunächst

$$\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho,\mathfrak{a})=1}} e^{2\pi i S(\gamma\nu\varrho)} = \sum_{\substack{\mathfrak{b}|\mathfrak{a} \\ \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}|\nu}} \mu(\mathfrak{b}) N\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right) e^{2\pi i S(\gamma\nu\varkappa\alpha)}.$$

Da aber nach (2.224) $\mathfrak{b}|\varkappa$ sein soll, so ist hier im besonderen $\mathfrak{a}|\nu\varkappa$, also $\gamma\nu\varkappa\mathfrak{b}$ ein ganzes Ideal und $\gamma\nu\varkappa\alpha\mathfrak{b}$ gleichfalls und somit $S(\gamma\nu\varkappa\alpha)$ eine ganze rationale Zahl. Daher vereinfacht sich die vorige Gleichung, wenn wir noch rechts statt $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ überall $\mathfrak{c}$ schreiben, zu

$$(2.261) \qquad \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho,\mathfrak{a})=1}} e^{2\pi i S(\gamma\nu\varrho)} = \sum_{\mathfrak{c}|(\mathfrak{a},\nu)} \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right) N(\mathfrak{c}).$$

Bedenken wir endlich noch, daß $\gamma\varrho$, sobald ϱ ein verkürztes Restsystem mod $\mathfrak{a}$ durchläuft, ein System von mod $\frac{1}{\mathfrak{b}}$ inkongruenten Brüchen $\gamma\varrho = \beta$

durchläuft, so daß $\beta\mathfrak{d}$ den Nenner $\mathfrak{a}$ aufweist, so geht (2.261) über in

$$\sum_{\substack{\beta \bmod \frac{1}{\mathfrak{d}} \\ \beta\mathfrak{d} \text{ mit Nenner } \mathfrak{a}}} e^{2\pi i S(\beta\nu)} = \sum_{\mathfrak{c} \mid (\mathfrak{a}, \nu)} \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right) N(\mathfrak{c}). \quad (2.262)$$ [13])

2.3. Über Charaktere von Kongruenzklassengruppen.

2.31. Den Zahlkörper denken wir uns, wie schon in der Einleitung auseinandergesetzt wurde, durch die Hinzunahme idealer Zahlen zu dem Bereich $\mathfrak{Z}$ ergänzt.

Wir teilen $\mathfrak{Z}$ nach dem Modul $\mathfrak{a}$ in Klassen im engsten Sinne ein, indem wir zwei zu $\mathfrak{a}$ teilerfremde Zahlen $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ dann und nur dann der gleichen Klasse zuweisen, wenn

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{a}}, \quad (2.311)$$

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} > 0; \quad (2.312)$$

diese Forderungen sind übrigens nur dann erfüllbar, wenn $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ Ideale der gleichen Idealklasse im weitesten Sinne vertreten. Diese Klassen bilden eine Abelsche Gruppe, deren Charaktere χ wir im folgenden betrachten.

Hilfssatz 7. *Es sei γ eine solche Körperzahl, daß $\gamma\mathfrak{d}$ den Nenner $\mathfrak{a}$ besitzt. Wir definieren*

$$C(\chi) = \sum_{\substack{\varrho > 0 \\ \varrho \bmod \mathfrak{a}}} \bar{\chi}(\varrho) e^{2\pi i S(\gamma\varrho)}. \quad (2.313)$$

Für alle $\chi \bmod \mathfrak{a}$ ist dann mit $\varepsilon > 0$

$$|C(\chi)| < C N(\mathfrak{a})^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \quad (2.314)$$

Beweis. Wir setzen für ganzes totalpositives ν

$$G(\nu, \chi) = \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ \varrho > 0}} \bar{\chi}(\varrho) e^{2\pi i S(\gamma\nu\varrho)}.$$

Ist $(\nu, \mathfrak{a}) = 1$, so ist

$$G(\nu, \chi) = \chi(\nu) \sum_{\substack{\varrho > 0 \\ \varrho \bmod \mathfrak{a}}} \bar{\chi}(\nu\varrho) e^{2\pi i S(\gamma\nu\varrho)} = \chi(\nu) \sum_{\substack{\sigma > 0 \\ \sigma \bmod \mathfrak{a}}} \bar{\chi}(\sigma) e^{2\pi i S(\gamma\sigma)},$$

[13]) Die Herren Hardy und Littlewood schlagen für den Fall des rationalen Körpers vor, die Summen (2.261) oder, was auf dasselbe herauskommt, (2.262) nach Ramanujan zu benennen. Die Summe (2.23) wäre danach als Ramanujansche Summe anzusehen, die in zweifacher Hinsicht verallgemeinert ist, erstens durch Übertragung auf algebraische Zahlkörper, zweitens durch Hinzufügung der Kongruenzbedingung mod t.

also

$$G(\nu,\chi) = \chi(\nu)\, C(\chi).$$

Daher erhalten wir

$$\sum_{\substack{\nu \succ 0 \\ \nu \bmod \mathfrak{a} \\ (\nu,\mathfrak{a})=1}} |G(\nu,\chi)|^2 = \varphi(\mathfrak{a})\,|C(\chi)|^2. \tag{2.315}$$

Anderseits ist

$$|G(\nu,\chi)|^2 = \sum_{\substack{\varrho \succ 0 \\ \varrho \bmod \mathfrak{a}}} \bar{\chi}(\varrho)\, e^{2\pi i S(\gamma\nu\varrho)} \sum_{\substack{\sigma \succ 0 \\ \sigma \bmod \mathfrak{a}}} \chi(\sigma)\, e^{-2\pi i S(\gamma\nu\sigma)}$$

$$= \sum_{\substack{\varrho,\sigma \succ 0 \\ \varrho,\sigma \bmod \mathfrak{a}}} \bar{\chi}(\varrho)\chi(\sigma)\, e^{2\pi i S(\gamma\nu(\varrho-\sigma))},$$

also

$$\sum_{\substack{\nu \succ 0 \\ \nu \bmod \mathfrak{a} \\ (\nu,\mathfrak{a})=1}} |G(\nu,\chi)|^2 = \sum_{\substack{\varrho,\sigma \succ 0 \\ \varrho,\sigma \bmod \mathfrak{a}}} \bar{\chi}(\varrho)\chi(\sigma) \sum_{\substack{\nu \succ 0 \\ \nu \bmod \mathfrak{a} \\ (\nu,\mathfrak{a})=1}} e^{2\pi i S(\gamma\nu(\varrho-\sigma))}.$$

Die Anwendung von (2.261) auf die innere Summe hat zur Folge

$$\sum_{\substack{\nu \succ 0 \\ \nu \bmod \mathfrak{a} \\ (\nu,\mathfrak{a})=1}} |G(\nu,\chi)|^2 = \sum_{\substack{\varrho,\sigma \succ 0 \\ \varrho,\sigma \bmod \mathfrak{a}}} \bar{\chi}(\varrho)\chi(\sigma) \sum_{\mathfrak{c} \mid (\mathfrak{a},\varrho-\sigma)} \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right) N(\mathfrak{c})$$

$$= \sum_{\mathfrak{c} \mid \mathfrak{a}} \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right) N(\mathfrak{c}) \sum_{\substack{\varrho,\sigma \succ 0 \\ \varrho,\sigma \bmod \mathfrak{a} \\ \varrho \equiv \sigma \bmod \mathfrak{c}}} \bar{\chi}(\varrho)\chi(\sigma),$$

also

$$\sum_{\substack{\nu \succ 0 \\ \nu \bmod \mathfrak{a} \\ (\nu,\mathfrak{a})=1}} |G(\nu,\chi)|^2 \leqq \sum_{\mathfrak{c} \mid \mathfrak{a}} \mu^2\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right) N(\mathfrak{c}) \sum_{\substack{\varrho \succ 0 \\ \varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho,\mathfrak{a})=1}} \sum_{\substack{\sigma \succ 0 \\ \sigma \bmod \mathfrak{a} \\ \sigma \equiv \varrho \bmod \mathfrak{c}}} 1$$

$$= \sum_{\mathfrak{c} \mid \mathfrak{a}} \mu^2\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right) N(\mathfrak{c}) \sum_{\substack{\varrho \succ 0 \\ \varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho,\mathfrak{a})=1}} \frac{N(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{c})} = N(\mathfrak{a})\,\varphi(\mathfrak{a}) \sum_{\mathfrak{c} \mid \mathfrak{a}} \mu^2\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right).$$

Hieraus und aus (2.315) ergibt sich

$$|C(\chi)|^2 \leqq N(\mathfrak{a}) \sum_{\mathfrak{c} \mid \mathfrak{a}} \mu^2\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right) \leqq N(\mathfrak{a})\, 2^w, \tag{2.316}$$

wo $w = \sum_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}} 1$ ist. Werden die Primideale des Körpers nach wachsender Norm geordnet, so folgt unter Anwendung des Primidealsatzes

$$N(\mathfrak{a}) \geqq N(\mathfrak{p}_1) N(\mathfrak{p}_2) \dots N(\mathfrak{p}_w) = e^{N(\mathfrak{p}_w) + o(N(\mathfrak{p}_w))} > C\, e^{\frac{1}{2} N(\mathfrak{p}_w)},$$

also

$$e^{N(\mathfrak{p}_w)} < C\, N(\mathfrak{a})^2.$$

Daher ist

$$2^w = e^{N(\mathfrak{p}_w)^{\frac{w \log 2}{N(\mathfrak{p}_w)}}} < C N(\mathfrak{a})^{\frac{2w \log 2}{N(\mathfrak{p}_w)}}.$$

Für

$$\frac{2w \log 2}{N(\mathfrak{p}_w)} < \varepsilon$$

ist somit

$$2^w < C N(\mathfrak{a})^{\varepsilon},$$

was bei passendem C für alle w gilt. Dann liefert (2.316)

$$|C(\chi)|^2 < C N(\mathfrak{a})^{1+\varepsilon}$$

also die Behauptung (2.314).

2.32. Hilfssatz 8. *Es sei* χ *ein Charakter* mod $\mathfrak{a}$; X *ein Charakter* mod $\mathfrak{A}$. *Es sei* $\mathfrak{t} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$, $\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{A}}{\mathfrak{t}}$. *Dann ist* $\chi\mathsf{X}$ *offenbar ein Charakter* mod $\mathfrak{v}$. *Wenn* $\chi\mathsf{X}$ *der Hauptcharakter* mod $\mathfrak{v}$ *ist, so müssen* χ *und* X *je einen Charakter* mod $\mathfrak{t}$ *induzieren, d. h. für*

$$\hat{\alpha}_1 \equiv \hat{\alpha}_2 \pmod{\mathfrak{t}}, \quad (\hat{\alpha}_1, \mathfrak{a}) = (\hat{\alpha}_2, \mathfrak{a}) = 1, \quad \frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_2} > 0$$

muß sein

$$\chi(\hat{\alpha}_1) = \chi(\hat{\alpha}_2) \tag{2.321}$$

und für

$$\hat{\beta}_1 \equiv \hat{\beta}_2 \pmod{\mathfrak{t}}, \quad (\hat{\beta}_1, \mathfrak{A}) = (\hat{\beta}_2, \mathfrak{A}) = 1, \quad \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2} > 0$$

muß sein

$$\mathsf{X}(\hat{\beta}_1) = \mathsf{X}(\hat{\beta}_2). \tag{2.322}$$

Beweis. Vorausgesetzt ist, daß $\chi\mathsf{X}$ der Hauptcharakter mod $\mathfrak{v}$ ist, d. h. daß

$$\chi(\hat{\varrho}) = \bar{\mathsf{X}}(\hat{\varrho}) \quad \text{für} \quad (\hat{\varrho}, \mathfrak{v}) = 1. \tag{2.323}$$

Nun mögen $\hat{\alpha}_1$ und $\hat{\alpha}_2$ die in unserem Satz vorausgesetzten Eigenschaften haben. Da $(\mathfrak{a}, \mathfrak{A}) | (\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2)$, so gibt es Zahlen $\hat{\varkappa}$ und $\hat{\lambda}$ der Klasse von von $\hat{\alpha}_1$ und $\hat{\alpha}_2$, die

$$\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 = \hat{\varkappa} + \hat{\lambda}, \quad \mathfrak{a} | \hat{\varkappa}, \quad \mathfrak{A} | \hat{\lambda} \tag{2.324}$$

erfüllen. Überdies kann $\hat{\varkappa}$ so gewählt werden, daß

$$\frac{\hat{\varkappa}}{\hat{\alpha}_1} > 0. \tag{2.325}$$

(Man braucht nämlich, um dies letztere zu erreichen, zu $\hat{\varkappa}$ nur ein hinreichend großes rationales Vielfaches von $\hat{\alpha}_1 N(\mathfrak{v})$ zu addieren und die gleiche Zahl von $\hat{\lambda}$ zu subtrahieren.) Endlich sei $\hat{\tau}$ eine Zahl der Klasse von $\hat{\alpha}_1$ und $\hat{\alpha}_2$ mit den Eigenschaften

$$\mathfrak{a} | \hat{\tau}, \quad (\hat{\alpha}_1 + \hat{\tau}, \mathfrak{v}) = 1. \tag{2.326}$$

Solche Zahlen gibt es wegen $(\hat{\alpha}_1, \mathfrak{a}) = 1$ stets, wie man leicht einsieht. Man kann noch vorschreiben, daß

$$\frac{\hat{\tau}}{\hat{\alpha}_1} > 0 \tag{2.327}$$

ausfällt, was man wieder durch Addition eines rationalen Vielfachen von $\hat{\alpha}_1 N(\mathfrak{v})$ erreichen kann. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\chi(\hat{\alpha}_1) &= \chi(\hat{\alpha}_1 + \hat{\tau}) \quad \text{wegen (2.326), (2.327),} \\
&= \overline{\chi}(\hat{\alpha}_1 + \hat{\tau}) \quad \text{wegen (2.323), (2.326),} \\
&= \overline{\chi}(\hat{\alpha}_2 + \hat{\tau} + \hat{\varkappa} + \hat{\lambda}) \quad \text{Einsetzung aus (2.324),} \\
&= \overline{\chi}(\hat{\alpha}_2 + \hat{\tau} + \hat{\varkappa}) \quad \text{wegen } \mathfrak{A} \mid \hat{\lambda} \text{ nach (2.324),} \\
&= \chi(\hat{\alpha}_2 + \hat{\tau} + \hat{\varkappa}) \quad \text{wegen (2.323), denn es ist}
\end{aligned}$$

$$(\hat{\alpha}_2 + \hat{\tau} + \hat{\varkappa}, \mathfrak{v}) = 1,$$

wie sich aus

$$(\hat{\alpha}_2 + \hat{\tau} + \hat{\varkappa}, \mathfrak{A}) = (\hat{\alpha}_2 + \hat{\tau} + \hat{\varkappa} + \hat{\lambda}, \mathfrak{A}) = (\hat{\alpha}_1 + \hat{\tau}, \mathfrak{A}) = 1$$

und aus

$$(\hat{\alpha}_2 + \hat{\tau} + \hat{\varkappa}, \mathfrak{a}) = (\hat{\alpha}_2, \mathfrak{a}) = 1 \quad \text{ergibt;}$$

$= \chi(\hat{\alpha}_2)$ wegen $\mathfrak{a} \mid (\hat{\tau} + \hat{\varkappa})$ und $\frac{\hat{\tau} + \hat{\varkappa}}{\hat{\alpha}_2} > 0$ nach (2.324) bis (2.327), womit (2.321) bewiesen ist. Ganz analog wird (2.322) bewiesen.

2.4. Über die Einheiten und über die Heckeschen Größencharaktere.

2.41. Es seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ Grundeinheiten des Körpers und ϱ eine solche Einheitswurzel des Körpers, daß sich alle Einheiten des Körpers in der Form

$$\varrho^a \varepsilon_1^{a_1} \varepsilon_2^{a_2} \ldots \varepsilon_r^{a_r} \tag{2.411}$$

mit ganzen rationalen $a, a_1, \ldots, a_r$ darstellen lassen; es sei ϱ eine w_*-te Einheitswurzel.

In der Gruppe aller Einheiten bilden die totalpositiven Einheiten oder „Einheiten mod 1“ eine Untergruppe (die nur im Falle des total-imaginären Körpers mit der Gruppe aller Einheiten identisch ist). Diese Untergruppe besitzt also wieder eine endliche Basis bestehend aus der Einheitswurzel ξ und den „Grundeinheiten mod 1“ $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$. Diese Zahlen lassen sich auch gemäß (2.411) darstellen:

$$\begin{aligned}
\xi &= \varrho^{b_*}, \\
\eta_k &= \varrho^{b_k} \varepsilon_1^{b_{1k}} \varepsilon_2^{b_{2k}} \ldots \varepsilon_r^{b_{rk}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),
\end{aligned} \tag{2.412}$$

worin wir $b_* > 0$ auch im Falle $\xi = 1$ wählen wollen, und zwar sei b_*

die *kleinste* positive Zahl, die $\xi = \varrho^{b_*}$ erfüllt[14]). Aus gruppentheoretischen Gründen[15]) ist dann der absolute Betrag von

$$(2.413) \qquad b_* \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rr} \end{vmatrix} = b_* D_0$$

gleich dem Index der Untergruppe der Einheiten mod 1 innerhalb der Gruppe aller Einheiten. Aus (2.412) folgt unter Berücksichtigung von $|\varrho| = 1$

$$(2.414) \qquad \log|\eta_k| = \sum_{j=1}^{r} b_{jk} \log|\varepsilon_j| \qquad (k = 1, 2, \dots, r),$$

und somit

$$(2.415) \qquad R_1 = |D_0| R,$$

worin

$$(2.416) \quad R = \text{abs. Betrag von } 2^{r_2} \begin{vmatrix} \log|\varepsilon_1^{(1)}| & \log|\varepsilon_2^{(1)}| & \dots & \log|\varepsilon_r^{(1)}| \\ \log|\varepsilon_1^{(2)}| & \log|\varepsilon_2^{(2)}| & \dots & \log|\varepsilon_r^{(2)}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \log|\varepsilon_1^{(r)}| & \log|\varepsilon_2^{(r)}| & \dots & \log|\varepsilon_r^{(r)}| \end{vmatrix}$$

der Regulator des Körpers ist und

$$(2.417) \quad R_1 = \text{abs. Betrag von } 2^{r_2} \begin{vmatrix} \log|\eta_1^{(1)}| & \log|\eta_2^{(1)}| & \dots & \log|\eta_r^{(1)}| \\ \log|\eta_1^{(2)}| & \log|\eta_2^{(2)}| & \dots & \log|\eta_r^{(2)}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \log|\eta_1^{(r)}| & \log|\eta_2^{(r)}| & \dots & \log|\eta_r^{(r)}| \end{vmatrix}$$

der „Regulator mod 1“ heißen möge.

2.42. Es sei $\mathfrak{v}$ ein Ideal des Körpers. Eine Einheit H heiße „Einheit mod $\mathfrak{v}$“, wenn

$$(2.421) \qquad \mathsf{H} > 0 \quad \text{und} \quad \mathsf{H} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{v}}$$

ist. Die H lassen wieder eine Darstellung durch eine endliche Basis $\Xi, \mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \dots, \mathsf{H}_r$ zu, wo Ξ eine Einheitswurzel und $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \dots, \mathsf{H}_r$ „Grundeinheiten mod $\mathfrak{v}$“ sind. Da jede Einheit mod $\mathfrak{v}$ auch Einheit mod 1 ist, so gibt es eine Darstellung der Grundeinheiten von der Gestalt

[14]) Man erkennt leicht, daß $b_* = 1$ für totalimaginäre Körper, dagegen für nichttotalimaginäre Körper $b_* = 2$ ist, da in diesem Fall $\varrho = -1$, $\xi = +1$ sein muß.

[15]) Z. B. Hecke, Algebraische Zahlen S. 43, Satz 39, wo allerdings nur von *reinen* unendlichen Gruppen die Rede ist. Für *gemischte* unendliche Gruppen endlicher Basis stellt man jedoch leicht den oben benutzten Sachverhalt fest.

$$\Xi = \xi^{A_*},$$
$$\mathsf{H}_k = \xi^{A_k}\eta_1^{A_{1k}}\eta_2^{A_{2k}}\dots\eta_r^{A_{rk}} \qquad (k=1,2,\dots,r), \tag{2.422}$$

worin wieder A_* als kleinste positive Zahl gewählt sei, die $\Xi = \xi^{A_*}$ erfüllt. Der absolute Betrag von

$$A_* \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rr} \end{vmatrix} = A_* D_\mathfrak{v} \tag{2.423}$$

ist nach gruppentheoretischen Sätzen gleich dem Index der Gruppe der Einheiten mod $\mathfrak{v}$ innerhalb der Gruppe der Einheiten mod 1. Aus (2.422) folgt

$$\log|\mathsf{H}_k| = \sum_{j=1}^{r} A_{jk}\log|\eta_j| \qquad (k=1,2,\dots,r), \tag{2.424}$$

also mit den Bezeichnungen (2.417), (2.423)

$$R_\mathfrak{v} = |D_\mathfrak{v}|\,R_1, \tag{2.425}$$

worin

$$R_\mathfrak{v} = \text{abs. Betrag von } 2^{r_2} \begin{vmatrix} \log|\mathsf{H}_1^{(1)}| & \log|\mathsf{H}_2^{(1)}| & \dots & \log|\mathsf{H}_r^{(1)}| \\ \log|\mathsf{H}_1^{(2)}| & \log|\mathsf{H}_2^{(2)}| & \dots & \log|\mathsf{H}_r^{(2)}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \log|\mathsf{H}_1^{(r)}| & \log|\mathsf{H}_2^{(r)}| & \dots & \log|\mathsf{H}_r^{(r)}| \end{vmatrix} \tag{2.426}$$

der „Regulator mod $\mathfrak{v}$“ sei. Der Index $e(\mathfrak{v})$ der Gruppe der Einheiten mod $\mathfrak{v}$ innerhalb der Gruppe *aller* Einheiten ist somit nach (2.415) und (2.425)

$$e(\mathfrak{v}) = b_* A_* |D_0|\,|D_\mathfrak{v}| = b_* A_* \frac{R_\mathfrak{v}}{R}. \tag{2.427}$$

Diesen Gruppenindex veranschaulichen wir uns durch Konstruktion der Faktorgruppe. Nach bekanntem gruppentheoretischen Verfahren findet man innerhalb der Gruppe aller Einheiten ein System von $e(\mathfrak{v})$ Einheiten (Einheitswurzeln inbegriffen)

$$\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_{e(\mathfrak{v})}^*,$$

die „mod $\mathfrak{v}$ nicht assoziiert“ sind, d. h. sich zu je zweien nicht nur um eine Einheit mod $\mathfrak{v}$ unterscheiden. Setzen wir noch $b_* A_* = B_*$, so können wir unser Ergebnis zusammenfassen in dem

Hilfssatz 9. *Die Anzahl $e(\mathfrak{v})$ der* mod $\mathfrak{v}$ *nicht assoziierten Einheiten $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_{e(\mathfrak{v})}^*$ ist*

$$e(\mathfrak{v}) = B_* \frac{R_\mathfrak{v}}{R}, \tag{2.428}$$

worin R und $R_\mathfrak{v}$ die Bedeutungen (2.416) *und* (2.426) *haben und B_* die kleinste positive ganze Zahl ist, die*

$$\varrho^{B_*} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{v}}, \qquad \varrho^{B_*} > 0 \tag{2.429}$$

genügt, unter ϱ eine fundamentale Einheitswurzel (vgl. (2.411)) *verstanden.*

2.43. Die Heckeschen Größencharaktere mod $\mathfrak{v}$ haben die Eigenschaften: erstens $\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\nu}) = \lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu}\hat{\nu})$ und zweitens: für zwei mod $\mathfrak{v}$ assoziierte Zahlen (d. h. deren Quotient eine Einheit mod $\mathfrak{v}$ ist) $\hat{\mu}_1$ und $\hat{\mu}_2$ ist $\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu}_1) = \lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu}_2)$.

Auf die endliche Gruppe der mod $\mathfrak{v}$ nicht assoziierten Einheiten $\varepsilon_1^* \dots \varepsilon_{e(\mathfrak{v})}^*$ angewandt, spielen die $\lambda_\mathfrak{v}$ daher die Rolle von Gruppencharakteren. Es sei ferner $\chi(\hat{\mu})$ ein Kongruenzklassengruppencharakter mod $\mathfrak{v}$ im engsten Sinne (s. **2.31**).

Dann ist auch $\chi(\varepsilon^*)\lambda(\varepsilon^*)$ ein Gruppencharakter für die Gruppe der ε^*. Hieraus und aus Hilfssatz 8 folgt nach bekannten gruppentheoretischen Überlegungen leicht der

Hilfssatz 10. *Gibt es eine Einheit ε^*, so daß*

$$\chi(\varepsilon^*)\lambda(\varepsilon^*) \neq 1 \tag{2.431}$$

so ist

$$\sum_{(\varepsilon^*)_\mathfrak{v}} \chi(\varepsilon^*)\lambda(\varepsilon^*) = 0. \tag{2.432}$$

Ist dagegen für jede Einheit ε

$$\chi(\varepsilon)\lambda(\varepsilon) = 1 \tag{2.433}$$

so gilt

$$\sum_{(\varepsilon^*)_\mathfrak{v}} \chi(\varepsilon^*)\lambda(\varepsilon^*) = B_* \frac{R_\mathfrak{v}}{R}. \tag{2.434}$$

Das Zeichen $(\varepsilon_\mathfrak{v}^*)$ unter dem Σ-Zeichen soll andeuten, daß ε^* ein System mod $\mathfrak{v}$ nicht assoziierter Zahlen durchläuft.

Findet übrigens der Fall (2.433) statt, so nennen wir $\chi\lambda$ nach Herrn Hecke einen „Größencharakter für Ideale", da dann $\chi\lambda$ für alle ein bestimmtes Ideal repräsentierenden idealen Zahlen den gleichen Wert hat.

2.44. Für das genauere Studium der Abhängigkeit der Größencharaktere vom Modul $\mathfrak{v}$ ist es zweckmäßig, sich der Matrizenschreibweise zu bedienen. Wir setzen daher

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\log|\eta_1^{(1)}| & \dots & \log|\eta_r^{(1)}| \\ \frac{1}{n}\log|\eta_1^{(2)}| & \dots & \log|\eta_r^{(2)}| \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ \frac{1}{n}\log|\eta_1^{(r+1)}| & \dots & \log|\eta_r^{(r+1)}| \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{E}_\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\log|\mathsf{H}_1^{(1)}| & \dots & \log|\mathsf{H}_r^{(1)}| \\ \frac{1}{n}\log|\mathsf{H}_1^{(2)}| & \dots & \log|\mathsf{H}_r^{(2)}| \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ \frac{1}{n}\log|\mathsf{H}_1^{(r+1)}| & \dots & \log|\mathsf{H}_r^{(r+1)}| \end{pmatrix}$$

und bezeichnen die dazu reziproken Matrizen bzw. mit

$$(2.442)\qquad \mathfrak{E}^{-1}=\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_{r+1}\\ e_1^{(1)} & e_2^{(1)} & \dots & e_{r+1}^{(1)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ e_1^{(r)} & e_2^{(r)} & \dots & e_{r+1}^{(r)}\end{pmatrix},\qquad \mathfrak{E}_v^{-1}=\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_{r+1}\\ E_1^{(1)} & E_2^{(1)} & \dots & E_{r+1}^{(1)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ E_1^{(r)} & E_2^{(r)} & \dots & E_{r+1}^{(r)}\end{pmatrix}$$

Mit den in (2.422) auftretenden Exponenten A_{jk} definieren wir

$$(2.443)\qquad \mathfrak{A}_v=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r}\\ 0 & A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2r}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rr}\end{pmatrix}$$

und die dazu reziproke Matrix

$$(2.444)\qquad \mathfrak{A}_v^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r}\\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr}\end{pmatrix}.$$

Die für die ersten $r+1$ konjugierten Körper aufgeschriebene Gleichung (2.424) nimmt in der Matrizenschreibweise die Gestalt an:

$$(2.445)\qquad \mathfrak{E}_v=\mathfrak{E}\mathfrak{A}_v.$$

2.45. Zu den Beträgen der Einheiten führen wir nun noch ihre Amplituden ein in der Bezeichnung

$$(2.451)\qquad \xi^{(p)}=e^{i\varphi^{(p)}},\qquad \frac{\eta_k^{(p)}}{|\eta_k^{(p)}|}=e^{i\vartheta_k^{(p)}},\qquad \frac{\mathsf{H}_k^{(p)}}{|\mathsf{H}_k^{(p)}|}=e^{i\Theta_k^{(p)}}$$

und den Festsetzungen, daß $\varphi^{(p)}$, $\vartheta_k^{(p)}$, $\Theta_k^{(p)}$ Null sein sollen für $p=1,2,\dots,r_1$ (was wegen der Positivität von $\xi^{(p)}$, $\eta_k^{(p)}$, $\mathsf{H}_k^{(p)}$ für diese p möglich ist), ferner

$$(2.452)\qquad \varphi^{(p+r_2)}=-\varphi^{(p)},\qquad \vartheta_k^{(p+r_2)}=-\vartheta_k^{(p)},\qquad \Theta_k^{(p+r_2)}=-\Theta_k^{(p)}$$

für $p=r_1+1,\dots r_1+r_2$. Aus (2.422) folgt dann

$$(2.453)\qquad \Theta_k^{(p)}-A_k\varphi^{(p)}=\sum_{j=1}^{r}A_{jk}\vartheta_j^{(p)}\qquad (k=1,2,\dots,r).$$

Zur Abkürzung schreiben wir noch

$$(2.454)\qquad \tilde{\Theta}_k^{(p)}=\Theta_k^{(p)}-A_k\varphi^{(p)}\qquad (k=1,2,\dots,r)$$

und setzen

$$\text{) } \mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \vartheta_1^{(1)} & \vartheta_2^{(1)} & \dots & \vartheta_r^{(1)} \\ \frac{1}{n} & \vartheta_1^{(2)} & \vartheta_2^{(2)} & \dots & \vartheta_r^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \vartheta_1^{(r+1)} & \vartheta_2^{(r+1)} & \dots & \vartheta_r^{(r+1)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathfrak{F}}_\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \tilde{\Theta}_1^{(1)} & \tilde{\Theta}_2^{(1)} & \dots & \tilde{\Theta}_r^{(1)} \\ \frac{1}{n} & \tilde{\Theta}_1^{(2)} & \tilde{\Theta}_2^{(2)} & \dots & \tilde{\Theta}_r^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \tilde{\Theta}_1^{(r+1)} & \tilde{\Theta}_2^{(r+1)} & \dots & \tilde{\Theta}_r^{(r+1)} \end{pmatrix}.$$

Aus (2.443), (2.453), (2.454), (2.455) liest man dann die Gleichung ab

$$\tilde{\mathfrak{F}}_\mathfrak{v} = \mathfrak{F}\,\mathfrak{A}_\mathfrak{v}. \tag{2.456}$$

2.46. Die Darstellung, die Herr Hecke für die Größencharaktere mod $\mathfrak{v}$ angibt[16]), sieht in unserer Bezeichnung (abgesehen von dem gleichgültigen Vorzeichen der m_k) so aus:

$$\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu}) = \prod_{q=1}^{r+1} |\hat{\mu}^{(q)}|^{-\sum_{k=1}^{r} E_q^{(k)} \left(2\pi i\, m_k + i \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \Theta_k^{(p)}\right)} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(p)}|}\right)^{a_p}. \tag{2.461}$$

Darin sind die m_k beliebige ganze rationale Zahlen, die a_p nicht negative ganze rationale Zahlen mit der Einschränkung, daß stets $a_p \cdot a_{p+r_2} = 0$ ist. Die Forderungen

$$\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})\,\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\nu}) = \lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu}\hat{\nu})$$

und

$$\lambda_\mathfrak{v}(\mathsf{H}_k\hat{\mu}) = \lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$$

sind hier bei sonst beliebiger Wahl der m_k und a_p erfüllt. Ist jedoch Ξ, die in (2.422) auftretende Einheitswurzel mod $\mathfrak{v}$, von 1 verschieden, so bedingt die hinzutretende Forderung

$$\lambda_\mathfrak{v}(\Xi) = 1$$

noch nach (2.422) und (2.451)

$$\lambda_\mathfrak{v}(\Xi) = \prod_{p=r_1+1}^{n} (\Xi^{(p)})^{a_p} = e^{i A_* \sum a_p \varphi^{(p)}} = 1,$$

also

$$A_* \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \frac{\varphi^{(p)}}{2\pi} \equiv 0 \pmod 1, \tag{2.462}$$

was für die a_p noch eine Kongruenzbedingung bedeutet.

Wir tragen (2.454) in (2.461) ein und erhalten dann

$$\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu}) = \prod_{q=1}^{r+1} |\hat{\mu}^{(q)}|^{-\sum_{k=1}^{r} E_q^{(k)} \left(2\pi i (m_k + R_k) + i \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \tilde{\Theta}_k^{(p)}\right)} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(p)}|}\right)^{a_p} \tag{2.463}$$

[16]) Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen II, Math. Zeitschr. 6, S. 15, 16, 30.

mit

$$R_k = A_k \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \frac{\varphi^{(p)}}{2\pi}. \tag{2.464}$$

Nun ist nach (2.445)

$$\mathfrak{E}_\mathfrak{v}^{-1} = \mathfrak{A}_\mathfrak{v}^{-1} \mathfrak{E}^{-1}, \tag{2.465}$$

also nach (2.442) und (2.444)

$$E_q^{(k)} = \sum_{j=1}^{r} a_{kj} e_q^{(j)}. \tag{2.466}$$

Ferner folgt aus (2.456) und (2.465)

$$\tilde{\mathfrak{F}}_\mathfrak{v} \mathfrak{E}_\mathfrak{v}^{-1} = \mathfrak{F} \mathfrak{A}_\mathfrak{v} \mathfrak{A}_\mathfrak{v}^{-1} \mathfrak{E}^{-1} = \mathfrak{F} \mathfrak{E}^{-1},$$

das bedeutet aber

$$\sum_{k=1}^{r} E_r^{(k)} \tilde{\Theta}_k^{(p)} = \sum_{j=1}^{r} e_q^{(j)} \vartheta_j^{(p)}. \tag{2.467}$$

Die Eintragung von (2.466) und (2.467) in (2.463) ergibt

$$\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu}) = \prod_{q=1}^{r+1} |\hat{\mu}^{(q)}|^{-\sum_{j=1}^{r} e_q^{(j)} \left(2\pi i \sum_{k=1}^{r} a_{kj}(m_k+R_k) + i \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \vartheta_j^{(p)}\right)} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(p)}|}\right)^{a_p}. \tag{2.468}$$

Der Vergleich mit dem nach (2.461) für den Modul 1 gebildeten

$$\lambda_1(\hat{\mu}) = \prod_{q=1}^{r+1} |\hat{\mu}^{(q)}|^{-\sum_{j=1}^{r} e_q^{(j)} \left(2\pi i m_j + i \sum_{p=r_1+1}^{r} a_p \vartheta_j^{(p)}\right)} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(p)}|}\right)^{a_p}$$

läßt die Abhängigkeit von $\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ von $\mathfrak{v}$ deutlich hervortreten: das m_j in λ_1 ist durch $\sum_{k=1}^{r} a_{kj}(m_k + R_k)$ in $\lambda_\mathfrak{v}$ ersetzt. Da nach (2.423), (2.443) und (2.444) a_{kj} höchstens den Nenner $D_\mathfrak{v}$ besitzt und nach (2.462), (2.464) der Nenner von R_k höchstens A_* ist, so weist $\sum_{k=1}^{r} a_{kj}(m_k + R_k)$ höchstens den Nenner $A_* D_\mathfrak{v}$ auf.

2.47. Bei einem *Größencharakter für Ideale* kann man noch genauere Feststellungen über den Bau von $\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ machen. Es sei $\chi_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ ein Charakter für die Kongruenzklassengruppe mod $\mathfrak{v}$ im engsten Sinne. Der Charakter $\chi_\mathfrak{v}(\hat{\mu})\,\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ ist ein Größencharakter für Ideale, wenn

$$\chi_\mathfrak{v}(\varepsilon)\,\lambda_\mathfrak{v}(\varepsilon) = 1$$

für jede Einheit ε ist. Wir betrachten zunächst die Konsequenzen von

$$\chi_\mathfrak{v}(\xi)\,\lambda_\mathfrak{v}(\xi) = 1, \tag{2.471}$$

wo ξ die in (2.412) auftretende Einheitswurzel ist. Da nach (2.422) die Einheitswurzeln

$$\xi, \xi^2, \ldots, \xi^{A_*}$$

eine Untergruppe der mod $\mathfrak{v}$ nicht assoziierten Einheiten bilden, und da χ auch speziell ein Charakter für die Gruppe der Potenzen von ξ ist, so muß

$$\chi_{\mathfrak{v}}(\xi) = e^{2\pi i \frac{g}{A_*}} \tag{2.472}$$

mit ganzem rationalen g sein. Anderseits ergibt sich wegen $|\xi| = 1$ aus (2.461) oder (2.468) sofort

$$\lambda_{\mathfrak{v}}(\xi) = \prod_{p=r_1+1}^{n} (\xi^{(p)})^{a_p} = e^{i \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \varphi^{(p)}}$$

Wegen (2.471) und (2.472) folgt hieraus

$$A_* \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \frac{\varphi^{(p)}}{2\pi} \equiv -g \pmod{A_*}, \tag{2.473}$$

was eine noch über (2.462) hinausgehende Einschränkung der a_p bedeutet.

Wir betrachten nun die Forderung

$$\chi_{\mathfrak{v}}(\eta_l)\, \lambda_{\mathfrak{v}}(\eta_l) = 1 \tag{2.473}$$

mit einem η_l aus (2.412). Es ist nach (2.468) und (2.451)

$$\lambda_{\mathfrak{v}}(\eta_l) = \exp\Big\{ - \sum_{q=1}^{r+1} \log|\eta_l^{(q)}| \sum_{j=1}^{r} e_q^{(j)} \Big(2\pi i \sum_{k=1}^{r} a_{kj}(m_k + R_k) + i \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \vartheta_j^{(p)} \Big) + i \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \vartheta_l^{(p)} \Big\}.$$

Wegen (2.441) und (2.442) ist

$$\sum_{q=1}^{r+1} \log|\eta_l^{(q)}|\, e_q^{(j)} = \delta_{lj}.$$

Daher vereinfacht sich die vorige Gleichung zu

$$\lambda_{\mathfrak{v}}(\eta_l) = e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{r} a_{kl}(m_k + R_k)}. \tag{2.475}$$

Die totalpositiven, aber mod $\mathfrak{v}$ nicht assoziierten Einheiten bilden nach 2.42 eine Gruppe vom Grade $A_* D_{\mathfrak{v}}$. Da $\chi_{\mathfrak{v}}$ auch ein Charakter dieser Gruppe ist, muß $\chi_{\mathfrak{v}}(\eta_l)$ eine $A_* D_{\mathfrak{v}}$-te Einheitswurzel sein

$$\chi_{\mathfrak{v}}(\eta_l) = e^{2\pi i \frac{g_l}{A_* D_{\mathfrak{v}}}}. \tag{2.476}$$

Hieraus und aus (2.474), (2.475) folgt somit

$$A_* D_\mathfrak{v} \sum_{k=1}^{r} a_{kl}(m_k + R_k) \equiv g_l \pmod{A_* D_\mathfrak{v}}. \tag{2.477}$$

Hier steht, nach der Bemerkung am Ende von 2.46, auch links eine ganze Zahl. Sind die in R_k nach (2.464) eingehenden a_p gemäß (2.473) bestimmt, so bedeutet (2.477) für $l = 1, 2, \ldots, r$ Kongruenzbedingungen für die m_k.

Statt (2.477) können wir auch schreiben

$$A_* D_\mathfrak{v} \sum_{k=1}^{r} a_{kl}(m_k + R_k) = m_l' A_* D_\mathfrak{v} + g_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, r) \tag{2.478}$$

mit ganzen rationalen m_l'. Wichtig ist für uns später nur, daß zu den m_k gewisse ganze m_l' gehören müssen, wenn $\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})\,\chi_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ ein Größencharakter für Ideale sein soll. Der Vollständigkeit halber zeigen wir aber noch, daß auch umgekehrt zu jedem System ganzer rationaler $m_1' \ldots m_r$ genau eine Lösung in ganzen m_k existiert[17]). Daß die Lösung nur eindeutig sein kann, folgt zunächst aus dem Nichtverschwinden der Determinante der a_{kl}. Daß die m_k ganze Zahlen sind, schließen wir folgendermaßen auf Grund von Eigenschaften des Charakters $\chi(\hat{\mu})$. Aus (2.473) folgt mit Benutzung von (2.464) die Gleichung

$$G_k = -A_k\left(\frac{g}{A_*} + G\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

mit einem gewissen ganzen rationalen G. Dadurch erhält man aus (2.478)

$$D_\mathfrak{v} \sum_{k=1}^{r} a_{kl}(m_k - A_k G) = \frac{1}{A_*}\left(g_l + g D_\mathfrak{v} \sum_{k=1}^{r} a_{kl} A_k\right) + m_l' D_\mathfrak{v}.$$

Da nun die Determinante der a_{kl} den Wert $\frac{1}{D_\mathfrak{v}}$ hat (nach (2.423), (2.443), (2.444)), so lassen diese Gleichungen ganzzahlige Lösungen $(m_k - A_k G)$, also auch ganzzahlige Lösungen m_k zu, sobald die rechte Seite ganz ist. Das ist nun wirklich der Fall. Denn da $\chi_\mathfrak{v}$ ein Charakter mod $\mathfrak{v}$ für die Kongruenzklassengruppe im engsten Sinne ist, so muß

$$\chi_\mathfrak{v}(\mathsf{H}_k) = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

sein. Nach (2.422) bedeutet dies

$$\chi_\mathfrak{v}(\xi^{A_k})\,\chi_\mathfrak{v}(\eta_1^{A_{1k}}) \ldots \chi_\mathfrak{v}(\eta_r^{A_{rk}}) = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

[17]) D. h. also, daß zu vorgegebenen $\chi_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$, $m_1', \ldots, m_r'$ genau ein solches $\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ gehört, so daß $\chi_\mathfrak{v}(\hat{\mu})\,\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ ein Größencharakter für Ideale ist.

woraus nach (2.472) und (2.476) folgt, daß

$$\frac{A_k g}{A_*} + \sum_{j=1}^{r} A_{jk} \frac{g_j}{A_* D_\mathfrak{v}}$$

ganze rationale Zahlen sein müssen. Nun sind die $D_\mathfrak{v} a_{kl}$ auch ganz, also sind auch

$$\frac{1}{A_*}\Big(g D_\mathfrak{v} \sum_{k=1}^{r} a_{kl} A_k + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{kl} A_{jk} g_j\Big) = \frac{1}{A_*}\Big(g D_\mathfrak{v} \sum_{k=1}^{r} a_{kl} A_k + g_l\Big)$$
$$(l = 1, 2, \ldots, r)$$

ganz rational, was zu beweisen war.

Tragen wir nun (2.478) in (2.468) ein, so geht daraus hervor

$$\text{2.479)} \quad \lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu}) = \prod_{q=1}^{r+1} |\hat{\mu}^{(q)}|^{-\sum_{j=1}^{r} e_q^{(j)}\left(2\pi i\left(m + \frac{g_j}{A_* D_\mathfrak{v}}\right) + i \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \vartheta_j^{(p)}\right)} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(p)}|}\right)^{a_p}.$$

Die Abhängigkeit vom Modul $\mathfrak{v}$ erscheint hier nur noch in dem im Exponenten auftretenden Nenner $A_* D_\mathfrak{v}$ und in dem Modul A_* der Bedingung (2.473) für die a_p; die g_j und das in (2.473) auftretende g sind nach (2.476) bzw. (2.472) durch das spezielle $\chi_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ bestimmt und weisen darauf hin, daß dieses $\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ gerade mit $\chi_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ multipliziert einen Größencharakter für Ideale ergibt.

2.48. Zum Schluß noch eine Bemerkung über die Zusammensetzung zweier beliebiger Größencharaktere, die zu verschiedenen Moduln gehören.

Hilfssatz 11. *Das Ideal $\mathfrak{A}$ sei ein Teiler von $\mathfrak{v}$. Jeder Größencharakter $\Lambda_\mathfrak{A}(\hat{\mu})$ mod $\mathfrak{A}$ ist dann auch ein Größencharakter $\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ mod $\mathfrak{v}$ (aber nicht umgekehrt). Das Produkt $\Lambda_\mathfrak{A}(\hat{\mu})\,\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ ist wieder ein Größencharakter* mod $\mathfrak{v}$.

Beweis. Nach Herrn Hecke sind die Größencharaktere mod $\mathfrak{a}$ alle Funktionen, die den Bedingungen

$$\text{(2.481)} \qquad \lambda_\mathfrak{a}(\hat{\mu})\,\lambda_\mathfrak{a}(\hat{\nu}) = \lambda_\mathfrak{a}(\hat{\mu}\hat{\nu}),$$

$$\text{(2.482)} \qquad \lambda_\mathfrak{a}(\varepsilon_\mathfrak{a}\hat{\mu}) = \lambda(\hat{\mu})$$

für jede Einheit $\varepsilon_\mathfrak{a}$ mod $\mathfrak{a}$ genügen mit dem Zusatz, daß diese Funktionen *stetig* sind als Funktionen solcher stetigen Variablen $x^{(p)}$, die man sich an die Stelle der n Konjugierten von $\hat{\mu}$ (mit den Bedingungen $x^{(1)}, \ldots x^{(r_1)}$ beliebig komplex, $x^{(p+r_2)} = \bar{x}^{(p)}$ für $p = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2$) gesetzt denken muß. Unter der Voraussetzung $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{v}$ ist nun jede Einheit H mod $\mathfrak{v}$, die ja durch

$$\mathsf{H} > 0, \quad \mathsf{H} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{v}}$$

charakterisiert ist, auch eine Einheit mod $\mathfrak{A}$. Für den Modul $\mathfrak{a} = \mathfrak{A}$ sind also die zum Modul $\mathfrak{v}$ gehörenden Bedingungen mit in (2.482) enthalten, während (2.481) für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{v}$ in gleicher Weise gilt. Daher erfüllt $\Lambda_{\mathfrak{A}}(\hat{\mu})$ auch die Bedingungen, die für $\lambda_{\mathfrak{v}}(\hat{\mu})$ notwendig und hinreichend sind; also ist $\Lambda_{\mathfrak{A}}(\hat{\mu})$ auch ein $\lambda_{\mathfrak{v}}(\hat{\mu})$. Daß schließlich $\Lambda_{\mathfrak{A}}(\hat{\mu})\,\lambda_{\mathfrak{v}}(\hat{\mu})$ wieder ein Größencharakter mod $\mathfrak{v}$ ist, folgt nun einfach daraus, daß das Produkt zweier Größencharaktere mod $\mathfrak{v}$ wieder ein Größencharakter mod $\mathfrak{v}$ ist, da es für $\mathfrak{a} = \mathfrak{v}$ die beiden Bedingungen (2.481), (2.482) auch mit der erwähnten Interpretation stetiger Abhängigkeit von den Konjugierten von $\hat{\mu}$ erfüllt.

3. Verallgemeinerung einer Heckeschen Formel.

3.1. In diesem Abschnitt seien $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots, \mathsf{H}_r$ wieder die in **2.42** eingeführten Grundeinheiten mod $\mathfrak{v}$. Wir werden aber davon, daß diese Zahlen Körperzahlen sind, erst bei der späteren Anwendung (in **5.3**) Gebrauch machen. Gegenwärtig sind nur folgende Eigenschaften der H wichtig: Es gibt r_1 Systeme von positiven Zahlen

$$\mathsf{H}_1^{(q)}, \mathsf{H}_2^{(q)}, \ldots, \mathsf{H}_r^{(q)} \qquad (q = 1, 2, \ldots, r_1)$$

und r_2 Systeme von komplexen Zahlen

$$\mathsf{H}_1^{(q)}, \mathsf{H}_2^{(q)}, \ldots, \mathsf{H}_r^{(q)} \qquad (q = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2)$$

mit $r_1 \geqq 0$, $r_2 \geqq 0$, $r_1 + r_2 - 1 = r > 0$, so daß je r von diesen Systemen linear unabhängig sind und daß

$$\sum_{q=1}^{r+1} e_q \log |\mathsf{H}_k^{(q)}| = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{3.11}$$

ist mit den e_q aus (2.442), d. h.

$$e_q = 1 \quad \text{für} \quad q = 1, 2, \ldots, r_1,$$
$$e_q = 2 \quad \text{für} \quad q = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2.$$

Wir schicken noch einen Hilfssatz voraus, um die späteren Untersuchungen zu entlasten.

Hilfssatz 12. *Es seien $T_1, T_2, \ldots, T_{r+1}$ positive Zahlen, $T > 0$ sei die kleinste von ihnen; es seien $n_1, n_2, \ldots, n_{r+1}$ nichtnegative reelle Zahlen. Dann ist*

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int e^{-\sum_{q=1}^{r+1} T_q e^{\sum_{k=1}^{r} u_k \log |\mathsf{H}_k^{(q)}|}} \cdot e^{\sum_{q=1}^{r+1} n_q e_q \sum_{k=1}^{r} u_k \log |\mathsf{H}_k^{(q)}|} du_1 \ldots du_r \tag{3.121}$$

konvergent, und für $n_1 = n_2 = \ldots = n_{r+1} = 0$ und $0 < A \leqq \sigma \leqq B$ gibt es eine von den T_q und σ unabhängige Konstante $C = C(A, B)$, so daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int e^{-\sum_{q=1}^{r+1} T_q e^{\sum_{k=1}^{r} u_k \log|H_k^{(q)}|}}\, du_1 \ldots du_r < C T^{-\sigma} \tag{3.122}$$

ist.

Beweis. Wir setzen

$$e_q \sum_{k=1}^{r} u_k \log|H_k^{(q)}| = y_q \qquad (q = 1, 2, \ldots, r+1); \tag{3.131}$$

dann ist wegen (3.11)

$$\sum_{q=1}^{r+1} y_q = 0. \tag{3.132}$$

Von den $(r+1)$ Variablen y_q nehmen wir r beliebige als unabhängige Variable, z. B. die ersten r. Dann ist

$$\left|\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_r)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_r)}\right| = \frac{1}{R_0} \tag{3.14}$$

wegen

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_r)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_r)} = \begin{vmatrix} e_1 \log|H_1^{(1)}| & e_1 \log|H_2^{(1)}| & \ldots & e_1 \log|H_r^{(1)}| \\ e_2 \log|H_1^{(2)}| & e_2 \log|H_2^{(2)}| & \ldots & e_2 \log|H_r^{(2)}| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_r \log|H_1^{(r)}| & e_r \log|H_2^{(r)}| & \ldots & e_r \log|H_r^{(r)}| \end{vmatrix} = \pm R_0$$

Man folgert aus (3.131) und (3.132) leicht, daß auch bei anderer Auswahl der r unabhängigen Variablen der absolute Betrag der Funktionaldeterminante sich nicht ändert. Von dieser Tatsache werden wir noch Gebrauch machen, indem wir die unabhängigen Variablen aus den sonst gleichberechtigten y_q zweckmäßig wählen. Durch (3.131) erhalten wir aus (3.121)

$$J = \frac{1}{R_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int e^{-\sum_{q=1}^{r+1} T_q e^{\frac{y_q}{e_q}}} e^{\sum_{q=1}^{r+1} n_q y_q}\, dY \leqq \frac{1}{R_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int e^{-T\sum_{q=1}^{r+1} e^{\frac{y_q}{e_q}}} e^{\sum_{q=1}^{r+1} n_q y_q}\, dY,$$

wo dY eine Abkürzung für ein Produkt von beliebigen r verschiedenen dy_q sein soll.

Den gesamten r-dimensionalen unendlichen Integrationsraum der unabhängigen Variablen $u_1, \ldots, u_r$ zerlegen wir nun in endlich viele halbkegelförmige Teilbereiche, deren Spitzen im Nullpunkt liegen und die dadurch bestimmt sein sollen, daß in jedem dieser Teilbereiche das System der Variablen

$$y_1, y_2, \ldots, y_r, y_{r+1}$$

eine unveränderliche Vorzeichenverteilung besitzt. Wegen (3.132) ist es

ausgeschlossen, daß alle $(r+1)$ Variablen von gleichem Vorzeichen sind. Jede andere Vorzeichenverteilung ist aber möglich, weil (3.132) auch die einzige Einschränkung der Variablen enthält. Da $y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}$ und $Ky_1, Ky_2, \ldots, Ky_{r+1}$ für $K>0$ die gleiche Vorzeichenverteilung besitzen, so sind die Bereiche konstanter Vorzeichenverteilung in der Tat halbkegelförmig.

In jedem dieser Integrationsteilbereiche $\mathfrak{B}$ wählen wir nun als einzige abhängige von den Variablen y_q eine solche, die in diesem Bereich überall $\leqq 0$ ist. Die Teilintegrale sind also von dem Typ:

$$J_{\mathfrak{B}} = \frac{1}{R_0}\int_{\mathfrak{B}} \ldots \int e^{-T\sum_{q=1}^{r+1} e^{\frac{y_q}{e_q}}} e^{\sum_{q=1}^{r+1} n_q y_q}\, dy_{q_1} dy_{q_2} \ldots dy_{q_r},$$

das über den Bereich

$$\mathfrak{B}: \quad y_{q_1} \geqq 0,\ y_{q_2} \geqq 0, \ldots, y_{q_h} \geqq 0;\ y_{q_{h+1}} \leqq 0, \ldots, y_{q_r} \leqq 0,\ y_{q_{r+1}} \leqq 0$$

zu erstrecken ist, wo $q_1, q_2, \ldots, q_{r+1}$ eine Permutation der Indizes $1, 2, \ldots, r+1$ darstellen soll und wo wir $y_{q_{r+1}}$ als die durch (3.132) bestimmte abhängige Variable gewählt haben. Nun vergrößern wir den ersten Faktor des Integranden, wenn wir Summanden in seinem Exponenten weglassen; der zweite Faktor wird vergrößert durch Weglassung negativer Summanden in seinem Exponenten. Daher ist

$$J_{\mathfrak{B}} < \frac{1}{R_0}\int_{\mathfrak{B}} \ldots \int e^{-T\sum_{j=1}^{h} e^{\frac{y_{q_j}}{e_{q_j}}}} e^{\sum_{j=1}^{h} n_{q_j} y_{q_j}}\, dy_{q_1} dy_{q_2} \ldots dy_{q_r}.$$

Da in den Exponenten jetzt nur noch positive y_q auftreten, so ist, wenn $N \geqq n_q$ für $q = 1, 2, \ldots, r+1$ ist, erst recht

$$J_{\mathfrak{B}} < \frac{1}{R_0}\int_{\mathfrak{B}} \ldots \int e^{-T\sum_{j=1}^{h} e^{\frac{1}{2} y_{q_j}}} e^{N\sum_{j=1}^{h} y_{q_j}}\, dy_{q_1} dy_{q_2} \ldots dy_{q_r}.$$

Jetzt steht aber rechts ein Integral, in dem die positiven und die negativen Variablen je untereinander völlig gleichberechtigt sind; es kommt also nur noch auf die *Anzahl* der positiven, bzw. der negativen Variablen an. Berücksichtigen wir dies, so können wir Integrale mit gleicher Anzahl positiver y_q mit dem gleichen Namen versehen und haben daher

$$J < \frac{1}{R_0}\sum_{h=1}^{r} \binom{r+1}{h} J_h, \tag{3.15}$$

wo J_h das über den Bereich

(3.161) $\mathfrak{B}_h$: $y_1 \geqq 0, \ldots, y_h \geqq 0;\ y_{h+1} \leqq 0, \ldots, y_r \leqq 0,\ y_{r+1} \leqq 0$

erstreckte Integral

$$(3.162) \qquad J_h = \int_{\mathfrak{B}_h} \cdots \int e^{-T\sum_{q=1}^{h} e^{\frac{1}{2}y_q}} e^{N\sum_{q=1}^{h} y_q} dy_1 dy_2 \ldots dy_r$$

ist. Nun ist

$$(3.17) \quad J_h = \int_0^{\infty}\!\!\!{}_{y_1} \cdots \int_0^{\infty}\!\!\!{}_{y_h} e^{-T\sum_{q=1}^{h} e^{\frac{1}{2}y_q}} e^{N\sum_{q=1}^{h} y_q} \Big\{ \int_{\substack{y_{h+1} \\ y_{h+1} \leqq 0 \ldots y_r \leqq 0 \\ y_{r+1} \leqq 0}}^{y_r} \cdots \int dy_{h+1} \ldots dy_r \Big\} dy_1 \ldots dy_h.$$

Hierin ist das innere Integral

$$\int_{\substack{y_{h+1} \leqq 0 \\ y_{r+1} \leqq 0}} \cdots \int_{y_r \leqq 0} dy_{h+1} \ldots dy_r = \int_{\substack{y_{h+1} \leqq 0 \\ -\sum_{q=1}^{r} y_q \leqq 0}} \cdots \int_{y_r \leqq 0} dy_{h+1} \ldots dy_r = \int_{\substack{y'_{h+1} \geqq 0 \ldots y'_r \geqq 0 \\ \sum_{q=h+1}^{r} y'_q \leqq \sum_{q=1}^{h} y_q}} \cdots \int dy'_{h+1} \ldots dy'_r$$

$$= \frac{1}{(r-h)!} \Big(\sum_{q=1}^{h} y_q \Big)^{r-h},$$

letzteres z. B. auf Grund einer bekannten Dirichletschen Formel. Dies in (3.17) eingetragen, ergibt

$$J_h = \frac{1}{(r-h)!} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} e^{-T\sum_{q=1}^{h} e^{\frac{1}{2}y_q}} e^{N\sum_{q=1}^{h} y_q} \Big(\sum_{q=1}^{h} y_q \Big)^{r-h} dy_1 \ldots dy_h$$

$$< \frac{1}{(r-h)!} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} e^{-T\sum_{q=1}^{h} e^{\frac{1}{2}y_q}} e^{N\sum_{q=1}^{h} y_q} \prod_{q=1}^{h} (1+y_q)^{r-h} dy_1 \ldots dy_h$$

$$= \frac{1}{(r-h)!} \Big(\int_0^{\infty} e^{-Te^{\frac{1}{2}y}} e^{Ny} (1+y)^{r-h} dy \Big)^h$$

$$= \frac{1}{(r-h)!} \Big(\int_1^{\infty} e^{-Tz} z^{2N} (1+2\log z)^{r-h} \frac{2\,dz}{z} \Big)^h.$$

Da dieses Integral konvergiert, so erst recht J_h und nach (3.15) auch J, womit der erste Teil des Hilfssatzes bewiesen ist. Für $n_1 = n_2 = \ldots = n_{r+1} = 0$, also auch $N = 0$ ist ferner

$$J_h < \frac{1}{(r-h)!} \Big(\int_1^{\infty} e^{-Tz} (1+2\log z)^{r-h} \frac{2\,dz}{z} \Big)^h.$$

Da nun

$$1 \leqq 1 + 2\log z \leqq \frac{2+\alpha}{\alpha} z^{\alpha} \quad \text{für} \quad z \geqq 1,\ \alpha > 0$$

und somit

$$1 \leqq (1 + 2\log z)^{r-h} \leqq \left(\frac{2r^2+\sigma}{\sigma}\right)^{r-h} z^{\frac{\sigma}{h}} \quad \text{für} \quad z \geqq 1,\ \sigma > 0$$

ist, so folgt

$$J_h < \left(\frac{2r^2+\sigma}{\sigma}\right)^{(r-h)h} \frac{2^h}{(r-h)!} \left(\int_1^{\infty} e^{-Tz} z^{\frac{\sigma}{h}-1} dz\right)^h,$$

$$J_h < C\left(\frac{2r^2+\sigma}{\sigma}\right)^{(r-h)h} \Gamma\left(\frac{\sigma}{h}\right)^h T^{-\sigma}.$$

Mit Hilfe von (3.15) folgt hieraus auch die Behauptung (3.122) des Hilfssatzes.

3.2. Hilfssatz 13. *Es sei*

$$W_1, \ldots W_{r_1} \text{ komplex}, \quad \Re(W_q) > 0,$$
$$W_{r_1+1}, \ldots W_{r_1+r_2} > 0,$$
$$Z_{r_1+1}, \ldots Z_{r_1+r_2} > 0,$$
$$l_{r_1+1}, \ldots l_{r_1+r_2} \text{ rational ganz}, \quad l_p \geqq 0,$$
$$v_1, \ldots v_{r_1+r_2} \text{ reell}, \quad \sum_{q=1}^{r_1+r_2} v_q = 0.$$

Dann ist mit $\sigma_0 > 0$

$$\frac{R_v}{2^{r_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int e^{-\sum_{q=1}^{r+1} W_q e^{t_q}} e^{i\sum_{q=1}^{r+1} v_q t_q} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} J_{l_p}(2 Z_p e^{t_p})\, du_1 du_2 \ldots du_r$$

$$(3.211) \qquad = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\Gamma(e_q s + i v_q)}{W_q^{e_q s + i v_q}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{Z_p^{l_p}}{(W_p^2 + 4Z_p^2)^{\frac{l_p + e_p s + i v_p}{2}}} \frac{\Gamma(l_p + e_p s + i v_p)}{\Gamma(l_p+1)}$$

$$\times F\left(\frac{l_p + e_p s + i v_p}{2}, \frac{l_p + 1 - e_p s - i v_p}{2}; l_p + 1; \frac{4Z_p^2}{W_p^2 + 4Z_p^2}\right) ds,$$

worin J_l *die* l*-te Besselsche Funktion und* F *die hypergeometrische Funktion bedeuten sollen, die Exponentialfunktion mit der Bestimmung*

$$W_q^s = e^{s \log W_q}, \quad |\Im(\log W_q)| < \frac{\pi}{2}$$

vorkommt und ferner die Abkürzung

$$(3.212) \qquad t_q = \sum_{k=1}^{r} u_k \log |\mathsf{H}_k^{(q)}| \qquad (q = 1, 2, \ldots, r+1)$$

gebraucht ist, im übrigen aber die Bezeichnungen des vorigen Hilfssatzes beibehalten sind.

Beweis. Da man in der für $\Re(s) > 0$ gültigen Formel

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$$

den Integrationsweg in der x-Ebene um einen kleineren Winkel als $\frac{\pi}{2}$, speziell also um $\arg W_q$ drehen kann, so erhält man

$$\frac{\Gamma(e_q s + i v_q)}{W_q^{e_q s + i v_q}} = \int_0^\infty e^{-W_q x_q} x_q^{e_q s + i v_q - 1}\, dx_q \qquad (q = 1, \dots r_1) \tag{3.22}$$

für $\Re(s) > 0$.

Ferner besteht nach Hankel die Gleichung [18])

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_\nu(bx) x^{\mu-1}\, dx$$

$$= \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^\nu \Gamma(\mu+\nu)}{(a^2+b^2)^{\frac{\mu+\nu}{2}} \Gamma(\nu+1)} F\left(\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu+\nu}{2}; \nu+1; \frac{b^2}{a^2+b^2}\right)$$

für $\Re(\mu+\nu) > 0$, $a > 0$, $b > 0$. Wegen $0 < \frac{b^2}{a^2+b^2} < 1$ ist die hier auftretende hypergeometrische Funktion eindeutig durch die hypergeometrische Reihe darstellbar. Aus dieser Formel erhalten wir für $\Re(s) > 0$

$$\int_0^\infty e^{-W_p x_p} J_{l_p}(2 Z_p x_p)\, x_p^{e_p s + i v_p - 1}\, dx_p$$

$$= \frac{Z_p^{l_p}}{(W_p^2 + 4 Z_p^2)^{\frac{l_p + e_p s + i v_p}{2}}} \frac{\Gamma(l_p + e_p s + i v_p)}{\Gamma(l_p+1)} \tag{3.23}$$

$$\times F\left(\frac{l_p + e_p s + i v_p}{2}, \frac{l_p + 1 - e_p s - i v_p}{2}; l_p + 1; \frac{4 Z_p^2}{W_p^2 + 4 Z_p^2}\right)$$

$$(p = r_1 + 1, \dots r_1 + r_2).$$

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 13 zeigen, daß hier die Bedingungen für die Hankelsche Formel erfüllt sind. Aus (3.22) und (3.23) geht durch Multiplikation hervor

$$\prod_{q=1}^{r_1} \frac{\Gamma(e_q s + i v_q)}{W_q^{e_q s + i v_q}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{Z_p^{l_p}}{(W_p^2 + 4 Z_p^2)^{\frac{l_p + e_p s + i v_p}{2}}} \frac{\Gamma(l_p + e_p s + i v_p)}{\Gamma(l_p+1)}$$

$$\times F\left(\frac{l_p + e_p s + i v_p}{2}; \frac{l_p + 1 - e_p s - i v_p}{2}; l_p + 1; \frac{4 Z_p^2}{W_p^2 + 4 Z_p^2}\right) \tag{3.24}$$

$$= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_{q=1}^{r+1} W_q x_q} \prod_{q=1}^{r+1} x_q^{e_q s + i v_q - 1} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} J_{l_p}(2 Z_p x_p)\, dx_1 \dots dx_{r+1}.$$

[18]) Hankel, Bestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen, Math. Annalen 8 (1875), S. 453–470, insbesondere S. 468. Ferner Watson, S. 383 Formel (3).

Hierin ist ein Übergang von einem Produkt von $(r+1)$ Integralen zu einem $(r+1)$-fachen Integral vollzogen worden, der für $\Re(s) = \sigma > 0$ gestattet ist, da

$$|J_{l_p}(2Z_p x_p)| \leqq 1 \tag{3.25}$$

ist (was wegen der Realität von $2Z_p x_p$ aus

$$J_{l_p}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(l_p \varphi - x \sin \varphi)}\, d\varphi$$

ohne weiteres folgt) und da somit

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_{q=1}^{r+1} \Re(W_q) x_q} \prod_{q=1}^{r+1} x_q^{e_q \sigma - 1}\, dx_1 \dots dx_{r+1}$$

eine Majorante des $(r+1)$-fachen Integrals ist, die offenbar endlich ausfällt unter den Voraussetzungen über σ und die W_q. In dem Integral von (3.24) führen wir nun neue Integrationsvariable $u, u_1, \dots, u_r$ ein durch

$$x_q = u^{\frac{1}{n}} e^{\sum_{k=1}^{r} u_k \log |\mathsf{H}_k^{(q)}|} = u^{\frac{1}{n}} e^{t_q} \qquad (q = 1, \dots r+1).$$

Man findet leicht

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})}{\partial(u, u_1, \dots, u_r)} \right| = \frac{x_1 x_2 \dots x_{r+1}}{u} R_v\, 2^{-r_2},$$

und nach einigen kleinen Rechnungen, in denen man

$$\sum_{q+1}^{r+1} e_q = n, \qquad \sum_{q=1}^{r+1} e_q \log |\mathsf{H}_k^{(q)}| = 0$$

(siehe (2.441) und (2.442)) und die Voraussetzung $\sum_{q=1}^{r+1} v_q = 0$ zu berücksichtigen hat,

$$\begin{aligned} &\prod_{q=1}^{r_1} \frac{\Gamma(e_q s + i v_q)}{W_q^{e_q s + i v_q}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{Z_p^{l_p}}{(W_p^2 + 4Z_p^2)^{\frac{l_p + e_p s + i v_p}{2}}} \frac{\Gamma(l_p + e_p s + i v_p)}{\Gamma(l_p + 1)} \\ &\qquad \times F\left(\frac{l_p + e_p s + i v_p}{2}, \frac{l_p + 1 - e_p s - i v_p}{2}; l_p + 1; \frac{4Z_p^2}{W_p^2 + 4Z_p^2} \right) \qquad (3.261) \\ &= \frac{R_v}{2^{r_2}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^{\frac{1}{n}} \sum_{q=1}^{r+1} W_q e^{t_q}} e^{i \sum_{q=1}^{r+1} v_q t_q} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} J_{l_p}\left(2 Z_p u^{\frac{1}{n}} e^{t_p}\right) u^{s-1}\, du\, du_1 \dots \\ &= \int_0^\infty \Phi(u)\, u^{s-1}\, du \end{aligned}$$

mit

$$262)\quad \Phi(u)=\frac{R_0}{2^{r_2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^{\frac{1}{n}}\sum_{q=1}^{r+1} W_q e^{t_q}\, i\sum_{q=1}^{r+1} v_q t_q} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} J_{l_p}\left(2Z_p u^{\frac{1}{n}} e^{t_p}\right) du_1\dots du_r.$$

In $\Phi(u)$ müssen wir, um nachher die Mellinsche Theorie anwenden zu können, u vorübergehend als komplexe Variable betrachten. Es sei

$$(3.271)\qquad |\arg W_q| \leqq \psi < \frac{\pi}{2}.$$

Dann wählen wir, bei vorübergehend festgehaltenen W_q und Z_p, ein solches ψ^*, $0<\psi^*<\frac{\pi}{2}-\psi$, so daß

$$(3.272)\qquad -|W_p|\cos(\psi+\psi^*)+2Z_p\sin\psi^* = -\tau_p<0$$
$$(p=r_1+1,\dots,r_1+r_2),$$

und lassen für $u^{\frac{1}{n}}$ den Winkelraum

$$(3.273)\qquad \frac{1}{n}|\arg u| \leqq \psi^*$$

zu. Dann variiert auch $2Z_p u^{\frac{1}{n}} e^{t_p}$ in diesem Winkelraum. Da nun für die bestimmten Indizes $l_{r_1+1},\dots l_{r_1+r_2}$

$$(3.274)\qquad |J_{l_p}(z)|<Ce^{|z|\sin\psi^*}\quad \text{für}\quad |\arg z|\leqq\psi^*$$

ist (in diesem Winkelraum ist bekanntlich[19]) für wachsendes $|z|$ $J_{l_p}(z)=O\left(\frac{|e^{iz}|+|e^{-iz}|}{\sqrt{z}}\right)$, also (3.274) außerhalb eines hinreichend großen Kreises erfüllt; in diesem Kreise ist aber $J_{l_p}(z)$ sogar beschränkt, da es unter den Voraussetzungen über l_p eine ganze Funktion ist), so gilt wegen (3.262), (3.271), (3.273), (3.274)

$$|\Phi(u)|<C\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int e^{-|u|^{\frac{1}{n}}\cos(\psi+\psi^*)\sum_{q=1}^{r+1}|W_q|e^{t_q}+|u|^{\frac{1}{n}}2\sin\psi^*\sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}Z_p e^{t_p}} du_1\dots du_r$$

und nach (3.272)

$$|\Phi(u)|<C\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int e^{-|u|^{\frac{1}{n}}\sum_{q=1}^{r+1}\tau_q e^{t_q}} du_1\dots du_r,$$

worin zur Abkürzung noch $\tau_q=|W_q|\cos(\psi+\psi^*)$ für $q=1,\dots r_1$ ge-

[19]) Vgl. z. B. Watson S. 199, Formel (1).

setzt ist. Nach Hilfssatz 12 ist daher, wenn man noch $\tau = \mathrm{Min}(\tau_q)$ setzt, für $0 < A \leqq \sigma \leqq B$

$$|\Phi(u)| < C\left(\tau |u|^{\frac{1}{n}}\right)^{-\sigma}.$$

In dem betrachteten Winkelraum ist daher $\left|\Phi(u)\, u^{\frac{\sigma}{n}}\right|$ gleichmäßig beschränkt für alle σ, die $0 < A \leqq \sigma \leqq B$ erfüllen. Daher lassen sich auf (3.261) die Mellinschen Sätze über „reziproke Funktionen“ [20]) anwenden, und man erhält für $\sigma_0 > 0$

$$\Phi(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\Gamma(e_q s + i v_q)}{W_q^{e_q s + i v_q}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{Z_p^{l_p}}{(W_p^2 + 4 Z_p^2)^{\frac{l_p + e_p s + i v_p}{2}}} \frac{\Gamma(l_p + e_p s + i v_p}{\Gamma(l_p + 1)}$$

(3.28)

$$\times F\left(\frac{l_p + e_p s + i v_p}{2}, \frac{l_p + 1 - e_p s - i v_p}{2}; l_p + 1; \frac{4 Z_p^2}{W_p^2 + 4 Z_p^2}\right) u^{-s}\, ds.$$

Aus (3.262) und (3.28) folgt aber für $u = 1$ die behauptete Gleichung (3.211).

3.3. Hilfssatz 14. *Haben $W_1, W_2, \ldots, W_{r+1}$ die in Hilfssatz 13 angegebenen Eigenschaften und sind*

$$z_{r_1+1}, \ldots z_n$$

komplexe Zahlen, die den Bedingungen

$$z_{p+r_2} = \bar{z}_p \qquad (p = r_1 + 1, \ldots r_1 + r_2) \tag{3.311}$$

genügen, so ist für $\sigma_0 > 0$

$$\sum_{\substack{b_1, \ldots, b_r \\ -\infty}}^{+\infty} \exp\left\{-\sum_{q=1}^{r+1} \left|\mathsf{H}_1^{(q) b_1} \ldots \mathsf{H}_r^{(q) b_r}\right| W_q + 2\pi i \sum_{p=r_1+1}^{n} \mathsf{H}_1^{(p) b_1} \ldots \mathsf{H}_r^{(p) b_r} z_p\right\}$$

$$(3.312) = \frac{1}{2\pi i} \frac{2^{r_2}}{R_v} \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_r \\ -\infty}}^{+\infty} \sum_{\substack{a_{r_1+1}, \ldots, a_n \\ Q}}^{\infty} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\Gamma(e_q s + i v_q)}{W_q^{e_q s + i v_q}}$$

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{(2\pi i z_p)^{a_p} (2\pi i z_{p+r_2})^{a_{p+r_2}}}{(W_p^2 + 16\pi^2 |z_p|^2)^{\frac{a_p + a_{p+r_2} + e_p s + i v_p}{2}}} \frac{\Gamma(a_p + a_{p+r_2} + e_p s + i v_p)}{\Gamma(a_p + a_{p+r_2} + 1)}$$

$$\times F\left(\frac{a_p + a_{p+r_2} + e_p s + i v_p}{2}, \frac{a_p + a_{p+r_2} + 1 - e_p s - i v_p}{2}; a_p + a_{p+r_2} + 1; \frac{16\pi^2 |z_p|^2}{W_p^2 + 16\pi^2 |z_p|^2}\right.$$

worin die $b_1, \ldots, b_r$ sowohl als auch die $n_1, \ldots, n_r$ je unabhängig von-

[20]) Hj. Mellin, Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen, Math. Annalen 68 (1910), S. 305–337.

einander alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen, die $a_{r_1+1}, \ldots, a_n$ *dagegen nur die nichtnegativen ganzen rationalen Zahlen mit der Maßgabe, daß stets*

$$a_p a_{p+r_2} = 0 \qquad (p = r_1+1, \ldots, r_1+r_2) \tag{3.313}$$

ist. Ferner ist in (3.312) *die Abkürzung*

$$v_q = \sum_{k=1}^{r} E_q^{(k)} \Big(2\pi m_k + \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \Theta_k^{(p)} \Big) \tag{3.314}$$

gebraucht. Die Bedeutung von $\mathsf{H}_k^{(q)}$, $\Theta_k^{(q)}$, $E_q^{(k)}$ *geht aus Abschnitt* 2.42 *und aus* (2.441), (2.442), (2.451), (2.452) *hervor.*

Beweis. Die in (3.312) links stehende Summe ist absolut konvergent, denn die im Exponenten auftretende Summe

$$2\pi i \sum_{p=r_1+1}^{n} \mathsf{H}_1^{(p)b_1} \ldots \mathsf{H}_r^{(p)b_r} z_p$$

ist wegen der Festsetzung (3.311) rein imaginär, und

$$\sum_{\substack{b_1,\ldots,b_r \\ -\infty}}^{+\infty} \exp\left\{ -\sum_{q=1}^{r+1} \left| \mathsf{H}_1^{(q)b_1} \ldots \mathsf{H}_r^{(q)b_r} \right| \Re(W_q) \right\}$$

$$= \sum_{\substack{b_1,\ldots,b_r \\ -\infty}}^{+\infty} \exp\left\{ -\sum_{q=1}^{r+1} \Re(W_q)\, e^{\sum_{k=1}^{r} b_k \log |\mathsf{H}_k^{(q)}|} \right\}$$

ist konvergent, wie aus dem Vergleich mit dem konvergenten Integral (3.122) hervorgeht.

Die Funktion

$$\sum_{\substack{b_1,\ldots,b_r \\ -\infty}}^{+\infty} \exp\left\{ -\sum_{q=1}^{r+1} \left| \mathsf{H}_1^{(q)b_1+u_1} \ldots \mathsf{H}_r^{(q)b_r+u_r} \right| W_q + 2\pi i \sum_{p=r_1+1}^{n} \mathsf{H}_1^{(p)b_1+u_1} \ldots \mathsf{H}_r^{(p)b_r+u_r} z_p \right\} \tag{321}$$

worin

$$\mathsf{H}_k^{(p)u_k} = e^{u_k \left(\log |\mathsf{H}_k^{(p)}| + i\Theta_k^{(p)} \right)}$$

gemeint ist, besitzt in jeder der reellen Variablen $u_1, u_2, \ldots, u_r$ die Periode 1, da eine Veränderung des Summationsindex b_k um 1 die Summe in sich überführt. Die Funktion (3.321) läßt sich ferner beliebig oft nach den u_k differenzieren, da eine kleine Rechnung zeigt, daß bei wiederholtem Differenzieren nach irgendwelchen der u_k nur solche Summen entstehen, deren absolute und in den u_k gleichmäßige Konvergenz durch Vergleichung mit einer endlichen Summe von konvergenten uneigentlichen Integralen der Form (3.121) bestätigt werden kann. Daher läßt sich die Funktion

(3.321) in eine r-fache Fouriersche Reihe nach den Variablen $u_1, \ldots, u_r$ entwickeln. Nach einem bekannten Prinzip, von dem neuerdings Herr Hecke hervorragende Anwendungen gemacht hat, folgt daher die Gleichung

$$\sum_{\substack{b_1,\ldots,b_r \\ -\infty}}^{+\infty} \exp\left\{-\sum_{q=1}^{r+1}\left|\mathsf{H}_1^{(q)b_1}\ldots\mathsf{H}_r^{(q)b_r}\right|W_q+2\pi i\sum_{p=r_1+1}^{+\infty}\mathsf{H}_1^{(p)b_1}\ldots\mathsf{H}_r^{(p)b_r}z_p\right\}$$

$$(3.33)\qquad =\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_r \\ -\infty}}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\exp\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{r}m_k u_k-\sum_{q=1}^{r+1}\left|\mathsf{H}_1^{(q)u_1}\ldots\mathsf{H}_r^{(q)u_r}\right|W_q\right.$$

$$\left.+2\pi i\sum_{p=r_1+1}^{n}\mathsf{H}_1^{(p)u_1}\ldots\mathsf{H}_r^{(p)u_r}z_p\right\}du_1\ldots du_r.$$

Von der rechts auftretenden Summe betrachten wir zunächst nur einen Summanden und setzen in Übereinstimmung mit (3.311)

$$(3.34)\qquad \begin{aligned} z_p &= |z_p|\,e^{i\varphi_p} && (p=r_1+1,\ldots,n),\\ \varphi_{p+r_2} &= -\varphi_p && (p=r_1+1,\ldots,r_1+r_2). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\exp\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{r}m_k u_k-\sum_{q=1}^{r+1}\left|\mathsf{H}_1^{(q)u_1}\ldots\mathsf{H}_r^{(q)u_r}\right|W_q\right.$$

$$\left.+2\pi i\sum_{p=r_1+1}^{n}\mathsf{H}_1^{(p)}\ldots\mathsf{H}_r^{(p)u_r}z_p\right\}du_1\ldots du_r$$

$$(3.351)\qquad =\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\exp\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{r}m_k u_k-\sum_{q=1}^{r+1}\left|\mathsf{H}_1^{(q)u_1}\ldots\mathsf{H}_1^{(q)u_r}\right|W_q\right.$$

$$\left.+2\pi i\sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}|z_p|\left(\mathsf{H}_1^{(p)u_1}\ldots\mathsf{H}_r^{(p)}e^{i\varphi_p}+\bar{\mathsf{H}}_1^{(p)u_1}\ldots\bar{\mathsf{H}}_r^{(p)u_r}e^{-i\varphi_p}\right)\right\}du_1.$$

eine periodische Funktion von $\varphi_{r_1+1}, \ldots, \varphi_{r_1+r_2}$, die in jeder dieser Variablen die Periode 2π aufweist. Die Funktion auf der linken Seite der Gleichung läßt sich beliebig oft nach den z_p differenzieren, da eine kleine Rechnung zeigt, daß beim Differenzieren nach den z_p unterm Integralzeichen nur Integrale entstehen, deren absolute und in den z_p gleichmäßige Konvergenz aus der Konvergenz des Integrals (3.121) sofort folgt. Daher ist die rechte Seite der Gleichung wegen der Beziehung (3.34) auch beliebig oft nach $\varphi_{r_1+1}, \ldots, \varphi_{r_1+r_2}$ differenzierbar und also wegen ihrer Periodizität in eine Fouriersche Reihe von der Form

$$(3.352)\qquad \sum_{\substack{h_{r_1+1},\dots,h_{r_1+r_2}\\ -\infty}}^{+\infty} A_{h_{r_1+1},\dots,h_{r_1+r_2}}\, e^{i\sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} h_p\varphi_p}$$

entwickelbar, worin

$$A_{h_{r_1+1},\dots,h_{r_1+r_2}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{r_2}} \int_{-\pi}^{+\pi}\dots\int e^{-i\sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} h_p\varphi_p} \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int \exp\{\dots\}\, du_1 \dots du_r\, d\varphi_{r_1+1}\dots d\varphi_{r_1+r_2}$$

ist. Die Integrationen nach den φ_p dürfen hier mit denen nach den u_k vertauscht werden, weil das uneigentliche Integral wegen der Abschätzung

$$|\exp\{\dots\}| \leqq e^{-\sum_{q=1}^{r+1} \left|H_1^{(q)u_1}\dots H_1^{(q)u_r}\right| \Re(W_q)}$$

nach Hilfssatz 12 gleichmäßig in den φ_k konvergiert. Dann ergibt sich

$$A_{h_{r_1+1},\dots,h_{r_1+r_2}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{r_2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int \exp\left\{2\pi i \sum_{k=1}^{r} m_k u_k - \sum_{q=1}^{r+1}\left|H_1^{(q)u_1}\dots H_r^{(q)u_r}\right| W_q\right\}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left\{-i\sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} h_p\varphi_p + 2\pi i \sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} |z_p|\left(H_1^{(p)u_1}\dots H_r^{(p)u_r} e^{i\varphi_p} + \overline{H}_1^{(p)u_1}\dots \overline{H}_r^{(p)u_r} e^{-i\varphi_p}\right)\right\}$$

$$\times d\varphi_{r_1+1}\dots d\varphi_{r_1+r_2}\, du_1\dots du_r.$$

Das hierin auftretende r_2-fache Integral nach $\varphi_{r_1+1},\dots,\varphi_{r_1+r_2}$ ist aber ein Produkt der r_2 Integrale

$$\exp\left\{-ih_p\varphi_p + 2\pi i|z_p|\left(H_1^{(p)u_1}\dots H_r^{(p)u_r} e^{i\varphi_p} + \overline{H}_1^{(p)u_1}\dots \overline{H}_r^{(p)u_r} e^{-i\varphi_p}\right)\right\} d\varphi_p$$

$$\exp\left\{-ih_p\varphi_p + 2\pi i|z_p|\left|H_1^{(p)u_1}\dots H_r^{(p)u_r}\right|\left(e^{i\left(\varphi_p+\sum_{k=1}^{r} u_k\Theta_k^{(p)}\right)} + e^{-i\left(\varphi_p+\sum_{k=1}^{r} u_k\Theta_k^{(p)}\right)}\right)\right\} d\varphi_p$$

$$e^{i\sum_{k=1}^{r} u_k\Theta_k^{(p)}} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left\{-ih_p\psi_p + 2\pi i|z_p|\left|H_1^{(p)u_1}\dots H_r^{(p)u_r}\right|\left(e^{i\psi_p} + e^{-i\psi_p}\right)\right\} d\psi_p$$

$$e^{ih_p\sum_{k=1}^{r} u_k\Theta_k^{(p)}}\, 2\pi J_{h_p}\left(4\pi|z_p|\left|H_1^{(p)u_1}\dots H_1^{(p)u_r}\right|\right) \qquad (p = r_1+1,\dots,r_1+r_2),$$

wo J_h die h-te Besselsche Funktion bedeutet. Also haben wir unter Benutzung der Abkürzung (3.212)

$$A_{h_{r_1+1},\dots,h_{r_1+r_2}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\dots\!\int \exp\Big\{2\pi i \sum_{k=1}^{r} m_k u_k - \sum_{q=1}^{r+1} W_q e^{t_q} + i \sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} h_p \sum_{k=1}^{r} u_k \Theta_k^{(p)}$$

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} i^{h_p} J_{h_p}(4\pi|z_p| e^{t_p})\, du_1 \dots du_r .$$

Diese Fourierkoeffizienten tragen wir in (3.352) ein. Das ergibt

$$\sum_{\substack{h_{r_1+1},\dots,h_{r_1+r_2}\\ -\infty}}^{+\infty} A_{h_{r_1+1},\dots,h_{r_1+r_2}} e^{i\sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} h_p \varphi_p}$$

$$(3.361)\quad = \sum_{\substack{h_{r_1+1},\dots,h_{r_1+r_2}\\ -\infty}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\dots\!\int \exp\Big\{2\pi i \sum_{k=1}^{r} m_k u_k - \sum_{q=1}^{r+1} W_q e^{t_q} + i \sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} h_p \sum_{k=1}^{r} u_k \Theta_k^{(p)}$$

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} i^{h_p} e^{i h_p \varphi_p} J_{h_p}(4\pi|z_p| e^{t_p})\, du_1 \dots du_r .$$

Für eine nachher auszuführende Anwendung von (3.211) ist es nötig, nur Besselsche Funktionen von nicht-negativem Index stehen zu lassen. Wir formen daher um:

$$i^{h_p} e^{i h_p \varphi_p} J_{h_p}(4\pi|z_p| e^{t_p}) = i^{h_p} e^{i h_p \varphi_p} (-1)^{\frac{|h_p|-h_p}{2}} J_{|h_p|}(4\pi|z_p| e^{t_p})$$

$$= i^{\frac{|h_p|+h_p}{2}} e^{i\frac{|h_p|+h_p}{2}\varphi_p} i^{-\frac{|h_p|-h_p}{2}} e^{-i\frac{|h_p|-h_p}{2}\varphi_p} (-1)^{\frac{|h_p|-h_p}{2}} J_{|h_p|}(4\pi|z_p| e^{t_p})$$

$$(3.362)\quad = i^{\frac{|h_p|+h_p}{2}} e^{i\frac{|h_p|+h_p}{2}\varphi_p} i^{\frac{|h_p|-h_p}{2}} e^{-i\frac{|h_p|-h_p}{2}\varphi_p} J_{|h_p|}(4\pi|z_p| e^{t_p})$$

$$= \left(\frac{i z_p}{|z_p|}\right)^{\frac{|h_p|+h_p}{2}} \left(\frac{i z_{p+r_2}}{|z_{p+r_2}|}\right)^{\frac{|h_p|-h_p}{2}} J_{|h_p|}(4\pi|z_p| e^{t_p}).$$

letzteres nach (3.311) und (3.34).

Wir setzen nun

$$(3.363)\qquad a_p = \frac{|h_p|+h_p}{2}, \qquad a_{p+r_2} = \frac{|h_p|-h_p}{2},$$

$$|h_p| = a_p + a_{p+r_2}, \qquad h_p = a_p - a_{p+r_2}.$$

Dann sind a_p und a_{p+r_2} nicht-negative ganze Zahlen, und mindestens eine von beiden ist Null:

$$(3.364)\qquad a_p \cdot a_{p+r_2} = 0, \qquad a_p \geqq 0, \qquad a_{p+r_2} \geqq 0.$$

Dann erhalten wir, indem wir noch bedenken, daß die Fouriersche Reihe (3.352) einen Summanden der rechten Seite von (3.33) darstellte, durch Eintragung von (3.361) bis (3.364) in (3.33):

$$\sum_{\substack{b_1 \dots b_r \\ -\infty}}^{+\infty} \exp\Big\{ - \sum_{q=1}^{r-1} \big| \mathsf{H}_1^{(q)b_1} \dots \mathsf{H}_r^{(q)b_r} \big| W_q + 2\pi i \sum_{p=r_1+1}^{n} \mathsf{H}_1^{(p)b_1} \dots \mathsf{H}_r^{(p)b_r} z_p \Big\}$$

$$(3.37) \quad = \sum_{\substack{m_1 \dots m_r \\ -\infty}}^{+\infty} \sum_{\substack{a_{r_1+1} \dots a_n \\ 0}}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp\Big\{ - \sum_{q=1}^{r+1} W_q e^{it_q} + i \sum_{k=1}^{r} u_k \Big(2\pi m_k + \sum_{k=r_1+1}^{r_1+r_2} (a_p - a_{p+r_2}) \Theta_k^{(p)} \Big) \Big\}$$

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \Big(\frac{i z_p}{|z_p|} \Big)^{a_p} \Big(\frac{i z_{p+r_2}}{|z_{p+r_2}|} \Big)^{a_{p+r_2}} J_{a_p + a_{p+r_2}} (4\pi |z_p| e^{it_p}) \, du_1 \dots du_r .$$

Um nun auf jeden Summanden der rechten Seite dieser Gleichung den Hilfssatz 13 anwenden zu können, müssen wir einige Variablen vom Hilfssatz 13 mit den in (3.37) auftretenden Ausdrücken in Übereinstimmung bringen. Zunächst muß sein

$$(3.381) \qquad l_p = a_p + a_{p+r_2}, \qquad Z_p = 2\pi |z_p| \qquad (p = r_1 + 1, \dots r_1 + r_2).$$

Ferner müssen die v_q so bestimmt werden, daß

$$\sum_{q=1}^{r+1} v_q t_q = \sum_{k=1}^{r} u_k \Big(2\pi m_k + \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \Theta_k^{(p)} \Big)$$

wird. Diese Gleichung muß, nachdem wir die t_q nach (3.212) durch die u_k ausgedrückt haben, identisch in den Integrationsvariablen u_k bestehen, um die Anwendbarkeit von (3.211) zu ermöglichen. Das gibt die r Gleichungen

$$\sum_{q=1}^{r+1} v_q \log |\mathsf{H}_k^{(q)}| = 2\pi m_k + \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \Theta_k^{(p)} \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

wozu noch als $(r+1)$-te Gleichung

$$\sum_{q=1}^{r+1} v_q = 0$$

aus Hilfssatz 13 tritt. Aus diesen Gleichungen folgt aber mit Hilfe der zueinander reziproken Matrizen $\mathfrak{E}_v$ und $\mathfrak{E}_v^{-1}$ aus (2.441) und (2.442)

$$(3.382) \qquad v_q = \sum_{k=1}^{r} E_q^{(k)} \Big(2\pi m_k + \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \Theta_k^{(p)} \Big).$$

Mit den in (3.381) und (3.382) bestimmten Werten der l_p, der Z_p und der v_q liefert nun die Anwendung von (3.211) auf die rechte Seite von (3.37) nach einigen kleinen Umformungen die in Hilfssatz 14 behauptete Gleichung (3.312); die Festsetzungen (3.313) und (3.314) von

Hilfssatz 14 sind schon durch (3.364) und (3.382) bestätigt worden. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Für den speziellen Fall $r_1 = 2$, $r_2 = 0$ ist dieser Hilfssatz von Herrn Hecke bewiesen worden[21]).

4. Funktionentheoretische Hilfssätze.

4.1. Über die Heckeschen Zetafunktionen.

4.11. Es sei $\mathfrak{v}$ ein Ideal, $\chi_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ ein Charakter der Kongruenzklassengruppe mod $\mathfrak{v}$ im engsten Sinne, und $\chi_\mathfrak{v}(\hat{\mu})\,\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ ein Größencharakter für Ideale mod $\mathfrak{v}$ (vgl. 2.47). Nach Herrn Hecke nennen wir ferner den Größencharakter für Ideale $\chi_\mathfrak{v}(\hat{\mu})\,\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ eigentlich oder uneigentlich, je nachdem $\chi_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ ein eigentlicher oder uneigentlicher Charakter mod $\mathfrak{v}$ ist. Induziert dann $\chi_\mathfrak{v}$ einen eigentlichen Charakter mod $\mathfrak{v}_1$, für $\mathfrak{v}_1 | \mathfrak{v}$, so weist Herr Hecke leicht nach, daß dann schon $\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu})$ ein Charakter mod $\mathfrak{v}_1$ ist, den wir als solchen mit

$$\lambda^*_{\mathfrak{v}_1}(\hat{\mu}) = \lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu}) \tag{4.111}$$

bezeichnen wollen. In diesem Falle gibt es also einen eigentlichen Größencharakter für Ideale $\chi^*_{\mathfrak{v}_1}(\hat{\mu})\,\lambda^*_{\mathfrak{v}_1}(\hat{\mu})$ mod $\mathfrak{v}_1$, so daß für alle zu $\mathfrak{v}$ teilerfremden $\hat{\mu}$

$$\chi_\mathfrak{v}(\hat{\mu})\,\lambda_\mathfrak{v}(\hat{\mu}) = \chi^*_{\mathfrak{v}_1}(\hat{\mu})\,\lambda^*_{\mathfrak{v}_1}(\hat{\mu}) \tag{4.112}$$

gilt[22]).

4.12. Es sei nun

$$\zeta(s, \chi_\mathfrak{v}\,\lambda_\mathfrak{v}) = \zeta(s, \chi\,\lambda) = \sum_{(\hat{\mu})}{}' \frac{\chi(\hat{\mu})\,\lambda(\hat{\mu})}{|N(\hat{\mu})|^s} \tag{4.121}$$

die mit dem Größencharakter für Ideale $\chi_\mathfrak{v}\,\lambda_\mathfrak{v}$ gebildete Heckesche ζ-Funktion, wobei die Summe über ein solches System idealer Zahlen $\hat{\mu}$ zu erstrecken ist, das von schlechthin assoziierten Zahlen genau je eine enthält.

Hilfssatz 15. *Ist* $b(\chi\,\lambda) = 1$, *wenn* $\chi\,\lambda$ *der Hauptcharakter* mod $\mathfrak{v}$ *ist, und sonst* $b(\chi\,\lambda) = 0$, *so ist*

$$\zeta(s, \chi\,\lambda)\,(s-1)^{b(\chi\,\lambda)}$$

---

[21]) Hecke, Analytische Funktionen und algebraische Zahlen I, S. 114, 115.

[22]) Hecke, Neue Art von Zetafunktionen II, S. 26. Die von mir früher ausgeführte Erörterung eigentlicher und uneigentlicher Größencharaktere (Hamb. Abh. 3, S. 125—126) habe ich als überflüssig erkannt, da sie bei der grundlegenden Anwendung der Heckeschen Thetaformel und damit auch bei der Ableitung der Heckeschen Funktionalgleichung doch keine Rolle spielt, dort vielmehr die oben angeführte Heckesche Unterscheidung völlig ausreicht.

regulär in der ganzen s-Ebene. Für $-\frac{1}{2} \leqq \Re(s) \leqq 4$ *gilt*

$$|\zeta(s, \chi\lambda)(s-1)^{b(\chi\lambda)}|$$

$$(4.122) \qquad < C N^3(\mathfrak{v}) \prod_{q=1}^{r_1} (1+|t+v_q|)^3 \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \left(1 + a_p + a_{p+r_2} + \left|t + \frac{v_p}{2}\right|\right)^3,$$

worin v_q *durch* (3.382) *definiert ist und* v_q, a_p, a_{p+r_2} *nach* (2.461) *durch den in* $\zeta(s, \chi\lambda)$ *auftretenden Größencharakter*

$$(4.123) \qquad \lambda_{\mathfrak{v}}(\hat{\mu}) = \prod_{q=1}^{r+1} |\hat{\mu}^{(q)}|^{-iv_q} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(p)}|}\right)^{a_p}$$

bestimmt sind.

Beweis. Die Regularitätsbehauptung ist von Herrn Hecke bewiesen worden[23]). Es sei nun zunächst $\chi(\hat{\mu})\lambda(\hat{\mu})$ ein eigentlicher Charakter mod $\mathfrak{v}$. Setzen wir dann

$$\xi(s, \chi\lambda) = \gamma(\lambda)\Gamma(s; \lambda) A^s \zeta(s, \chi\lambda)$$

mit

$$\gamma(\lambda) = \prod_{q=1}^{r+1} |\sqrt{e_q}|^{-iv_q},$$

$$A = \left|\sqrt{\frac{dN(\mathfrak{v})}{\pi^n}}\right| 2^{-r_2},$$

$$\Gamma(s; \lambda) = \prod_{q=1}^{r_1} \Gamma\left(\frac{s+a_q}{2} + i\frac{v_q}{2}\right) \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \Gamma\left(s + \frac{a_p + a_{p+r_2}}{2} + i\frac{v_p}{2}\right),$$

worin $a_{r_1+1}, \ldots a_n$ durch $\lambda_{\mathfrak{v}}(\hat{\mu})$ gegeben sind und $a_1, \ldots a_{r_1}$ von $\chi(\hat{\mu})$ abhängen und zwar gleich 0 oder 1 sind[24]), so folgt aus der Darstellung mittels Thetafunktionen, die Herr Hecke für $\xi(s, \chi\lambda)$ gegeben hat[25]), leicht, daß im Streifen $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 4$ für $|t| \geqq 1$

$$|\xi(s, \chi\lambda)| < C$$

ist[26]). Aus bekannten Abschätzungen der Γ-Funktion ergibt sich in demselben Streifen daher ohne weiteres, daß

$$(4.124) \qquad |\zeta(s, \chi\lambda)(s-1)^{b(\chi\lambda)}| < C(e^{c|t|})$$

---

[23]) Hecke, Neue Art von Zetafunktionen II, S. 34, 35.

[24]) Die $a_1, \ldots a_{r_1}$ sind 0 oder 1 und zwar so zu bestimmen, daß

$$\chi(\mu) = \left(\frac{\mu^{(1)}}{|\mu^{(1)}|}\right)^{a_1} \left(\frac{\mu^{(2)}}{|\mu^{(1)}|}\right)^{a_2} \cdots \left(\frac{\mu^{(r_1)}}{|\mu^{(r_1)}|}\right)^{a_{r_1}}$$

für alle $\mu \equiv 1 \bmod \mathfrak{v}$ ist.

[25]) Hecke, Neue Art von Zetafunktionen II, S. 34.

[26]) Für den hier auszuführenden Schluß vergleiche man Landau, Algebraische Zahlen, Satz 154, 155, S. 66—75. Landau, Ideale und Primideale in Idealklassen Satz LVII, LXI, S. 90—101.

ist, wobei diese Abschätzung zunächst allerdings keineswegs gleichmäßig in den χ und λ zu gelten brauchte.

Nun ist

$$|\zeta(4+it,\chi\lambda)| \leqq \sum_{(\hat{\mu})} \frac{1}{|N(\hat{\mu})|^4} = C,$$

$$|((4+it)-1)^{b(\chi\lambda)}| \leqq |t+v_1|+3, \quad [27])$$

also

$$|\zeta(s,\chi\lambda)(s-1)^{b(\chi\lambda)}| < C(3+|t+v_1|) \tag{4.125}$$

für $\Re(s)=4$.

Aus der Heckeschen Funktionalgleichung für $\xi(s,\chi\lambda)$ folgt anderseits

$$\left|\xi\left(-\tfrac{1}{2}+it,\chi\lambda\right)\right| = \left|\xi\left(\tfrac{3}{2}-it,\bar{\chi}\bar{\lambda}\right)\right|$$

oder

$$\left|A^{-\frac{1}{2}+it}\zeta\left(-\tfrac{1}{2}+it,\chi\lambda\right)\right.$$

$$\left.\times \prod_{q=1}^{r_1}\Gamma\left(\frac{-\frac{1}{2}+it+a_q}{2}+i\frac{v_q}{2}\right)\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\Gamma\left(-\tfrac{1}{2}+it+\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}+i\frac{v_p}{2}\right)\right|$$

$$=\left|A^{\frac{3}{2}-it}\zeta\left(\tfrac{3}{2}-it,\bar{\chi}\bar{\lambda}\right)\right.$$

$$\left.\times \prod_{q=1}^{r_1}\Gamma\left(\frac{\frac{3}{2}-it+a_q}{2}-i\frac{v_q}{2}\right)\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\Gamma\left(\tfrac{3}{2}-it+\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}-i\frac{v_p}{2}\right)\right|,$$

also

$$\left|\zeta\left(-\tfrac{1}{2}+it,\chi\lambda\right)\right| < CA^2\left|\prod_{q=1}^{r_1}\left(\frac{-\frac{1}{2}+it+a_q}{2}+i\frac{v_q}{2}\right)\right.$$

$$\left.\times\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\left(-\tfrac{1}{2}+it+\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}+i\frac{v_p}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}+it+\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}+i\frac{v_p}{2}\right)\right|.$$

Somit ist, wenn man noch berücksichtigt, daß die $a_1,\ldots a_{r_1}$ gleich 0 oder 1 sind,

$$\left|\zeta\left(-\tfrac{1}{2}+it,\chi\lambda\right)(s-1)^{b(\chi\lambda)}\right| \tag{4.126}$$

$$< CN(\mathfrak{d})\prod_{q=1}^{r_1}(1+|t+v_q|)^2\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\left(1+a_p+a_{p+r_2}+\left|t+\frac{v_p}{2}\right|\right)^3.$$

Aus (4.125) und (4.126) folgt nach der Phragmén-Lindelöfschen Schlußweise, die sich wegen (4.124) anwenden läßt,

---

[27]) Da $v_1=0$ für $b(\chi\lambda)=1$.

$$(4.127)\qquad |\zeta(s,\chi\lambda)(s-1)^{b(\chi\lambda)}|$$
$$< CN(\mathfrak{v})\prod_{q=1}^{r_1}(1+|t+v_q|)^2\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\left(1+a_p+a_{p+r_2}+\left|t+\frac{v_p}{2}\right|\right)^3$$

gleichmäßig für $-\frac{1}{2}\leqq\Re(s)\leqq 4$ für alle $\mathfrak{v}$, χ und λ, wenn $\chi\lambda$ ein eigentlicher Charakter mod $\mathfrak{v}$ für Ideale ist. Ist endlich $\chi\lambda$ ein uneigentlicher Charakter mod $\mathfrak{v}$, so läßt sich λ als ein eigentlicher Charakter nach einem gewissen Modul $\mathfrak{v}_1$ auffassen, der Teiler von $\mathfrak{v}$ ist, vgl. **4.11**. Es sei dann für $(\hat{\mu},\mathfrak{v})=1$

$$\chi_{\mathfrak{v}}(\hat{\mu})\lambda_{\mathfrak{v}}(\hat{\mu})=\chi^*_{\mathfrak{v}_1}(\hat{\mu})\lambda^*_{\mathfrak{v}_1}(\hat{\mu})$$

letzteres ein eigentlicher Charakter mod $\mathfrak{v}_1$. Dann ist

$$(4.128)\qquad \zeta(s,\chi_{\mathfrak{v}}\lambda_{\mathfrak{v}})=\zeta(s,\chi^*_{\mathfrak{v}_1}\lambda^*_{\mathfrak{v}_1})\prod_{(\hat{\mathfrak{w}})|\mathfrak{v}}\left(1-\frac{\lambda^*(\hat{\mathfrak{w}})\chi^*(\hat{\mathfrak{w}})}{|N(\hat{\mathfrak{w}})|^s}\right).$$

Für $-\frac{1}{2}\leqq\Re(s)\leqq 4$ ist nun

$$(4.129)\qquad \left|\prod_{(\hat{\mathfrak{w}})|\mathfrak{v}}\left(1-\frac{\lambda^*(\hat{\mathfrak{w}})\chi^*(\hat{\mathfrak{w}})}{|N(\hat{\mathfrak{w}})|^s}\right)\right|\leqq\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{v}}(1+N(\mathfrak{p})^{\frac{1}{2}})<2^n\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{v}}N(\mathfrak{p})\leqq 2^nN(\mathfrak{v}).$$

Da nun für $\zeta(s,\chi^*_{\mathfrak{v}_1}\lambda^*_{\mathfrak{v}_1})$ wegen seines eigentlichen Charakters die Abschätzung (4.127) gilt, $\lambda_{\mathfrak{v}}$ und $\lambda^*_{\mathfrak{v}_1}$ aber identisch sind, also dieselben a_p und v_q aufweisen, so liefern (4.128) und (4.129) in der Verbindung mit (4.127) die zu beweisende Ungleichung (4.122), die nun für eigentliche und uneigentliche Charaktere gilt.

4.13. Es sei Θ die obere Grenze der Realteile aller Nullstellen sämtlicher Heckeschen $\zeta(s,\chi\lambda)$-Funktionen des zugrunde gelegten Körpers. Dann gilt, da nach Herrn Hecke die bisherige Theorie der $\zeta(s,\chi)$ auf die $\zeta(s,\chi\lambda)$ übertragbar ist, jedenfalls

$$(4.131)\qquad \frac{1}{2}\leqq\Theta\leqq 1.$$

Weitere Kenntnisse über Θ besitzen wir gegenwärtig nicht.

Hilfssatz 16. *Es sei*

$$(4.132)\qquad Z(s,\chi_{\mathfrak{v}}\lambda_{\mathfrak{v}})=\sum_{(\hat{\mathfrak{w}})}\frac{\chi_{\mathfrak{v}}(\hat{\mathfrak{w}})\lambda_{\mathfrak{v}}(\hat{\mathfrak{w}})}{|N(\hat{\mathfrak{w}})|^s}.$$

Wenn $b(\chi\lambda)$ die Bedeutung aus Hilfssatz 15 hat, so ist $Z(s,\chi\lambda)+b(\chi\lambda)\log(s-1)$ regulär für $\Re(s)>\Theta$, wo unter $\log(s-1)$ der für $s>1$ reelle Zweig des Logarithmus verstanden sei. Für $\Theta+\varepsilon\leqq\Re(s)\leqq 2$, $\varepsilon>0$ gilt

$$|Z(s,\chi\lambda)+b(\chi\lambda)\log(s-1)|$$
$$(4.133)\qquad <C\log(N(\mathfrak{v})+1)\prod_{q=1}^{r_1}(1+|t+v_q|)^{\varepsilon}\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\left(1+a_p+a_{p+r_2}+\left|t+\frac{v_p}{2}\right|\right)^{\varepsilon}$$

Beweis. Es ist für $\Re(s)>1$

$$\zeta(s,\chi\lambda)=\prod_{(\mathfrak{a})}\frac{1}{1-\chi(\mathfrak{a})\lambda(\mathfrak{a})|N(\mathfrak{a})|^{-s}},$$

also

$$(4.134)\quad \log\zeta(s,\chi\lambda)=\sum_{(\mathfrak{a})}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\chi(\mathfrak{a})\lambda(\mathfrak{a})|N(\mathfrak{a})|^{-s})^m}{m}=Z(s,\chi\lambda)+\Xi(s,\chi\lambda)$$

mit

$$\Xi(s,\chi\lambda)=\sum_{(\mathfrak{a})}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\chi(\mathfrak{a}^m)\lambda(\mathfrak{a}^m)}{m|N(\mathfrak{a})|^{ms}},$$

worin $\Xi(s,\chi\lambda)$ offenbar regulär für $\Re(s)>\frac{1}{2}$ ist. Für $\Re(s)\geqq\Theta+\varepsilon$ ist

$$(4.135)\quad |\Xi(s,\chi\lambda)|\leqq\sum_{(\mathfrak{a})}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m|N(\mathfrak{a})|^{m(\Theta+\varepsilon)}}=C.$$

Nun ist $\zeta(s,\chi\lambda)(s-1)^{b(\chi\lambda)}$ für $\Re(s)>\Theta$ regulär und von Null verschieden. Also ist dort auch $\log\zeta(s,\chi\lambda)+b(\chi\lambda)\log(s-1)$ regulär und eindeutig, wenn für $\Re(s)>1$ der Zweig von $\log\zeta(s,\chi\lambda)$ durch (4.134) und der Zweig von $\log(s-1)$ durch die Vorschrift in Hilfssatz 16 festgelegt sind. Wegen der Regularität von $\Xi(s,\chi\lambda)$ für $\Re(s)>\frac{1}{2}$ ist nach (4.134) damit die Regularität von $Z(s,\chi\lambda)+b(\chi\lambda)\log(s-1)$ für $\Re(s)>\Theta$ erwiesen.

Nach (4.134) ist nun

$$(4.136)\quad |\log\zeta(2+ti,\chi\lambda)|\leqq\sum_{(\mathfrak{a})}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m|N(\mathfrak{a})|^{2m}}=C.$$

Es sei $0<\varepsilon<1$ und es seien K_1 und K_2 Kreise um $2+iT$ bzw. mit den Radien $2-\Theta-\frac{\varepsilon}{2}$ und $2-\Theta-\varepsilon$. Der Kreis K_1 liegt ganz in dem in Hilfssatz 15 betrachteten Streifen. Aus einem Hilfssatz von Carathéodory folgt dann

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Max}_{\text{auf }K_2}|\log\zeta(s,\chi\lambda)+b(\chi\lambda)\log(s-1)|\\ (4.137)\quad&\leqq\frac{8}{\varepsilon}\Big\{\operatorname*{Max}_{\text{auf }K_1}\Re(\log\zeta(s,\chi\lambda)+b(\chi\lambda)\log(s-1))\\ &\qquad+2|\log\zeta(2+iT,\chi\lambda)+b(\chi\lambda)\log(2+iT)|\Big\}.\end{aligned}$$

Nach (4.122) ist aber auf K_1

$$\begin{aligned}&\Re(\log\zeta(s,\chi\lambda)+b(\chi\lambda)\log(s-1))\\ &<C+2\log N(\mathfrak{v})+2\sum_{q=1}^{r_1}\log(3+|T+v_q|)\\ &\quad+3\sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\log\Big(3+a_p+a_{p+r_2}+\Big|T+\frac{v_p}{2}\Big|\Big).\end{aligned}$$

Dieses zusammen mit (4.136) eingetragen in (4.137) ergibt nach einigen Umformungen, wobei zu beachten ist, daß $b(\chi\lambda)=1$ nur für $v_q=0$ eintritt:

$$\begin{aligned}&\max_{\text{auf } K_2}|\log\zeta(s,\chi\lambda)+b(\chi\lambda)\log(s-1)|\\ &<\frac{C}{\varepsilon}\log(N(\mathfrak{v})+1)\prod_{q=1}^{r_1}\log(3+|T+v_q|)\\ &\times\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\log\left(3+a_p+a_{p+r_2}+\left|T+\frac{v_p}{2}\right|\right).\end{aligned}\tag{4.138}$$

Die Strecke $t=T$, $\Theta+\varepsilon\leqq\sigma\leqq 2$ liegt ganz in K_2. Daher ergibt sich aus (4.138) mit Hilfe von (4.135) die Behauptung (4.133).

4.2. Ein Hilfssatz über die Γ-Funktion.

4.2. Hilfssatz 17. *Für $\Re(z)\geqq c>1$ und $|a|\leqq\frac{\Re(z)}{c}$ gibt es zwei nur von c abhängende positive Konstanten C_1 und C_2, so daß*

$$C_1^{1+|a|}<\left|\frac{\Gamma(a+z)}{z^a\Gamma(z)}\right|<C_2^{1+|a|}\tag{4.21}$$

ist, worin $z^a=e^{a\log z}$ mit $|\Im(\log z)|<\frac{\pi}{2}$ festgelegt sei.

Beweis. Aus der Produktdarstellung der Γ-Funktion erhält man in bekannter Weise, da z und $a+z$ unter den oben gemachten Voraussetzungen keine Pole der Γ-Funktion sein können,

$$\frac{\Gamma(a+z)}{\Gamma(z)}=\frac{z}{a+z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a\left(1+\frac{z}{n}\right)}{\left(1+\frac{a+z}{n}\right)}=\frac{z}{a+z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a}{1+\frac{a}{n+z}},$$

also

$$\log\frac{\Gamma(a+z)}{\Gamma(z)}=-\log\left(1+\frac{a}{z}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log\left(1+\frac{a}{n+z}\right)\right),\tag{4.22}$$

worin die Imaginärteile der rechts auftretenden Logarithmen hier wie im folgenden absolut genommen kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sein sollen. Ferner gilt die Identität

$$0=\log z+\log\left(1+\frac{1}{z}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{1}{z+n}\right)-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right),$$

was mit (4.22) zusammen ergibt

$$\begin{aligned}\log\frac{\Gamma(a+z)}{\Gamma(z)}-a\log z&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a\log\left(1+\frac{1}{z+n}\right)-\log\left(1+\frac{a}{n+z}\right)\right)\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a}{(z+n)^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m+2}\left(\left(\frac{1}{z+n}\right)^m-\frac{a^{m+1}}{(z+n)^m}\right).\end{aligned}\tag{4.23}$$

Nun ist nach unseren Voraussetzungen

$$(4.24) \qquad \left|\frac{1}{z+n}\right| \leqq \frac{1}{c+n} \leqq \frac{1}{c} < 1 \quad \text{und} \quad \left|\frac{a}{z+n}\right| \leqq \frac{1}{c} < 1$$

für alle n, daher nach (4.23) und (4.24)

$$(4.25) \qquad \left|\log \frac{\Gamma(a+z)}{z^a\,\Gamma(z)}\right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a|}{|z+n|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+2} \frac{1+|a|}{c^m} < C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+|a|^2}{(\Re(z)+n)^2}.$$

Nun ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a|^2}{(\Re(z)+n)^2} = \frac{|a|^2}{\Re(z)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} < \frac{|a|^2}{\Re(z)^2} + \int_0^{\infty} \frac{|a|^2\,dx}{(\Re(z)+x)^2} \leqq \frac{1}{c^2} + \frac{|a|^2}{\Re(z)} \leqq \frac{1}{c^2} + \frac{|a|}{c}.$$

Dies ergibt mit (4.25) zusammen die Behauptung (4.21).

4.3. Über die hypergeometrische Funktion.

4.31. Unter $F(a, b; c; x)$ werde wie in **3.2** die Gaußsche hypergeometrische Funktion verstanden. Wir führen die Abkürzung ein

$$(4.311) \qquad G(s, l, x) = \frac{\Gamma(s+l)}{2^{s+l}\,\Gamma(l+1)}\, F\left(\frac{l+s}{2}, \frac{1-s+l}{2}; l+1; x\right),$$

in der $s = \sigma + it$ als komplexe Variable betrachtet werden soll, dagegen die Parameter l und x reell sein sollen und zwar $0 \leqq l$, $0 \leqq x < 1$. Wegen der letzteren Bedingung ist $F\left(\frac{l+s}{2}, \frac{1-s+l}{2}; l+1; x\right)$ eindeutig durch die nach Potenzen von x fortschreitende hypergeometrische Reihe darstellbar. Die Funktion $G(s, l, x)$ ist daher eine in der ganzen s-Ebene eindeutige meromorphe Funktion von s.

Die beiden folgenden Hilfssätze enthalten Abschätzungen von $G(s, l, x)$, die in verschiedenen Richtungen liegen: die erste ist für wachsende $|t|$ und l ungünstiger, aber für gegen 1 strebendes x besser als die zweite. Die entscheidende Rolle im Verlaufe unserer Überlegungen wird die zweite Abschätzung spielen.

Hilfssatz 18. *Für* $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq l$, $s = \sigma + it$ *ist* $G(s, l, x)$ *eine in der Halbebene* $0 < \sigma$ *reguläre Funktion von* s. *In dem Streifen* $0 < \varepsilon \leqq \sigma \leqq \frac{3}{1+\varepsilon}$ *gilt*

$$(4.312) \qquad |G(s, l, x)| < C(1 + l + |t|)^{\sigma - \frac{1}{2}}$$

mit von σ *unabhängigem* C.

Beweis. Die Regularität in der rechten s-Halbebene ist unter den gemachten Voraussetzungen klar, da $\Gamma(s+l)$ und 2^{-s-l} dort regulär sind und F durch die konvergente hypergeometrische Reihe dargestellt wird.

Die Kummersche Formel

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}\,F(a,b;c;x)=\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-ux)^{-b}\,du$$

gilt für $\Re(c)>\Re(a)>0$ und stellt für $|x|<1$ denjenigen Zweig der hypergeometrischen Funktion dar, der durch die hypergeometrische Reihe geliefert wird. Für

$$a=\frac{l-s+1}{2},\qquad b=\frac{l+s}{2},\qquad c=l+1$$

ergibt die Kummersche Formel

$$(4.313)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{l-s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+s+1}{2}\right)}{\Gamma(l+1)}\,F\left(\frac{l-s+1}{2},\frac{l+s}{2};\,l+1;\,x\right)$$
$$=\int_0^1 u^{\frac{l-s-1}{2}}(1-u)^{\frac{l+s-1}{2}}(1-ux)^{-\frac{l+s}{2}}\,du,$$

was für

$$l+1>\frac{l-\sigma+1}{2}>0,$$

also jedenfalls für

$$(4.314)\qquad l\geqq 0,\quad -1<\sigma<+1$$

gilt.

Aus der Legendreschen Formel

$$\Gamma(2b)=\frac{2^{2b-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(b)\,\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)$$

folgt

$$\frac{\Gamma(s+l)}{2^{s+l}\,\Gamma\left(\frac{l-s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+s+1}{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s+l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-s+1}{2}\right)}.$$

Die Multiplikation dieser Gleichung mit der Gleichung (4.313) ergibt wegen (4.311)

$$(4.315)\qquad G(s,l,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s+l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-s+1}{2}\right)}\int_0^1 u^{\frac{l-s-1}{2}}(1-u)^{\frac{l+s-1}{2}}(1-ux)^{-\frac{l+s}{2}}\,du,$$

gültig unter der Bedingung (4.314).

Um eine Darstellung von $G(s,l,x)$ in dem Streifen $0<\sigma<3$ zu erhalten, führen wir eine partielle Integration aus. Es ist für $-1<\sigma<+1$

$$\int_0^1 u^{\frac{l-s-1}{2}}(1-u)^{\frac{l+s-1}{2}}(1-ux)^{-\frac{l+s}{2}}\,du$$

$$=\int_0^1\left(\frac{u}{1-u}\right)^{\frac{l-s-1}{2}}\frac{1}{(1-u)^2}(1-u)^{l+1}(1-ux)^{-\frac{l+s}{2}}\,du$$

(4.316)

$$=\left[\frac{1}{\frac{l-s+1}{2}}\left(\frac{u}{1-u}\right)^{\frac{l-s+1}{2}}(1-u)^{l+1}(1-ux)^{-\frac{l+s}{2}}\right]_0^1$$

$$+\frac{1}{\frac{l-s+1}{2}}\int_0^1 u^{\frac{l-s+1}{2}}(1-u)^{\frac{l+s-1}{2}}\frac{\left((l+1)(1-ux)-\frac{l+s}{2}x(1-u)\right)}{(1-ux)^{\frac{l+s}{2}+1}}\,du.$$

Da hierin die eckige Klammer an den Grenzen verschwindet, so folgt aus (4.315) und (4.316)

(4.317)

$$G(s,l,x)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{s+l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-s+3}{2}\right)}\int_0^1 u^{\frac{l-s+1}{2}}(1-u)^{\frac{l+s-1}{2}}\frac{\left((l+1)(1-ux)-\frac{l+s}{2}x(1-u)\right)}{(1-ux)^{\frac{l+s}{2}+1}}\,du.$$

Das hierin auftretende Integral ist für $-1<\sigma<3$ absolut konvergent.

4. 32. Zum Beweise von (4.312) führen wir in (4.317) die Transformation

(4.321)

$$u=\frac{1}{1+v}$$

der Integrationsvariablen aus. Dadurch entsteht

(4.322)

$$G(s,l,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{s+l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-s+3}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{v^{\frac{l+s-1}{2}}\left((l+1)(1+v-x)-\frac{l+s}{2}xv\right)}{(1+v)^{\frac{l-s}{2}+2}(1-x+v)^{\frac{l+s}{2}+1}}\,dv.$$

Hierin ist für $0<\sigma\leqq\frac{3}{1+\varepsilon}$

$$\left|\int_0^\infty\right|<C\int_0^\infty\frac{v^{\frac{l+\sigma-1}{2}}(l+1+|t|)(1+v-x)}{(1+v)^{\frac{l-\sigma}{2}+2}(1-x+v)^{\frac{l+\sigma}{2}+1}}\,dv$$

$$<C(1+l+|t|)\int_0^\infty\left(\frac{v}{1-x+v}\right)^{\frac{l+\sigma}{2}}\frac{dv}{v^{\frac{1}{2}}(1+v)^{\frac{l-\sigma}{2}+2}}$$

$$<C(1+l+|t|)\int_0^\infty\frac{dv}{v^{\frac{1}{2}}(1+v)^{2-\frac{3}{2(1+\varepsilon)}}},$$

also

$$\left|\int_0^\infty\right| < C(1+l+|t|). \tag{4.323}$$

Da ferner $\Gamma(z)$ und $\Gamma(\bar{z})$ zueinander konjugiert komplex sind und $\bar{s} = \sigma - it = 2\sigma - s$ ist, so haben wir

$$\left|\frac{\Gamma\left(\frac{s+l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-s+3}{2}\right)}\right| = \left|\frac{\Gamma\left(\frac{s+l+2}{2}\right)}{\frac{s+l}{2}\Gamma\left(\frac{l+s}{2}-\sigma+\frac{3}{2}\right)}\right|. \tag{4.324}$$

Hierauf wenden wir den Hilfssatz 17 mit $c = 1+\frac{\varepsilon}{2}$, $z = \frac{s+l+2}{2}$, $a = -\sigma+\frac{1}{2}$ an. Für $0 < \varepsilon \leqq \sigma \leqq \frac{3}{1+\varepsilon}$ ist die Bedingung dieses Hilfssatzes, die in unserem Fall

$$\left|-\sigma+\frac{1}{2}\right| \leqq \frac{1+\frac{\sigma}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

lautet, erfüllt, wie eine kleine Rechnung zeigt. Daher schließen wir aus (4.324) und (4.21)

$$\left|\frac{\Gamma\left(\frac{s+l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-s+3}{2}\right)}\right| < C(1+l+|t|)^{\sigma-\frac{3}{2}}. \tag{4.325}$$

Aus (4.322), (4.323) und (4.325) folgt die Behauptung (4.312).

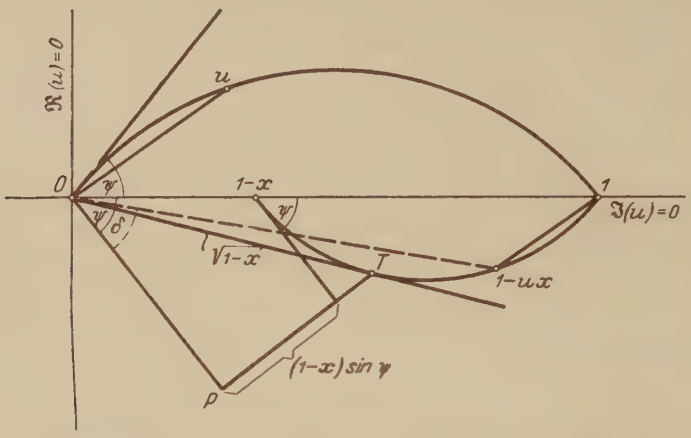
4.33. Hilfssatz 19. *Für* $0 < \varepsilon \leqq \sigma \leqq \frac{3}{1+\varepsilon}$ *gilt*

$$|G(s,l,x)| < Ce^{-\frac{|t|\sqrt{1-x}}{4}}\frac{(1+l+|t|)^{\sigma-\frac{1}{2}}}{1+l}\frac{(1-x)^{-\frac{1}{4}}}{\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right)^{\frac{l}{2}}}. \tag{4.331}$$

Beweis. Wir gehen wieder von (4.317) aus. In dem Integral dieser Formel verlegen wir den Integrationsweg in der komplexen u-Ebene von der reellen Achse fort auf einen Kreisbogen von 0 bis 1, der die reelle Achse unter dem spitzen Winkel ψ schneidet und den Zentriwinkel 2ψ besitzt. Für $t \leqq 0$ wählen wir den so beschaffenen Kreisbogen oberhalb der reellen Achse, für $t > 0$ unterhalb der reellen Achse. Um ein festes Bild vor Augen zu haben, nehmen wir $t \leqq 0$ an und betrachten demgemäß den oberhalb der reellen Achse gelegenen kreisbogenförmigen Integrationsweg K. Auf diesem Bogen ist stets

$$\arg\frac{u}{1-u} = \arg u - \arg(1-u) = \psi > 0.$$

Der Punkt $(1-ux)$ bewegt sich, wenn u von 0 bis 1 den Kreisbogen durchläuft, auf einem Kreisbogen k von 1 bis $1-x$, der gleichfalls den Zentriwinkel 2ψ besitzt und in unserem Falle unterhalb der reellen Achse



verläuft. Bei gegebener Lage von u auf K konstruiert man $1-ux$ auf k einfach dadurch, daß man die Strecke von 1 bis $1-ux$ parallel und entgegengesetzt gerichtet zu der Strecke von 0 bis u zieht. Nun ist

$$\delta = \arg\frac{u(1-ux)}{1-u} = \arg\frac{u}{1-u} + \arg(1-ux) = \psi + \arg(1-ux)$$
$$= \psi - |\arg(1-ux)|.$$

Aus der Figur entnimmt man, daß für jede Lage von u

$$\sin\delta \geqq \frac{(PT)}{(OT)}.$$

Auf Grund des Sekanten-Tangentensatzes, angewandt auf den Kreis k, die Sekante 0 1 und die Tangente OT ist $(OT) = \sqrt{1-x}$; ferner zeigt die Figur, daß $(PT) \geqq (1-x)\sin\psi$ ist. Daher folgt

$$(4.332)\quad \arg\frac{u(1-ux)}{1-u} = \delta \geqq \sin\delta \geqq \frac{(1-x)\sin\psi}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{1-x}\cdot\sin\psi$$

für jede Lage von u auf dem Kreisbogen K.

Nun führen wir im Integral von (4.317), als dessen Integrationsweg wir uns den Kreisbogen K denken, die Substitution (4.321)

$$u = \frac{1}{1+v}$$

aus, wo u und v als komplexe Variable zu betrachten sind. Mit Hilfe einfacher konformer Abbildungen erkennt man, daß v die durch den Null-

punkt gehende Gerade $\arg v = -\psi$ von $\infty e^{-i\psi}$ bis 0 durchläuft. Durch Ausführung der Snbstitution entsteht, formal analog zu (4.322)

$$(4.333)\quad G(s,l,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-s+3}{2}\right)} \int_0^{\infty e^{-i\psi}} \frac{v^{\frac{l+s-1}{2}} \left((l+1)(1+v-x) - \frac{l+s}{2} xv\right)}{(1+v)^{\frac{l-s}{2}+2} (1-x+v)^{\frac{l+s}{2}+1}} dv.$$

Nun ist infolge der Substitution

$$\delta = \arg \frac{u(1-ux)}{1-u} = \arg \frac{\frac{1}{1+v}\left(1-\frac{x}{1+v}\right)}{1-\frac{1}{1+v}} = \arg \frac{1-x+v}{v(1+v)},$$

also wegen (4.332)

$$(4.334)\qquad \delta = \arg \frac{1-x+v}{v(1+v)} \geqq \sqrt{1-x} \sin\psi$$

für v auf der Geraden $\arg v = -\psi$.

Wir schätzen das Integral in (4.333) ab:

$$(4.335)\quad \left| \int_0^{\infty e^{-i\psi}} \right| \leqq \int_0^{\infty e^{-i\psi}} \frac{|v|^{\frac{l+\sigma-1}{2}} \left((l+1)|1+v-x| + \frac{l+\sigma+|t|}{2} x|v|\right)}{|1+v|^{\frac{l-\sigma}{2}+2} |1+v-x|^{\frac{l+\sigma}{2}+1}} e^{-\frac{t}{2}\arg\frac{v(1+v)}{1+v-x}} |dv|.$$

Wir setzen $|v| = V$ und bemerken, daß

$$(l+1)|1+v-x| + \frac{l+\sigma+|t|}{2} x|v| < C(1+l+|t|)|1+v-x|,$$

$$|1+v| > 1+V\cos\psi,$$

$$|1-x+v| > (1-x)\cos\psi + V$$

ist. Unter Berücksichtigung von $t<0$ folgt dann aus (4.334) und (4.335)

$$(4.336)\quad \left| \int_0^{\infty e^{-i\psi}} \right| < C(1+l+|t|) e^{-\frac{|t|}{2}\sqrt{1-x}\sin\psi} \times \int_0^{\infty} \frac{V^{\frac{l+\sigma-1}{2}}}{(1+V\cos\psi)^{\frac{l-\sigma}{2}+2} ((1-x)\cos\psi+V)^{\frac{l+\sigma}{2}}} dV.$$

Hierin zerlegen wir das Integral

$$(4.337)\quad \int_0^{\infty} \frac{V^{\frac{l+\sigma-1}{2}}}{(1+V\cos\psi)^{\frac{l-\sigma}{2}+2} ((1-x)\cos\psi+V)^{\frac{l+\sigma}{2}}} dV = \int_0^{\sqrt{1-x}} + \int_{\sqrt{1-x}}^{\infty}.$$

Es ist für $0 < \varepsilon \leqq \sigma \leqq \frac{3}{1+\varepsilon}$

$$\int_0^{\sqrt{1-x}} < \int_0^{\sqrt{1-x}} \left(\frac{V}{(1-x)\cos\psi + V}\right)^{\frac{l+\sigma-1}{2}} \frac{dV}{((1-x)\cos\psi+V)^{\frac{1}{2}}}$$

$$< ((1-x)\cos\psi + \sqrt{(1-x)})^{\frac{3}{2}} \int_0^{\sqrt{1-x}} \left(\frac{V}{(1-x)\cos\psi+V}\right)^{\frac{l+\sigma-1}{2}} \frac{dV}{((1-x)\cos\psi+V)^{\frac{3}{2}}}$$

$$< \frac{((1-x)\cos\psi+\sqrt{1-x})^{\frac{3}{2}}}{(1-x)\cos\psi} \int_0^{\sqrt{1-x}} \left(\frac{V}{(1-x)\cos\psi+V}\right)^{\frac{l+\sigma-1}{2}} d\left(\frac{V}{(1-x)\cos\psi+V}\right)$$

$$< C\frac{(\sqrt{1-x})^{\frac{3}{2}}}{1-x}\left(\frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)\cos\psi+\sqrt{1-x}}\right)^{\frac{l+\sigma+1}{2}} \frac{1}{l+\sigma+1},$$

$$\int_0^{\sqrt{1-x}} < \frac{C}{1+l} \frac{(1-x)^{-\frac{1}{4}}}{(1+\sqrt{1-x}\cos\psi)^{\frac{l}{2}}}. \tag{4.338}$$

Ferner ist

$$\int_{\sqrt{1-x}}^{\infty} = \int_{\sqrt{1-x}}^{\infty} \left(\frac{V}{(1-x)\cos\psi+V}\right)^{\frac{l+\sigma-1}{2}} \frac{dV}{(1+V\cos\psi)^{\frac{l-\sigma}{2}+2}((1-x)\cos\psi+V)^{\frac{1}{2}}}$$

$$< C\int_{\sqrt{1-x}}^{\infty} \frac{dV}{(1+V\cos\psi)^{\frac{l-\sigma}{2}+2}((1-x)\cos\psi+V)^{\frac{1}{2}}},$$

da für $\sqrt{1-x} \leqq V$

$$\frac{1}{2} < \frac{V}{(1-x)\cos\psi+V} < 1$$

ist. Für diese Werte von V ist auch

$$\frac{1+V\cos\psi}{(1-x)\cos\psi+V} \leqq \frac{1+\sqrt{1-x}\cos\psi}{(1-x)\cos\psi+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

also

$$\int_{\sqrt{1-x}}^{\infty} < C\int_{\sqrt{1-x}}^{\infty} \left(\frac{1+V\cos\psi}{(1-x)\cos\psi+V}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dV}{(1+V\cos\psi)^{\frac{l-\sigma}{2}+\frac{5}{2}}}$$

$$< \frac{C}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}\int_{\sqrt{1-x}}^{\infty} \frac{dV}{(1+V\cos\psi)^{\frac{l-\sigma}{2}+\frac{5}{2}}} < \frac{C}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{l-\sigma+3}\frac{1}{(1+\sqrt{1-x}\cos\psi)^{\frac{l-\sigma}{2}+\frac{3}{2}}},$$

$$\int_{\sqrt{1-x}}^{\infty} < \frac{C}{1+l}\frac{(1-x)^{-\frac{1}{4}}}{(1+\sqrt{1-x}\cos\psi)^{\frac{l}{2}}}. \tag{4.339}$$

Wenn man noch $\psi = \frac{\pi}{6}$ setzt, so folgt aus (4.333), (4.325) und (4.335) bis (4.339) die Behauptung (4.331), zunächst allerdings nur für $t \leqq 0$. Für $t > 0$ ergibt sie sich durch die oben angedeutete Benutzung von spiegelbildlich in bezug auf die reelle u-Achse und die reelle v-Achse gelegenen Integrationswegen.

5. Die Fundamentalfunktion.

5.1. Es sei $\mathfrak{A}$ ein festes ganzes Ideal und $\Lambda(\hat{\mu})$ ein Größencharakter mod $\mathfrak{A}$

$$\Lambda(\hat{\mu}) = \prod_{p=1}^{r+1} |\hat{\mu}^{(q)}|^{-iV_q} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(p)}|}\right)^{A_p}, \tag{5.11}$$

worin die A_p ganze rationale nicht-negative Zahlen mit $A_p \cdot A_{p+r_2} = 0$ sind und die V_q spezialisierte v_q aus (3.314) sind für $\mathfrak{v} = \mathfrak{A}$, $a_p = A_p$.

Wir definieren nun die für unsere Untersuchungen grundlegende Funktion

$$f(w, z; \Lambda) = \sum_{\substack{\varpi \succ 0 \\ \varpi \equiv \alpha \bmod \mathfrak{A}}} \Lambda(\varpi) \exp\left\{-\sum_{q=1}^{n} |\varpi^{(q)}| w_q + 2\pi i \sum_{q=1}^{n} \varpi^{(q)} z_q\right\}. \tag{5.12}$$

Hierin ist α eine zu $\mathfrak{A}$ teilerfremde Körperzahl, die wir in ihrer Restklasse totalpositiv annehmen können, ferner

$$\begin{gathered} w_1, w_2, \ldots, w_n > 0, \\ z_1, \ldots z_{r_1} \text{ reell}, \qquad z_{r_1+1}, \ldots z_n \text{ komplex}, \\ \left.\begin{aligned} w_{p+r_2} &= w_p \\ z_{p+r_2} &= \bar{z}_p \end{aligned}\right\} \text{ für } p = r_1 + 1, \ldots r_1 + r_2. \end{gathered} \tag{5.13}$$

Wegen dieser Bedingungen ist $\sum_{q=1}^{n} \varpi^{(q)} z_q$ reell. Die Konvergenz der in (5.12) aufgeschriebenen Reihe, und zwar die gleichmäßige für $w_1, w_2, \ldots, w_n \geqq R > 0$ ergibt sich aus der Konvergenz der über alle ganzen idealen Zahlen $\hat{\mu}$ erstreckten Summe

$$\sum_{\hat{\mu}} \exp\{-\sum_{q=1}^{n} |\hat{\mu}^{(q)}| R\},$$

deren Konvergenz leicht daraus erschlossen werden kann, daß die $\hat{\mu}$ jeder Klasse ein Modulsystem bilden.

Es sei nun γ eine beliebige, ganze oder gebrochene Körperzahl, $\mathfrak{d}$ die Differente des Körpers und a der Nenner von $\gamma\mathfrak{d}$.

Wir setzen nun

$$f(w, z; \Lambda) = f_1(w, z; \Lambda) + f_2(w, z; \Lambda), \tag{5.141}$$

$$(5.142)\qquad f_1(w,z;\Lambda)=\sum_{\substack{\varpi\succ 0\\ \varpi\equiv\alpha \bmod \mathfrak{A}\\ (\varpi,\mathfrak{a})=1}}\Lambda(\varpi)\exp\left\{-\sum_{q=1}^{n}(|\varpi^{(q)}|w_q-2\pi i\varpi^{(q)}z_q)\right\},$$

$$(5.143)\qquad f_2(w,z;\Lambda)=\sum_{\substack{\varpi\succ 0\\ \varpi\equiv\alpha \bmod \mathfrak{A}\\ \varpi\mid\mathfrak{a}}}\Lambda(\varpi)\exp\left\{-\sum_{q=1}^{n}(|\varpi^{(q)}|w_q-2\pi i\varpi^{(q)}z_q)\right\}.$$

Durchläuft $\chi=\chi_{\mathfrak{A}}$ die Charaktere der Restklassengruppe der Körperzahlen mod $\mathfrak{A}$, so haben wir

$$(5.151)\qquad \begin{aligned} f_1(w,z;\Lambda)&=\frac{1}{\varphi(\mathfrak{A})}\sum_{\chi_{\mathfrak{A}}}\bar{\chi}(\alpha)\sum_{\substack{\varpi\succ 0\\ (\varpi,\mathfrak{a})=1}}\chi(\varpi)\Lambda(\varpi)\exp\left\{-\sum_{q=1}^{n}(|\varpi^{(q)}|w_q-2\pi i\varpi^{(q)}\right.\\ &=\frac{1}{\varphi(\mathfrak{A})}\sum_{\chi_{\mathfrak{A}}}\bar{\chi}(\alpha)f(w,z;\chi\Lambda)\end{aligned}$$

mit

$$(5.152)\qquad f(w,z;\chi\Lambda)=\sum_{\substack{\varpi\succ 0\\ (\varpi,\mathfrak{a})=1}}\chi(\varpi)\Lambda(\varpi)\exp\left\{-\sum_{q=1}^{n}(|\varpi^{(q)}|w_q-2\pi i\varpi^{(q)}z_q)\right\}.$$

Wir setzen nun

$$(5.16)\qquad z_q=\gamma^{(q)}+y_q,$$

worin wegen der Eigenschaften konjugierter Körperzahlen und wegen (5.13)

$$y_1,\dots y_{r_1}\text{ reell},\qquad y_{r+1},\dots y_n\text{ komplex}$$
$$y_{p+r_2}=\bar{y}_p\qquad\text{für}\qquad p=r_1+1,\dots r_1+r_2$$

ist.

Durch diese Substitution entsteht

$$f(w,\gamma+y;\chi\Lambda)=\sum_{\substack{\varpi\succ 0\\ (\varpi,\mathfrak{a})=1}}\chi(\varpi)\Lambda(\varpi)\exp\left\{-\sum_{q=1}^{n}(|\varpi^{(q)}|w_q-2\pi i\varpi^{(q)}(\gamma^{(q)}+y_q\right.$$

Wenn nun $\varpi\equiv\varrho\pmod{\mathfrak{a}}$ ist, so ist wegen der Voraussetzung über den Nenner von $\gamma\mathfrak{d}$ das Ideal $(\varpi-\varrho)\gamma\mathfrak{d}$ ganz, also $\sum_{q=1}^{n}(\varpi^{(q)}-\varrho^{(q)})\gamma^{(q)}=S((\varpi-\varrho)\gamma)$ ganz rational.

Daher können wir auch schreiben

$$(5.171)\qquad \begin{aligned} f(w,\gamma+y;\chi\Lambda)&=\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\\ (\varrho,\mathfrak{a})=1\\ \varrho\succ 0}}e^{2\pi iS(\gamma\varrho)}\sum_{\substack{\varpi\equiv\varrho \bmod \mathfrak{a}\\ \varpi\succ 0}}\chi(\varpi)\Lambda(\varpi)\exp\left\{-\sum_{q=1}^{n}(|\varpi^{(q)}|w_q-2\pi i\varpi^{(q)}y\right.\\ &=\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\\ (\varrho,\mathfrak{a})=1\\ \varrho\succ 0}}e^{2\pi iS(\gamma\varrho)}\sum_{\substack{\varpi\equiv\varrho \bmod \mathfrak{a}\\ \varpi\succ 0}}\chi(\varpi)\Lambda(\varpi)\exp\left\{-\sum_{q=1}^{r+1}|\varpi^{(q)}|U_q+2\pi i\sum_{p=r_1+1}^{n}\varpi^{(p)}y_p\right\}\end{aligned}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$(5.172) \qquad \begin{aligned} U_q &= w_q - 2\pi i y_q \quad \text{für} \quad q = 1, \dots r_1, \\ U_q &= 2w_q \qquad\quad \text{für} \quad q = r_1 + 1, \dots r_1 + r_2 \end{aligned}$$

und von $\varpi^{(q)} = |\varpi^{(q)}|$ für $q = 1, \dots r_1$ (d. h. von $\varpi \succ 0$) Gebrauch gemacht worden ist.

5.2. Wir führen nun ideale Zahlen und eine Klasseneinteilung „im engsten Sinne" innerhalb des Bereiches der idealen Zahlen ein, gemäß (2.311) und (2.312). Der Grad der Abelschen Gruppe dieser Klassen ist $h 2^{r_1} \varphi(\mathfrak{a})$, wo h die Klassenzahl des Körpers im gewöhnlichen Sinne ist. Die zu dieser Gruppe gehörenden Charaktere sollen mit $\chi(\hat{\mu})$ bezeichnet werden.

Der Größencharakter $A(\hat{\mu})$ ist durch die Definition (5.11) sogleich auch für die idealen Zahlen eingeführt worden. Um nun den Charakter $X(\mu)$ auf die Gruppe der Klasseneinteilung des Bereiches $\mathfrak{Z}$ der idealen Zahlen übertragen zu können, bemerken wir zunächst, daß wir bisher in **5.1** $X(\mu)$ nur auf totalpositive Zahlen μ angewandt haben.

Der Charakter $X(\mu)$ ist also nur für eine Untergruppe der Klassengruppe im Bereiche $\mathfrak{Z}$ erklärt. Ganz allgemein aber gilt der Sachverhalt, daß es unter den Charakteren einer endlichen Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ stets einen gibt, der in ihrer Untergruppe $\mathfrak{U}$ mit einem vorgeschriebenen Charakter übereinstimmt.

Es sei nämlich g der Grad von $\mathfrak{G}$, u der Grad von $\mathfrak{U}$. Jeder der g Charaktere von $\mathfrak{G}$ ist für die Elemente von $\mathfrak{U}$ ein Charakter von $\mathfrak{U}$. Verschiedene Charaktere von $\mathfrak{G}$ können aber in $\mathfrak{U}$ übereinstimmen. Seien etwa χ_1 und χ_2 zwei solche in $\mathfrak{U}$ übereinstimmende Charaktere. Dann ist durch $\chi_1 = \chi_2 \chi^*$ ein Charakter χ^* von $\mathfrak{G}$ bestimmt, der in $\mathfrak{U}$ gleich 1 ist, also als Charakter der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{U}}$ aufgefaßt werden kann. Solcher Charaktere gibt es offenbar genau $q = \frac{g}{u}$. Also können höchstens je q verschiedene Charaktere von $\mathfrak{G}$ denselben Charakter in $\mathfrak{U}$ induzieren. Daher erzeugen die g Charaktere von $\mathfrak{G}$ mindestens $\frac{g}{q} = u$ verschiedene Charaktere von $\mathfrak{U}$. Da es aber auch nur u Charaktere von $\mathfrak{U}$ gibt, so wird *jeder* Charakter von $\mathfrak{U}$ dargestellt durch den Werteverlauf in $\mathfrak{U}$ eines Charakters von $\mathfrak{G}$[28]).

Speziell also können wir zu $X(\mu)$ einen Charakter $X(\hat{\mu})$ der endlichen Klassengruppe mod $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{Z}$ finden, der für die totalpositiven Körperzahlen mit dem gegebenen übereinstimmt.

---

[28]) Diese abzählende Wendung des Beweises verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn O. Schreier.

Mit Hilfe der Charaktere $\chi(\hat{\mu})$ beseitigen wir nun in (5.171) die Summationsbedingung $\varpi \equiv \varrho \bmod \mathfrak{a}$:

$$f(w, \gamma+y, \mathsf{X}\Lambda)$$
$$= \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho,\mathfrak{a})=1 \\ \varrho \succ 0}} e^{2\pi i S(\gamma\varrho)} \sum_{\hat{\varpi}} \mathsf{X}(\hat{\varpi}) \Lambda(\hat{\varpi}) \exp\left\{ -\sum_{q=1}^{r+1} |\hat{\varpi}^{(q)}| U_q + 2\pi i \sum_{p=r_1+1}^{n} \hat{\varpi}^{(p)} y_p \right\}$$
$$\times \frac{1}{h\, 2^{r_1} \varphi(\mathfrak{a})} \sum_{\chi} \bar{\chi}(\varrho) \chi(\hat{\varpi}),$$

$$(5.23) \qquad f(w, \gamma+y; \mathsf{X}\Lambda) = \frac{1}{h\, 2^{r_1} \varphi(\mathfrak{a})} \sum_{\chi} C(\chi)\, g(w, y; \mathsf{X}\chi\Lambda)$$

mit

$$(5.24) \qquad C(\chi) = \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ \varrho \succ 0}} \bar{\chi}(\varrho) e^{2\pi i S(\gamma\varrho)},$$

$$(5.25) \quad g(w, y; \mathsf{X}\chi\Lambda) = \sum_{\hat{\varpi}} \mathsf{X}\chi\Lambda(\hat{\varpi}) \exp\left\{ -\sum_{q=1}^{r+1} |\hat{\varpi}^{(q)}| U_q + 2\pi i \sum_{p=r_1+1}^{n} \hat{\varpi}^{(p)} y_p \right\},$$

worin kurz $\mathsf{X}\chi\Lambda(\hat{\varpi})$ statt $\mathsf{X}(\hat{\varpi})\chi(\hat{\varpi})\Lambda(\hat{\varpi})$ geschrieben ist und $\hat{\varpi}$ alle Primzahlen des Bereiches $\mathfrak{Z}$ durchläuft. Die Reihe in (5.25) konvergiert gemäß der in (5.1) durchgeführten Konvergenzüberlegung.

Der Charakter $\mathsf{X}\chi\Lambda(\hat{\mu})$ gehört zu dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{A}$ als Modul. Es sei von jetzt an

$$(5.26) \qquad \mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{a}}{(\mathfrak{A}, \mathfrak{a})}.$$

5.3. Nun sei $\Xi, \mathsf{H}_1, \ldots \mathsf{H}_r$ das in (2.422) angegebene System von Grundeinheiten mod $\mathfrak{v}$. Da hierfür

$$\mathsf{X}\chi\Lambda(\Xi) = 1, \quad \mathsf{X}\chi\Lambda(\mathsf{H}_k) = 1 \qquad (k = 1, \ldots r)$$

gilt, so erhalten wir, indem wir in der Summe von (5.25) je die mod $\mathfrak{v}$ assoziierten Zahlen zusammenfassen:

$$g(w, y; \mathsf{X}\chi\Lambda) = \sum_{(\hat{\varpi})_{\mathfrak{v}}} \mathsf{X}\chi\Lambda(\hat{\varpi}) \sum_{b=1}^{\frac{w_*}{B_*}} \sum_{b_1 \ldots b_r}^{+\infty} \exp\left\{ -\sum_{q=1}^{r+1} \left| \mathsf{H}_1^{(q)b_1} \ldots \mathsf{H}_r^{(q)b_r} \right| |\hat{\varpi}^{(q)}| U_q \right.$$
$$(5.31) \qquad \left. + 2\pi i \sum_{p=r_1+1}^{n} \mathsf{H}_1^{(p)b_1} \ldots \mathsf{H}_r^{(p)b_r} \Xi^{(p)b} \hat{\varpi}^{(p)} y_p \right\},$$

worin $(\hat{\varpi})_{\mathfrak{v}}$ bedeuten soll, daß $\hat{\varpi}$ aus jedem System mod $\mathfrak{v}$ assoziierter Primzahlen nur je eine durchlaufen soll. Ferner ist nach (2.411) und (2.429) $\frac{w_*}{B_*}$ der Grad der Einheitswurzel Ξ.

Auf die innere Summe von (5.31) wenden wir den Hilfssatz 14 an, wodurch sich, wenn wir gleich die Bedeutung von U_q aus (5.172) entnehmen, folgendes ergibt:

$$g(w,y;\mathsf{X}\chi\Lambda)$$

$$= \sum_{(\mathfrak{w})_0} \mathsf{X}\chi\Lambda(\mathfrak{w}) \sum_{b=1}^{\frac{w_*}{B_*}} \frac{1}{2\pi i} \frac{2^{r_2}}{B_0} \sum_{m_1 \cdots m_r}^{+\infty} \sum_{a_{r_1+1} \cdots a_n}^{\infty} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\Gamma(e_q s + i v_q)}{(|\mathfrak{w}^{(q)}|\,(w_q - 2\pi i y_q))^{e_q s + i v_q}}$$

(5.32)

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{(2\pi i \mathfrak{w}^{(p)} y_p)^{a_p} (2\pi i \mathfrak{w}^{(p+r_2)} y_{p+r_2})^{a_{p+r_2}} \Xi^{(p)^{b a_p}} \Xi^{(p+r_2)^{b a_{p+r_2}}}}{(|\mathfrak{w}^{(p)}|^2 (w_p^2 + 4\pi^2 y_p^2))^{\frac{a_p + a_{p+r_2} + e_p s + i v_p}{2}}}$$

$$\times G\left(e_p s + i v_p,\ a_p + a_{p+r_2},\ \frac{4\pi^2 |y_p|^2}{w_p^2 + 4\pi^2 |y_p|^2}\right) ds$$

mit der in (4.311) definierten Funktion $G(s,l,x)$.

In (5.32) führen wir zunächst die Summe nach b direkt aus. Da Ξ eine $\frac{w_*}{B_*}$-te Einheitswurzel ist, so ist auch

$$\prod_{p=r_1+1}^{n} \Xi^{(p)^{a_p}}$$

eine solche[29]). Daher ist

$$\sum_{b=1}^{\frac{w^*}{B_*}} \left(\prod_{p=r_1+1}^{n} \Xi^{(p)^{a_p}} \right)^b = \begin{cases} 0 \\ \text{oder} \\ \frac{w_*}{B_*} \end{cases} \tag{5.33}$$

und zwar letzteres nur, wenn

$$\prod_{p=r_1+1}^{n} \Xi^{(p)^{a_p}} = 1$$

ist. Berücksichtigen wir (2.422) und (2.451), so läßt sich diese Bedingung folgendermaßen schreiben:

$$\prod_{p=r_1+1}^{n} \xi^{(p)^{a_p} A_*} = e^{i A_* \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \varphi^{(p)}} = 1$$

was mit

$$A_* \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \frac{\varphi^{(p)}}{2\pi} \equiv 0 \pmod 1 \tag{5.34}$$

gleichbedeutend ist.

---

[29]) Übrigens muß $r_1 = 0$ sein, wenn $\Xi \neq 1$ sein soll.

Wir tragen nun (5.33) in (5.32) ein und erhalten, indem wir noch $\sigma_0 = \frac{5}{4}$ setzen,

$$g(w, y; \mathfrak{X}\chi\Lambda)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{2^{r_2}}{R_0} \frac{w_*}{B_*} \sum_{(\mathfrak{w})_0} \sum_{m_1 \cdots m_r}^{+\infty} \sum_{a_{r_1+1} \cdots a_n}^{\infty} \int_{\frac{5}{4}-i\infty}^{\frac{5}{4}+i\infty} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\Gamma(e_q s + i v_q)}{(w_q - 2\pi i y_q)^{e_q s + i v_q}}$$

(5.35)

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{(2\pi i y_p)^{a_p} (2\pi i y_{p+r_2})^{a_p + r_2}}{(w_p^2 + 4\pi^2 |y_p^2|)^{\frac{a_p + a_{p+r_2} + e_p s + i v_p}{2}}}$$

$$\times G\left(e_p s + i v_p,\ a_p + a_{p+r_2},\ \frac{4\pi^2 |y_p^2|}{w_p^2 + 4\pi^2 |y_p^2|}\right) \frac{\mathfrak{X}\chi\Lambda\lambda(\mathfrak{w})}{|N(\mathfrak{w})|^s}\, ds.$$

Darin ist nach (2.461) und (3.314)

$$\lambda(\mathfrak{w}) = \prod_{q=1}^{r+1} |\mathfrak{w}^{(q)}|^{-i v_q} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{\mathfrak{w}^{(p)}}{|\mathfrak{w}^{(p)}|}\right)^{a_p}, \tag{5.36}$$

und die a_p haben die Summationsbedingung (5.34) zu erfüllen, die aber nach (2.462) für den Größencharakter $\lambda(\hat{\mu})$ auch notwendig ist.

Anmerkung. Die Formel (5.35) ist mittels des Hilfssatzes 14, also unter der Annahme, daß der Körper Einheiten unendlichen Grades besitze, abgeleitet worden. Sie gilt aber auch für den rationalen und für den imaginär-quadratischen Zahlkörper. Im ersten Falle gibt es keine m_k und keine a_p, und $\lambda(\mathfrak{w})$ ist identisch gleich 1 zu setzen. Im zweiten Falle gibt es keine m_k und man hat

$$\lambda(\mathfrak{w}) = \left(\frac{\mathfrak{w}^{(1)}}{|\mathfrak{w}^{(1)}|}\right)^{a_1} \left(\frac{\mathfrak{w}^{(2)}}{|\mathfrak{w}^{(2)}|}\right)^{a_2}.$$

Für diese beiden Fälle leitet man die so verstandene Formel (5.35) direkt aus (5.25) ab, indem man sich statt des Hilfssatzes 14 des folgenden bedient:

Hilfssatz 20. *Für komplexes W_1 mit $\Re(W_1) > 0$ ist*

$$e^{-W_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{\Gamma(s)}{W^s}\, ds; \tag{5.37}$$

für reelles $W_1 > 0$ und komplexe z_1, z_2 mit $z_2 = \bar{z}_1$ ist

$$e^{-W_1 + 2\pi i(z_1 + z_2)} = \frac{2}{2\pi i} \sum_{a_1, a_2}^{\infty} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{(2\pi i z_1)^{a_1} (2\pi i z_2)^{a_2}}{(W_1^2 + 16\pi^2 |z_1|^2)^{\frac{a_1 + a_2 + 2s}{2}}} \frac{\Gamma(a_1 + a_2 + 2s)}{\Gamma(a_1 + a_2 + 1)}$$

(5.38)

$$\times F\left(\frac{a_1 + a_2 + 2s}{2},\ \frac{a_1 + a_2 + 1 - 2s}{2};\ a_1 + a_2 + 1;\ \frac{16\pi^2 |z_1|^2}{W_1^2 + 16\pi^2 |z_1|^2}\right) ds$$

mit $\sigma_0 > 0$ und $a_1 a_2 = 0$ als Summationsbedingung.

Zum Beweise ist zu sagen, daß (5.37) eine bekannte Mellinsche Formel ist. Um (5.38) zu beweisen, entwickle man $e^{-W_1+2\pi i|z|(e^{\varphi}+e^{-\varphi})}$ in eine Fourierreihe nach φ, deren Koeffizienten Besselsche Funktionen werden, und wende dann die im Beweise von Hilfssatz 13 benutzte Hankelsche Formel und auf diese den Mellinschen Umkehrungssatz an.

5.4. Es kommt nun darauf an, in (5.35) die Summation nach den $\mathfrak{w}$ mit den beiden weiteren Summationen und der Integration zu vertauschen. Die Zulässigkeit der Vertauschung werden wir aus der Konvergenz der vier unendlichen Prozesse, wenn man sie über den *absolut* genommenen Term erstreckt, erschließen. Die folgenden Rechnungen beweisen nicht nur die absolute Konvergenz, sondern ergeben zugleich eine obere Abschätzung, die für den gegenwärtigen Zweck zwar nicht nötig wäre, in **5.7.** aber doch gebraucht wird. Wir setzen

$$\delta_q = \frac{\pi}{2} - |\arg(w_q - 2\pi i y_q)| \qquad (q = 1, \dots r_1), \tag{5.411}$$

$$\delta_p = \frac{\sqrt{1-x_p}}{4}, \quad x_p = \frac{4\pi^2|y_p|^2}{w_p^2 + 4\pi^2|y_p|^2} \quad (p = r_1+1, \dots r_1+r_2). \tag{5.412}$$

Nun ist für $0 < \varepsilon \leqq \sigma \leqq \frac{3}{2(1+\varepsilon)}$ nach bekannten Eigenschaften der Γ-Funktion

$$\left|\frac{\Gamma(e_q s + i v_q)}{(w_q - 2\pi i y_q)^{e_q s + i v_q}}\right| < C \frac{e^{-\delta_q|t+v_q|}(1+|t+v_q|)^{\sigma-\frac{1}{2}}}{|w_q - 2\pi i y_q|^{\sigma}} \qquad (q = 1 \dots r_1), \tag{5.42}$$

wobei $e_q = 1$ für $q = 1, \dots r_1$ benutzt worden ist. Ferner ist nach Hilfssatz 19, unter Verwendung der Abkürzung x_p aus (5.412) und unter Berücksichtigung von $e_p = 2$ für $p = r_1+1, \dots r_1+r_2$

$$\left|\frac{(2\pi i y_p)^{a_p}(2\pi i y_{p+r_2})^{a_p+r_2}}{(w_p^2+4\pi^2|y_p|^2)^{\frac{a_p+a_{p+r_2}+e_p s+i v_p}{2}}} G\left(e_p s + i v_p, a_p + a_{p+r_2}, \frac{4\pi^2|y_p|^2}{w_p^2+4\pi^2|y_p|^2}\right)\right|$$

$$< C \frac{e^{-\delta_p|2t+v_p|} x_p^{\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}}}{(w_p^2+4\pi^2|y_p|^2)^{\sigma}} \frac{(1+a_p+a_{p+r_2}+|2t+v_p|)^{2\sigma-\frac{1}{2}}}{1+a_p+a_{p+r_2}} \frac{(1-x_p)^{-\frac{1}{4}}}{\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}\right)^{\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}}}. \tag{5.43}$$

Daher ist der absolute Betrag des Integranden in (5.35) kleiner als

$$C \frac{1}{|N(\mathfrak{w})|^{\sigma}} \frac{1}{\prod_{q=1}^{r_1}|w_q - 2\pi i y_q|^{\sigma} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}(w_p^2+4\pi^2|y_p|^2)^{\sigma}(1-x_p)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\asymp \prod_{q=1}^{r_1} e^{-\delta_q|t+v_q|}(1+|t+v_q|)^{\sigma-\frac{1}{2}} \tag{5.44}$$

$$\asymp \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} e^{-\delta_p|2t+v_p|} \frac{(1+a_p+a_{p+r_2}+|2t+v_p|)^{2\sigma-\frac{1}{2}}}{1+a_p+a_{p+r_2}} \left(\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}\right)^{\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}}$$

Über diesen Term läßt sich nach $(\mathfrak{B})_v$ offenbar nur für $\sigma > 1$ summieren, was ja auch in (5.35) zutrifft. Wir wollen jedoch die drei anderen Prozesse für $0 < \varepsilon \leqq \sigma \leqq \frac{3}{2(1+\varepsilon)}$ weiter untersuchen. Wenn wir Faktoren beiseite lassen, die von den Summations- und der Integrationsvariablen nicht abhängen, handelt es sich um

$$(5.45)\quad \sum_{m_1 \cdots m_r}^{+\infty} \sum_{a_{r_1+1} \cdots a_n}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{q=1}^{r_1} e^{-\delta_q |t+v_q|} (1+|t+v_q|)^{\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} e^{-\delta_p |2t+v_p|} \times \frac{(1+a_p+a_{p+r_2}+|2t+v_p|)^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon}}{1+a_p+a_{p+r_2}} \left(\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}\right)^{\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}} dt,$$

wo wir einer späteren Anwendung wegen die Konvergenz noch verschlechtert haben, indem wir σ durch $\sigma+\varepsilon$ ersetzt haben.

Wir greifen nun aus (5.45) ein Glied mit beliebigen $a_{r_1+1}, \ldots a_n$ heraus, das aus einer r-fachen Summe nach $m_1, \ldots m_r$ über einem Integral nach t besteht. Bemerken wir gleich, daß bei beschränktem σ

$$(1+a_p+a_{p+r_2}+|2t+v_p|)^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon} < C(1+a_p+a_{p+r_2})^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon} + C(1+|2t+v_p|)^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

ist, so haben wir für ein solches Glied

$$(5.461)\quad \sum_{m_1, \ldots m_r}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} < C \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{1+l_p} \left(\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}\right)^{\frac{l_p}{2}}$$

$$\times \sum_{m_1, \ldots m_r}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{q=1}^{r_1} e^{-\delta_q |u_q|} (1+|u_q|)^{\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} e^{-\delta_p |u_p|} ((1+l_p)^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon} + (1+|u_p|)^{2\sigma-}$$

mit den Abkürzungen

$$l_p = a_p + a_{p+r_2} \qquad (p = r_1+1, \ldots r_1+r_2)$$

$$(5.462)\quad u_q = e_q t + v_q = e_q t + \sum_{k=1}^{r} E_q^{(k)} \left(2\pi m_k + \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \Theta_k^{(p)}\right) \qquad (q = 1, \ldots r_1+r_2),$$

wo v_q aus (3.314) entnommen worden ist. Die Umformungen in 2.46, welche die $E_q^{(k)}$ durch die $e_q^{(k)}$ zu ersetzen erlaubten, wenden wir hier wieder auf v_q an und erhalten

$$(5.463)\quad u_q = e_q t + v_q = e_q t + \sum_{j=1}^{r} e_q^{(j)} \left(2\pi \sum_{k=1}^{r} a_{kj}(m_k + R_k) + \sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \vartheta_j^{(p)}\right),$$

wo die R_k $(k = 1, \ldots r)$ nur von den a_p abhängen, für das herausgegriffene Glied also fest sind.

Schreibt man nun

$$\sum_{k=1}^{r} a_{kj}(m_k + R_k) + \frac{1}{2\pi}\sum_{p} a_p \vartheta_j^{(p)} = m_j^* + s_j \qquad (j = 1, \dots r) \tag{5.471}$$

mit ganzen m_j^* und $0 \leqq s_j < 1$, so gibt es für alle ganzen m_k nur endlich viele Systeme $(s_1, s_2, \dots s_r)$ und zwar nach (2.423), (2.443) und (2.444) in der Anzahl

$$\left|\frac{1}{\|a_{kj}\|}\right| = |D_v| = \frac{R_v}{R_1}.$$

Wir tragen (5.471) in (5.463) ein:

$$u_q = e_q t + 2\pi \sum_{j=1}^{r} e_q^{(j)}(m_j^* + s_j) \tag{5.472}$$

und denken uns dies in (5.461) eingetragen. Fassen wir darin Summanden, die zu demselben System $(s_1, s_2, \dots s_r)$ gehören, zusammen und deuten die Summation über diese Systeme durch $\sum_{(s)}$ an, so haben wir

$$\sum_{m_1, \dots m_r}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} < C \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{1+l_p}\left(\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{l_p}{2}} \tag{5.481}$$

$$\times \sum_{(s)} \sum_{m_1^*, \dots m_r^*}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{q=1}^{r_1} e^{-\delta_q |u_q|}(1+|u_q|)^{\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} e^{-\delta_p |u_p|}((1+l_p)^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

$$+ (1+|u_p|)^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon})\, dt.$$

Was die Summe nach den $m_1^*, \dots m_r^*$ samt dem Integral nach t angeht, so kommt es, wenn man sich das letzte Produkt $\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}$ ausgeführt denkt, auf Ausdrücke folgender Form an

$$\sum_{m_1^*, \dots m_r^*}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{q=1}^{r_1+r_2} e^{-\delta_q |u_q|}(1+|u_q|)^{\sigma_q}\, dt \tag{5.482}$$

mit gewissen beschränkten σ_q, die übrigens wegen $0 < \sigma \leqq \frac{3}{2(1+\varepsilon)}$ jedenfalls der Bedingung

$$-\frac{1}{2} < \sigma_q < 3 \tag{5.483}$$

genügen.

Nun ist für $\delta > 0$ im Bereiche $u \geqq 0$

$$e^{-\delta u}(1+u)^{\sigma} \tag{5.484}$$

für $\sigma \leqq 0$ eine monoton abnehmende Funktion von u. Für $\sigma > 0$ hat sie ein einziges Maximum bei $1 + u = \tau = \mathrm{Max}\left(1, \frac{\sigma}{\delta}\right)$. Für $\sigma \gtreqless 0$ kann man

dies dahin zusammenfassen, daß im Bereiche $u \geqq 0$ die Funktion (5. 484) ihr Maximum bei $1 + u = \tau$ hat und von da an monoton gegen Null abnimmt; dieses Maximum ist höchstens gleich τ^σ.

Bei festem t und bei festgehaltenem System $(s_1, \dots s_r)$ bildet nun die Gesamtheit der Punkte $(u_1, \dots u_{r_1+r_2})$ für alle ganzzahligen $m_1^*, \dots m_r^*$ ein r-dimensionales Gitter im $(r+1)$ dimensionalen Raum der $u_1, \dots u_{r_1+r_2}$. Die Gestalt dieses Gitters ist festgelegt durch die $e_q^{(j)}$, also durch den Zahlkörper. Für verschiedene Systeme $(s_1, \dots s_r)$ unterscheiden sich, bei gleichem t, diese Gitter nur durch eine Translation in ihrer r-dimensionalen Ebene. Man überlegt sich nun leicht, unter Beachtung dieses Gitters und des monotonen Verhaltens der Funktion (5. 484), daß der Ausdruck

$$\sum_{m_1^*, \dots m_r^*} \int_t \prod_{q=1}^{r_1+r_2} e^{-\delta_q |u_q|} (1 + |u_q|)^{\sigma_q} dt,$$

in dem die $m_1^*, \dots m_r^*$ und t nur denjenigen Spielraum durchlaufen sollen, für den

$$|u_1| \geqq \tau_1 + c, \ |u_2| \geqq \tau_2 + c, \ \dots \ |u_{r+1}| \geqq \tau_{r+1} + c,$$

wo $\tau_q = \operatorname{Max}\left(1, \frac{\sigma_q}{\delta_q}\right)$ und c das Doppelte des Durchmessers eines Gitterfundamentalbereichs ist, höchstens so groß ist wie

$$\int_{|u_1| \geqq \tau_1, \dots u_{r+1}| \geqq \tau_{r+1}} \dots \int \prod_{q=1}^{r+1} e^{-\delta_q |u_q|} (1 + |u_q|)^{\sigma_q} \left| \frac{\partial (m_1^*, \dots m_r^*, t)}{\partial (u_1, \dots u_{r+1})} \right| du_1 \dots du_{r+1}$$

$$= \frac{R_1}{(2\pi)^r e_{r+1} 2^{r_2}} \prod_{q=1}^{r+1} \int_{|u_q| \geqq \tau_q} e^{-\delta_q |u_q|} (1 + |u_q|)^{\sigma_q} du_q$$

$$< C \prod_{q=1}^{r+1} \int_0^\infty e^{-\delta_q u_q} u_q^{\sigma_q} du_q < C \prod_{q=1}^{r+1} \delta_q^{-\sigma_q - 1},$$

wobei (5. 483) berücksichtigt worden ist.

Zu dem gesamten Ausdruck (5. 482) fehlen aber noch Integralsummen über Bereiche erstreckt, die durch

$$|u_{q_1}| < \tau_{q_1} + c, \dots |u_{q_h}| < \tau_{q_h} + c, \ |u_{q_{h+1}}| \geqq \tau_{q_{h+1}} + c, \dots |u_{q_{r+1}}| \geqq \tau_{q_{r+1}} + c$$
$$(h = 1, \dots r+1)$$

beschrieben werden, wo $q_1, \dots q_{r+1}$ irgendeine Permutation von $1, 2, \dots r+1$ ist. Nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit der einfacheren Schreibweise wegen an, daß $q_1, \dots q_{r+1}$ die Zahlen $1, 2, \dots r+1$ in ihrer natürlichen Reihenfolge seien, daß es sich also um einen Bereich $\mathfrak{B}_h$

$$|u_1| < \tau_1 + c, \dots |u_h| < \tau_h + c, \ |u_{h+1}| \geqq \tau_{h+1} + c, \dots |u_{r+1}| \geqq \tau_{r+1} + c$$
$$(h = 1, \dots r+1)$$

handele. In diesem Bereiche ist aber nach den obigen Feststellungen über die Funktion (5. 484)

$$e^{-\delta_q|u_q|}(1+|u_q|)^{\sigma_q} \leqq \tau_q^{\sigma_q},$$

also die Integralsumme höchstens gleich

$$\tau_1^{\sigma_1}\dots\tau_h^{\sigma_h}\underbrace{\sum_{m_1^*,\dots m_r^*}}_{\mathfrak{B}_h}\int_t\prod_{q=h+1}^{r+1}e^{-\delta_q|u_q|}(1+|u_q|)^{\sigma_q}\,dt$$

$$< C\,\tau_1^{\sigma_1}\dots\tau_h^{\sigma_h}\prod_{q=1}^{h}\int_{|u_q|\leqq\tau_q+2c}du_q\cdot\prod_{q=h+1}^{r+1}\int_{|u_q|\geqq\tau_q}e^{-\delta_q|u_q|}(1+|u_q|)^{\sigma_q}\,du_q$$

$$< C\prod_{q=1}^{h}\tau_q^{\sigma_q}(\tau_q+2c)\prod_{q=h+1}^{r+1}\delta_q^{-\sigma_q-1}.$$

Nun ist für $\frac{\sigma_q}{\delta_q}>1$

$$\tau_q^{\sigma_q}(\tau_q+2c)=\left(\frac{\sigma_q}{\delta_q}\right)^{\sigma_q}\left(\frac{\sigma_q}{\delta_q}+2c\right)<\frac{C}{\delta_q^{\sigma_q+1}}$$

wegen (5. 483) und der aus den Definitionen (5. 411) und (5. 412) folgenden Tatsache $0<\delta_q<C$. Für $\frac{\sigma_q}{\delta_q}\leqq 1$ ist

$$\tau_q^{\sigma_q}(\tau_q+2c)=1(1+2c)<\frac{C}{\delta_q^{\sigma_q+1}}.$$

Somit gilt auch für die Integralsumme über einen Bereich $\mathfrak{B}_h$ die obere Abschätzung

$$C\prod_{q=1}^{r+1}\delta_q^{-\sigma_q-1},$$

so daß man also im ganzen für den Ausdruck (5. 482) erhält

$$\sum_{m_1^*,\dots m_r^*=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty}\prod_{q=1}^{r_1+r_2}e^{-\delta_q|u_q|}(1+|u_q|)^{\sigma_q}\,dt<C\prod_{q=1}^{r+1}\delta_q^{-\sigma_q-1}, \tag{5. 491}$$

eine Abschätzung, die unabhängig von den $s_1,\dots s_r$ gilt, die ja nur, wie erwähnt, eine Gittertranslation bewirken. Wendet man (5. 491) mit passenden σ_q auf (5. 481) an und bedenkt noch, daß es $\frac{R_0}{R_1}$ Systeme $(s_1,\dots s_r)$ gibt, so gelangt man zu

$$\sum_{m_1,\dots m_r=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty}<C\,R_0\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\frac{1}{1+l_p}\left(\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}\right)^{\frac{l_p}{2}} \tag{5. 492}$$

$$\times\prod_{q=1}^{r_1}\frac{1}{\delta_q^{\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}}\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\left(\frac{(1+l_p)^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\delta_p}+\frac{1}{\delta_p^{2\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right).$$

5. 5. In (5. 45) soll darüber noch nach $a_{r_1+1}, \dots a_n$ summiert werden. Während dort aber alle a_p in jedem v_q auftreten, tritt in der rechten Seite von (5. 492) in dem Faktor der Nummer p nur die Verbindung $l_p = a_p + a_{p+r_2}$ auf, so daß die Summe nach den a_p in ein Produkt von Summen je nach $a_p + a_{p+r_2}$ zerfällt. Da nun in (3. 313) $a_p \cdot a_{p+r_2} = 0$ festgesetzt worden ist, so tritt jedes positive l_p genau zweimal auf, nämlich erstens in $a_p = l_p$, $a_{p+r_2} = 0$ und zweitens in $a_p = 0$, $a_{p+r_2} = l_p$. Dagegen kommt $l_p = 0$ nur einmal vor. Somit ergibt schließlich (5. 492) mit (5. 45) zusammen:

$$\sum_{m_1,\dots m_r=-\infty}^{+\infty} \sum_{a_{r_1+1},\dots a_n=0}^{\infty} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \prod_{q=1}^{r_1} e^{-\delta_q|t+v_q|}(1+|t+v_q|)^{\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} e^{-\delta_p|2t+v_p|}$$

$$(5.51) \qquad \asymp \frac{(1+a_p+a_{p+r_2}+|2t+v_p|)^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon}}{1+a_p+a_{p+r_2}} \left(\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}\right)^{\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}} dt$$

$$< CR_v \prod_{q=1}^{r_1} \frac{1}{\delta_q^{\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \sum_{l_p=0}^{\infty} \frac{1}{1+l_p} \left(\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}\right)^{\frac{l_p}{2}} \left(\frac{(1+l_p)^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\delta_p} + \frac{1}{\delta_p^{2\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right.$$

Hierin ist

$$\sum_{l_p=0}^{\infty} = \frac{1}{\delta_p} \sum_{l_p=0}^{\infty} (l_p+1)^{2\sigma-\frac{3}{2}+\varepsilon} \left(\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}\right)^{\frac{l_p}{2}}$$

$$(5.52) \qquad + \frac{1}{\delta_p^{2\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}} \sum_{l_p=0}^{\infty} \frac{1}{l_p+1} \left(\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}\right)^{\frac{l_p}{2}} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Beschränken wir σ nur auf den Bereich

$$(5.53) \qquad \frac{1}{4} \leqq \sigma \leqq \frac{3}{2(1+\varepsilon)},$$

so ist $2\sigma - \frac{3}{2} + \varepsilon \geqq -1 + \varepsilon$ und daher

$$\Sigma_1 < \frac{C}{\delta_p} \frac{1}{\left(1-\sqrt{\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}}\right)^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon}} = \frac{C}{\delta_p} \left(\frac{1+\sqrt{\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}}}{1-\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}}\right)^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

$$(5.54) \qquad < \frac{C}{\delta_p} \frac{1}{\left(1-\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}\right)^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon}} < \frac{C}{\delta_p} \frac{1}{\left(1-x_p+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}\right)^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon}}$$

$$< \frac{C}{\delta_p} \frac{1}{\sqrt{1-x_p}^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon}}.$$

Ferner ist $\Sigma_2 = \frac{1}{\delta_p^{2\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ für $x_p = 0$; für $x_p > 0$ ist

$$\Sigma_2 = \frac{1}{\delta_p^{2\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}} \left(\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}\right)^{-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{1-\sqrt{\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}}}\right).$$

Nun ist für $0 < x_p \leqq \frac{1}{2}$

$$\log\left(\frac{1}{1-\sqrt{\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}}}\right) < \log\frac{1}{1-\sqrt{x_p}} < C\sqrt{x_p},$$

also

$$\Sigma_2 < \frac{C}{\delta_p^{2\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}}.$$

Für $\frac{1}{2} < x_p < 1$ ist dagegen

$$\Sigma_2 < \frac{C}{\delta_p^{2\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}} \log\left(\frac{1}{1-\sqrt{\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}}}\right) < \frac{C}{\delta_p^{2\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}} \log\left(\frac{C}{\sqrt{1-x_p}}\right),$$

wo ähnlich wie in (5.54) gerechnet worden ist. Für $0 \leqq x_p < 1$ ist somit

$$\Sigma_2 < \frac{C}{\delta_p^{2\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}}\left(1+\log\frac{1}{1-x_p}\right) < \frac{C}{\delta_p^{2\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}} \frac{1}{(1-x_p)^{\varepsilon}}. \tag{5.55}$$

Aus (5.51) bis (5.55) folgt nun:

Für $\frac{1}{4} \leqq \sigma \leqq \frac{3}{2(1+\varepsilon)}$ ist

$$\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_{r_1}\\ -\infty}}^{+\infty} \sum_{\substack{a_{r_1+1},\ldots,a_n\\ 0}}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{q=1}^{r_1} e^{-\delta_q|t+v_q|}(1+|t+v_q|)^{\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} e^{-\delta_p|2t+v_p|}$$

$$\times \frac{(1+a_p+a_{p+r_2}+|2t+v_p|)^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon}}{1+a_p+a_{p+r_2}} \left(\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}\right)^{\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}} dt \tag{5.56}$$

$$< CR_v \prod_{q=1}^{r_1} \frac{1}{\delta_q^{\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \left(\frac{1}{\delta_p\sqrt{1-x_p}^{2\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon}} + \frac{1}{\delta_p^{2\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}(1-x_p)^{\varepsilon}}\right)$$

$$< CR_v \prod_{q=1}^{r_1} \frac{1}{\delta_q^{\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{\sqrt{1-x_p}^{2\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}},$$

letzteres wegen der in (5.412) angegebenen Bedeutung von δ_p. Hiermit ist bewiesen, daß für $\sigma = \frac{5}{4}$ die über den Term (5.44) erstreckten Summationen und Integration absolut konvergent sind und daher beliebig

vertauscht werden können. Insbesondere kann daher in (5.35) von diesen Prozessen zuerst die Summation nach $(\mathfrak{w})_\mathfrak{v}$ ausgeführt werden.

5.6. Dadurch entsteht aus (5.35)

$$g(w,y;\mathsf{X}\chi\Lambda)$$

$$(5.61)\quad = \frac{1}{2\pi i}\frac{2^{r_2}}{R_\mathfrak{v}}\frac{w_*}{B_*}\sum_{m_1,\dots,m_r=-\infty}^{+\infty}\sum_{a_{r_1+1},\dots,a_n=0}^{\infty}\int_{\frac{5}{4}-i\infty}^{\frac{5}{4}+i\infty} P(s;w,y)\sum_{(\mathfrak{w})_\mathfrak{v}}\frac{\mathsf{X}\chi\Lambda\lambda(\mathfrak{w})}{|N(\mathfrak{w})|^s}\,ds,$$

mit der Abkürzung

$$P(s;w,y)$$

$$(5.62)\quad = \prod_{q=1}^{r_1}\frac{\Gamma(e_q s+iv_q)}{(w_q-2\pi i y_q)^{e_q s+iv_q}}\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\frac{(2\pi i y_p)^{a_p}(2\pi i y_{p+r_2})^{a_{p+r_2}}}{(w_p^2+4\pi^2|y_p|^2)^{\frac{a_p+a_{p+r_2}+e_p s+iv_p}{2}}}$$
$$\times G\left(e_p s+iv_p,\ a_p+a_{p+r_2},\ \frac{4\pi^2|y_p|^2}{w_p^2+4\pi^2|y_p|^2}\right).$$

Nun ist

$$(5.63)\quad \sum_{(\mathfrak{w})_\mathfrak{v}}\frac{\mathsf{X}\chi\Lambda\lambda(\mathfrak{w})}{|N(\mathfrak{w})|^s} = \sum_{(\mathfrak{w})}\frac{\mathsf{X}\chi\Lambda\lambda(\mathfrak{w})}{|N(\mathfrak{w})|^s}\sum_{(\varepsilon^*)_\mathfrak{v}}\mathsf{X}\chi\Lambda\lambda(\varepsilon^*),$$

worin $(\mathfrak{w})$ andeuten soll, daß $\mathfrak{w}$ von jedem Primideal je einen Repräsentanten durchläuft, worin ε^* dagegen ein volles System mod $\mathfrak{v}$ nicht assoziierter Einheiten durchläuft. Nach **2.43**, Hilfssatz 10 ist nun

$$(5.64)\quad \sum_{(\varepsilon^*)_\mathfrak{v}}\mathsf{X}\chi\Lambda\lambda(\varepsilon^*) = 0 \quad \text{oder} \quad B_* = \frac{R_\mathfrak{v}}{R},$$

letzteres nur, wenn $\mathsf{X}\chi\Lambda\lambda(\varepsilon)=1$ für jede Einheit ε; in diesem Falle ist $\mathsf{X}\chi\Lambda\lambda(\hat{\mu})$ ein „Größencharakter für Ideale". Mit Benutzung der Bezeichnung (4.132) des Hilfssatzes 16 erhält man daher aus (5.61), (5.63) und (5.64)

$$(5.65)\quad g(w,y;\mathsf{X}\chi\Lambda) = \frac{1}{2\pi i}\frac{2^{r_2}w_*}{R}\sum_{m_1,\dots,m_r=-\infty}^{+\infty}\sum_{a_{r_1+1},\dots,a_n=0}^{\infty}\int_{\frac{5}{4}-i\infty}^{\frac{5}{4}+i\infty} P(s;w,y)\ Z(s,\mathsf{X}\chi\Lambda\lambda)\,ds$$

Es ist für das Folgende wichtig, daß hier die $m_1,\dots,m_r$ nur solche Zahlensysteme durchlaufen, durch die $\mathsf{X}\chi\Lambda\lambda$ zu einem Größencharakter für Ideale wird. Dazu ist das Erfülltsein der r Bedingungen (2.477) nötig, in denen allerdings, da wir es jetzt mit $\Lambda\lambda$ zu tun haben, m_k durch m_k+M_k zu ersetzen ist, wenn man unter M_k die in dem als Charakter mod $\mathfrak{v}$ aufgefaßten Λ auftretenden Zahlen versteht, die den m_k in $\lambda_\mathfrak{v}$ entsprechen. Die Bedingungen (2.477) lassen sich dadurch erfüllen,

daß man mit Hilfe von (2.478) neue Parameter m_j' einführt. Nun ist nach (5.11) und (5.36)

$$(5.661)\qquad \Lambda\lambda(\hat{\mu}) = \prod_{q=1}^{r+1} |\hat{\mu}^{(q)}|^{-i(v_q+V_q)} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(p)}|}\right)^{a_p+A_p}.$$

Nach (2.479) ist daher $\mathsf{X}\chi\,\Lambda\lambda(\hat{\mu})$ ein Größencharakter für Ideale, wenn $\Lambda\lambda(\hat{\mu})$

$$(5.662)\qquad = \prod_{q=1}^{r+1} |\hat{\mu}^{(q)}|^{-\sum_{j=1}^{r} e_q^{(j)}\left(2\pi i\left(m_j'+\frac{g_j}{A_* D_\mathfrak{v}}\right)+i\sum_{p=r_1+1}^{n}(a_p+A_p)\vartheta_j^{(p)}\right)} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(p)}|}\right)^{a_p+A_p}$$

ist, worin die g_j gemäß (2.476) durch $\mathsf{X}\chi$ bestimmt sind. Nach (5.661) und (5.662) werden also die v_q folgendermaßen durch die m_j' ausgedrückt:

$$(5.663)\qquad v_q = \sum_{j=1}^{r} e_q^{(j)}\left(2\pi\left(m_j'+\frac{y_j}{A_* D_\mathfrak{v}}\right)+\sum_{p=r_1+1}^{n}(a_p+A_p)\vartheta_j^{(p)}\right)-V_q,$$

$$(q=1,\ldots,r+1).$$

Wir setzen nun wieder, gemäß einer Bezeichnung aus Hilfssatz 15,

$$b(\mathsf{X}\chi\,\Lambda\lambda)=1 \text{ oder } 0,$$

je nachdem $\mathsf{X}\chi\,\Lambda\lambda$ der Hauptcharakter mod $\mathfrak{v}$ ist oder nicht ist. Aus den Untersuchungen von Herrn Hecke ergibt sich mit, daß $\mathsf{X}\chi\,\Lambda\lambda$ nur dann der Hauptcharakter ist, wenn schon $\mathsf{X}\chi$ der Hauptcharakter mod $\mathfrak{v}$ und $\Lambda\lambda$ identisch 1 ist[30]). Nach (5.661) ist somit notwendig und hinreichend für das Stattfinden von $b(\mathsf{X}\chi\,\Lambda\lambda)=1$, daß

$$(5.664)\qquad v_q=-V_q,\quad a_p=A_{p+r_2},\quad a_{p+r_2}=A_p\qquad \begin{pmatrix} q=1,\ldots,r+1\\ p=r_1+1,\ldots,r_1+r_2\end{pmatrix}$$

und

$$b(\mathsf{X}\chi)=1$$

ist.

Setzen wir noch

$$(5.67)\qquad \mathsf{H}(s,\mathsf{X}\chi\,\Lambda\lambda)=\mathsf{Z}(s,\mathsf{X}\chi\,\Lambda\lambda)+b(\mathsf{X}\chi\,\Lambda\lambda)\log(s-1),$$

so geht, wenn wir noch, wie eben auseinandergesetzt wurde, statt der m_k die m_j' als Summationsvariablen einführen, (5.65) über in

$$g(w,y;\mathsf{X}\chi\,\Lambda)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{2^{r_2}w_*}{R}\,b(\mathsf{X}\chi)\int_{\frac{5}{4}-i\infty}^{\frac{5}{4}+i\infty} P_\Lambda(s;w,y)\log(s-1)\,ds$$

$$(5.68)\qquad +\frac{1}{2\pi i}\frac{2^{r_2}w_*}{R}\sum_{m_1',\ldots,m_r'=-\infty}^{+\infty}\ \sum_{0}^{\infty}\int_{\frac{5}{4}-i\infty}^{\frac{5}{4}+i\infty} P(s;w,y)\,\mathsf{H}(s,\mathsf{X}\chi\,\Lambda\lambda)\,ds.$$

[30]) E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen II, S. 33 unten bis S. 35 oben.

Im ersten Integral in (5.68) soll $P_A(s; w, y)$ diejenige Funktion bezeichnen, die aus $P(s; w, y)$ für die speziellen Werte (5.664) hervorgeht, also nach (5.62):

$$P_A(s; w, y)$$

$$= \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\Gamma(e_q s - i V_q)}{(w_q - 2\pi i y_q)^{e_q s - i V_q}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{(2\pi i y_p)^{A_p + r_2} (2\pi i y_{p+r_2})^{A_p}}{(w_p^2 + 4\pi^2 |y|^2)^{\frac{A_p + A_{p+r_2} + e_p s - i V_p}{2}}} \tag{5.69}$$

$$\times G\left(e_p s - i V_p, \quad A_p + A_{p+r_2}, \quad \frac{4\pi^2 |y_p|^2}{w_p^2 + 4\pi^2 |y_p|^2}\right).$$

5.7. In (5.68) wollen wir nun in beiden Integralen den Integrationsweg nach links verschieben. Dies ist erlaubt, da der Integrand mit wachsendem $|t|$ genügend stark gegen Null strebt, wie aus (4.133) und (5.44) hervorgeht. Man muß nur mit dem zweiten Integral von (5.68) im Regularitätsbereich von $H(s, X\chi\Lambda\lambda)$ bleiben. Im ersten Integral hat man sich die Funktion $\log(s-1)$ in einer von $+1$ bis $-\infty$ längs der reellen Achse aufgeschnittenen Ebene zu denken, so daß man beim Verschieben des Integrationsweges diesen Verzweigungsschnitt umgehen muß. Da sich auf seinen beiden Ufern der Logarithmus um $2\pi i$ unterscheidet, so erhält man aus (5.68) unter Berücksichtigung des Hilfssatzes 16

$$g(w, y; X\chi\Lambda) = b(X\chi) \frac{2^{r_2} w_*}{R} \int_{\frac{1}{2}}^{1} P_A(\sigma; w, y)\, d\sigma$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \frac{2^{r_2} w_*}{R} b(X\chi) \left\{ \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+i\infty} \right\} P_A(s; w, y) \log(s-1)\, ds \tag{5.71}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \frac{2^{r_2} w_*}{R} \sum_{\substack{m_1', \ldots, m_r' \\ -\infty}}^{+\infty} \sum_{\substack{a_{r_1+1}, \ldots, a_n \\ 0}}^{\infty} \int_{\Theta+\varepsilon-i\infty}^{\Theta+\varepsilon+i\infty} P(s; w, y)\, H(s, X\chi\Lambda\lambda)\, ds.$$

Wir setzen

$$\varphi(w, y; \Lambda) = \frac{2^{r_2} w_*}{R} \int_{\frac{1}{2}}^{1} P_A(\sigma; w, y)\, d\sigma \tag{5.72}$$

und haben dann auf Grund von (5.71), (5.72), (5.62), (5.69), (5.42), (5.43) und (4.133)

$$|g(w,y;\mathsf{X}\chi\Lambda)-b(\mathsf{X}\chi)\varphi(w,y;\Lambda)|<C\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{q=1}^{r_1}\frac{e^{-\delta_q|t-V_q|}}{|w_q-2\pi i y_q|^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\frac{e^{-\delta_q|2t-V_q|}(1+A_p+A_{p+r_2}+|2t-V_q|)^{\frac{1}{2}}}{(w_p^2+4\pi^2|y_p|^2)^{\frac{1}{2}}(1-x_p)^{\frac{1}{4}}(1+A_p+A_{p+r_2})}\left(\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}\right)^{\frac{A_p+A_{p+r_2}}{2}}dt$$

(5.73)

$$+C\log(N(\mathfrak{v})+1)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m_1',\dots,m_r'}\sum_{0}^{\infty}{}_{a_{r_1+1},\dots,a_n}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{q=1}^{r_1}\frac{e^{-\delta_q|t+v_q|}(1+|t+v_q|)^{\Theta-\frac{1}{2}+2\varepsilon}}{|w_q-2\pi i y_q|^{\Theta+\varepsilon}}$$

$$\times\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\frac{e^{-\delta_p|2t+v_p|}(1+a_p+a_{p+r_2}+|2t+v_p|)^{2\Theta-\frac{1}{2}+3\varepsilon}}{(w_p^2+4\pi^2|y_p|^2)^{\Theta+\varepsilon}(1-x_p)^{\frac{1}{4}}(1+a_p+a_{p+r_2})}\left(\frac{x_p}{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}\right)^{\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}}dt.$$

In dem in (5.73) rechts einzeln auftretenden Integral sehen wir die von dem fest angenommenen Λ herrührenden Zahlen V_q und A_p als Konstante in unserer Rechnung an. Die Summe in (5.73) behandeln wir nach den Überlegungen von 5.4 und 5.5, bemerken aber, daß jetzt die Summationsvariablen $m_1', \dots, m_r'$ auftreten statt der $m_1, \dots, m_r$ in (5.45). Dadurch wird jetzt statt der Substitution (5.462) die folgende aus (5.663) zu entnehmende, auftreten

$$u_q=e_q t+v_q=e_q t+\sum_{j=1}^{r}e_q^{(j)}\left(2\pi\left(m_j'+\frac{g_j}{A_*D_\mathfrak{v}}\right)+\sum_{p=r_1+1}^{n}(a_p+A_p)\vartheta_j^{(p)}\right)-V_q,$$

die selbst von der Gestalt (5.472) ist.

Führen wir also die Rechnungen von 5.4 und 5.5 auf (5.73) angewandt durch, so gelangen wir zu einer Abschätzung, die sich von (5.56) nur dadurch unterscheidet, daß die Summation über die $\frac{R_\mathfrak{v}}{R_1}$ Systeme $(s_1, \dots s_r)$ nicht vorkommt und daher auch das $R_\mathfrak{v}$ nicht auftritt. Somit erhalten wir aus (5.73)

$$|g(w,y;\mathsf{X}\chi\Lambda)-b(\mathsf{X}\chi)\varphi(w,y;\Lambda)|$$

$$<C\prod_{q=1}^{r_1}\frac{1}{|w_q-2\pi i g_q|^{\frac{1}{2}}}\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\frac{1}{(w_p^2+4\pi^2|y_p|^2)^{\frac{1}{2}}(1-x_p)^{\frac{1}{4}}}$$

(5.74)

$$+CN(\mathfrak{v})^{\varepsilon}\prod_{q=1}^{r_1}\frac{1}{|w_q-2\pi i y_q|^{\Theta+\varepsilon}\delta_q^{\Theta+\frac{1}{2}+2\varepsilon}}$$

$$\times\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\frac{1}{(w_p^2+4\pi^2|y_p|^2)^{\Theta+\varepsilon}\sqrt{1-x_p}^{2\Theta+1+4\varepsilon}}.$$

Aus (5.411) entnehmen wir

$$\delta_q \geqq \sin\delta_q = \frac{w_q}{|w_q - 2\pi i y_q|}, \tag{5.751}$$

und aus (5.412)

$$1 - x_p = \frac{w_p^2}{w_p^2 + 4\pi^2 |y_p|^2}. \tag{5.752}$$

Setzen wir dies in (5.74) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &|g(w,y;\mathsf{X}\chi\Lambda) - b(\mathsf{X}\chi)\varphi(w,y;\Lambda)| \\ &< C \prod_{q=1}^{r_1} \frac{1}{|w_q - 2\pi i y_q|^{\frac{1}{2}}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{w_p^{\frac{1}{2}}(w_p^2 + 4\pi^2|y_p|^2)^{\frac{1}{4}}} \\ &+ CN(\mathfrak{b})^{\varepsilon} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{|w_q - 2\pi i y_q|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{w_q^{\Theta+\frac{1}{2}+2\varepsilon}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{(w_p^2 + 4\pi^2|y_p|^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{w_p^{2\Theta+1+4\varepsilon}}. \end{aligned} \tag{5.76}$$

Aus (5.23), (5.24), (2.314) und (5.76) folgt nun

$$\begin{aligned} &\left| f(w,\gamma+y;\mathsf{X}\Lambda) - \frac{\varphi(w,y;\Lambda)}{h 2^{r_1}\varphi(\mathfrak{a})} \sum_{\chi} b(\mathsf{X}\chi) C(\chi) \right| \\ &< CN(\mathfrak{a})^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{1}{|w_q - 2\pi i y_q|^{\frac{1}{2}}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{w_p^{\frac{1}{2}}(w_p^2 + 4\pi^2|y_p|^2)^{\frac{1}{4}}} \\ &+ CN(\mathfrak{a})^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{|w_q - 2\pi i y_q|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{w_q^{\Theta+\frac{1}{2}+2\varepsilon}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{(w_p^2 + 4\pi^2|y_p|^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{w_p^{2\Theta+1+4\varepsilon}}, \end{aligned}$$

und hieraus folgt mittels (5.151)

$$\begin{aligned} &\left| f_1(w,\gamma+y;\Lambda) - \frac{\varphi(w,y;\Lambda)}{h 2^{r_1}\varphi(\mathfrak{a})\varphi(\mathfrak{A})} \sum_{\mathsf{X}_{\mathfrak{A}}} \overline{\mathsf{X}}(\alpha) \sum_{\chi} b(\mathsf{X}\chi) C(\chi) \right| \\ &< CN(\mathfrak{a})^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{1}{w_q^{\frac{1}{2}} \left|1 - 2\pi i \frac{y_q}{w_q}\right|^{\frac{1}{2}}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{w_p \left(1 + \frac{4\pi^2|y_p|^2}{w_p^2}\right)^{\frac{1}{4}}} \\ &+ CN(\mathfrak{a})^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\left|1 - 2\pi i \frac{y_q}{w_q}\right|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{w_q^{\Theta+\varepsilon}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{\left(1 + \frac{4\pi^2|y_p|^2}{w_p^2}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{w_p^{2\Theta+2\varepsilon}}. \end{aligned} \tag{5.77}$$

5.8. Es bleibt nun noch die Abschätzung der in (5.143) definierten Funktion $f_2(w,z;\Lambda)$ zu erledigen. Nach (5.143) ist

$$\begin{aligned} f_2(w,\gamma+y;\Lambda) &= \sum_{\substack{\varpi \succ 0 \\ \varpi \equiv \alpha \bmod \mathfrak{A} \\ \varpi \mid \mathfrak{a}}} \Lambda(\varpi) \exp\Big\{-\sum_{q=1}^{n}(|\varpi^{(q)}|\, w_q - 2\pi i \varpi^{(q)}(\gamma^{(q)} + y_q))\Big\} \\ &= \sum_{\substack{\varpi \succ 0 \\ \varpi \equiv \alpha \bmod \mathfrak{A} \\ \varpi \mid \mathfrak{a}}} \Lambda(\varpi)\, e^{2\pi i S(\gamma\varpi)} \exp\Big\{-\sum_{q=1}^{n}(|\varpi^{(q)}|\, w_q - 2\pi i \varpi^{(q)} y_q)\Big\}, \end{aligned}$$

und wenn wir wie in 5.3 das System Ξ, $\mathsf{H}_1 \dots \mathsf{H}_r$ von Grundeinheiten mod $\mathfrak{v}$ einführen, so ist mit den Abkürzungen (5.172)

$$f_2(w, \gamma + y; \Lambda)$$

$$= \sum_{\substack{(\varpi)_\mathfrak{v} \\ \varpi \succ 0 \\ \varpi \equiv \alpha \bmod \mathfrak{A} \\ \varpi \mid \mathfrak{a}}} \Lambda(\varpi)\, e^{2\pi i S(\gamma \varpi)} \sum_{b=1}^{\frac{w_*}{B_*}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{b_1 \dots b_r} \exp\Big\{ -\sum_{q=1}^{r+1} \Big| \mathsf{H}_1^{(q) b_1} \dots \mathsf{H}_r^{(q) b_r} \Big| \, |\varpi^{(q)}| \, U_q$$

$$+ 2\pi i \sum_{p=r_1+1}^{n} \mathsf{H}_1^{(p) b_1} \dots \mathsf{H}^{(p) b_r}\, \Xi^{(p) b}\, \varpi^{(p)}\, y_p \Big\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{2^{r_2}}{R_\mathfrak{v}} \frac{w_*}{B_*} \sum_{\substack{(\varpi)_\mathfrak{v} \\ \varpi \succ 0 \\ \varpi \equiv \alpha \bmod \mathfrak{A} \\ \varpi \mid \mathfrak{a}}} \Lambda(\varpi)\, e^{2\pi i S(\gamma \varpi)} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1 \dots m_r} \sum_{0}^{\infty}{}_{a_{r_1+1} \dots a_n} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} P(s; w, y)\, \frac{\lambda(\varpi)}{N(\varpi)^s}\, ds$$

$$(\sigma_0 > 0),$$

wobei wir ebenso geschlossen haben wie bei dem Übergang von (5.31) zu (5.35) und die Abkürzungen (5.36) und (5.62) benutzt haben[31]). Lassen wir η aus einem System mod $\mathfrak{v}$ nicht-assoziierter Einheiten diejenigen durchlaufen, für die $\eta \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{A})$ und $\eta \succ 0$ gilt, so folgt

$$f_2(w, \gamma + y; \Lambda) \equiv \frac{1}{2\pi i} \frac{2^{r_2}}{R_\mathfrak{v}} \frac{w_*}{B_*} \sum_{\substack{(\varpi) \\ \varpi \succ 0 \\ \varpi \equiv \alpha \bmod \mathfrak{A} \\ \varpi \mid \mathfrak{a}}} \Lambda(\varpi)\, \lambda(\varpi) \sum_{\substack{(\eta)_\mathfrak{v} \\ \eta \equiv 1 \bmod \mathfrak{A} \\ \eta \succ 0}} \Lambda(\eta)\, \lambda(\eta)\, e^{2\pi i S(\gamma \varpi \eta)}$$

$$\times \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1 \dots m_r} \sum_{0}^{\infty}{}_{a_{r_1+1} \dots a_n} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{P(s; w, y)}{N(\varpi)^s}\, ds.$$

Dann ist nach (5.62), (5.42) und (5.43)

$$|f_2(w, \gamma + y; \Lambda)| < \frac{C}{R_\mathfrak{v}} \frac{1}{\prod_{q=1}^{r_1} |w_q - 2\pi i y_q|^{\sigma_0} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} (w_p^2 + 4\pi^2 |y_p|^2)^{\sigma_0} (1 - x_p)^{\frac{1}{4}}}$$

$$(5.81) \quad \times \sum_{\substack{(\varpi) \\ \varpi \mid \mathfrak{a}}} \frac{1}{|N(\varpi)|^{\sigma_0}} \sum_{\substack{(\eta)_\mathfrak{v} \\ \eta \succ 0}} 1 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1 \dots m_r} \sum_{0}^{\infty}{}_{a_{r_1+1} \dots a_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{q=1}^{r_1} e^{-\delta_q |t + v_q|} (1 + |t + v_q|)^{\sigma_0 - \frac{1}{2}}$$

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} e^{-\delta_p |2t + v_p|} \frac{(1 + a_p + a_{p+r_2} + |2t + v_p|)^{2\sigma_0 - \frac{1}{2}}}{1 + a_p + a_{p+r_2}} \left(\frac{x_p}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - x_p}} \right)^{\frac{a_p + a_{p+r_2}}{2}} dt.$$

---

[31]) Diese Formel für $f_2(w, \gamma + y; \Lambda)$ ist wieder unter der Voraussetzung $r \geqq 1$ abgeleitet. Sie gilt aber auch für $r = 0$ ganz entsprechend der Formel (5.35) für $g(w, y; \chi, \Lambda)$, worüber man die „Anmerkung" am Ende von 5.3 vergleichen möge.

Wir bemerken zugleich, daß hierin

$$\sum_{\substack{(\eta)_{\mathfrak{v}} \\ \eta \succ 0}} 1 \leqq \varphi(\mathfrak{v}) \tag{5.82}$$

ist, da die mod $\mathfrak{v}$ inkongruenten totalpositiven Einheiten η eine Untergruppe der reduzierten Restklassengruppe mod $\mathfrak{v}$ bilden. Ferner ist

$$\sum_{\substack{(\varpi) \\ \varpi \mid \mathfrak{a}}} \frac{1}{|N(\varpi)|^{\sigma_0}} < \sum_{\substack{(\varpi) \\ \varpi \mid \mathfrak{a}}} 1 < C \log N(\mathfrak{a}). \tag{5.83}$$

Wenn wir in (5.51) $\varepsilon = 0$ setzen, so können wir es auf (5.81) anwenden; zugleich setzen wir $\sigma_0 = \frac{1}{4}$, was eine weitere Vereinfachung ergibt. Aus (5.81), (5.82), (5.83) und (5.49) geht somit hervor

$$\begin{aligned} |f_2(w, \gamma + y; \Lambda)| < C N(\mathfrak{a})^{1+\varepsilon} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{1}{|w_q - 2\pi i y_q|^{\frac{1}{4}} \delta_q^{\frac{3}{4}}} \\ \times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{(w_p^2 + 4\pi^2 |y_p|^2)^{\frac{1}{4}} (1-x_p)^{\frac{1}{4}}} \sum_{l_p=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_p} \frac{1}{l_p+1} \left(\frac{x_p}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}} \right)^{\frac{l_p}{2}}, \end{aligned} \tag{5.84}$$

wobei wir, gemäß der Überlegung am Anfang von **5.5**, $a_p + a_{p+r_2}$ durch l_p ersetzt haben. Nun ist

$$\sum_{l_p=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_p} \frac{1}{l_p+1} \left(\frac{x_p}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}} \right)^{\frac{l_p}{2}} = \frac{1}{\delta_p} \qquad \text{für } x_p = 0$$

$$= \frac{1}{\delta_p} \left(\frac{x_p}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}} \right)^{-\frac{1}{2}} \log \left(\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{x_p}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}}}} \right) \qquad \text{für } x_p > 0,$$

und nach einer Rechnung, wie sie in **5.5** für Σ_2 ausgeführt ist, ergibt sich hieraus

$$\sum_{l_p=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_p} \frac{1}{l_p+1} \left(\frac{x_p}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x_p}} \right)^{\frac{l_p}{2}} < \frac{C}{(1-x_p)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}. \tag{5.85}$$

Aus (5.84) und (5.85) folgt nun unter Berücksichtigung von (5.751) und (5.752)

$$\begin{aligned} |f_2(w, \gamma + y; \Lambda)| < C N(\mathfrak{a})^{1+\varepsilon} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\left| 1 - \frac{2\pi i y_q}{w_q} \right|^{\frac{1}{2}}}{w_p^{\frac{1}{4}}} \\ \times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{\left(1 + \frac{4\pi^2 |y_p|^2}{w_p^2} \right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{w_p^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \tag{5.86}$$

Auf Grund von (5.141) erhalten wir aus (5.77) und (5.86) schließlich die Abschätzung von $f(w, z; \Lambda)$ selbst:

$$
\begin{aligned}
|f(w, \gamma+y; \Lambda) - \Phi_{\mathfrak{a}}(w, y; \Lambda)| &< CN(\mathfrak{a})^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \prod_{q=1}^{r_1} w_q^{-\frac{1}{2}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} w_p^{-1} \\
&+ CN(\mathfrak{a})^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\left(1+\frac{2\pi|y_p|}{w_q}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{w_q^{\Theta+\varepsilon}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{\left(1+\frac{4\pi^2|y_p|^2}{w_p^2}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{w_p^{2\Theta+2\varepsilon}} \qquad (5.87) \\
&+ CN(\mathfrak{a})^{1+\varepsilon} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\left(1+\frac{2\pi|y_q|}{w_q}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{w_p^{\frac{1}{2}}} \prod_{q=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{\left(1+\frac{4\pi^2|y_p|^2}{w_p^2}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{w_p^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}
$$

worin wir zur Abkürzung

$$
\Phi_{\mathfrak{a}}(w, y; \Lambda) = \frac{\varphi(w, y; \Lambda)}{h\, 2^{r_1} \varphi(\mathfrak{a}) \varphi(\mathfrak{A})} \sum_{\mathsf{X}_{\mathfrak{A}}} \overline{\mathsf{X}}(\alpha) \sum_{\chi} b(\mathsf{X}\chi) C(\chi) \qquad (5.88)
$$

gesetzt haben.

5.9. In (5.88) läßt sich die Summe auswerten. Das Symbol $b(\mathsf{X}\chi)$ ist 1 oder 0, je nachdem $\mathsf{X}\chi$ der Hauptcharakter mod $\mathfrak{v}$ ist oder nicht. Dafür, daß $\mathsf{X}\chi$ der Hauptcharakter ist, ist nach (2.32), Hilfssatz 8, notwendig und hinreichend, daß erstens $\chi(\hat{\mu}) = \overline{\mathsf{X}}(\hat{\mu})$ für die zu $\mathfrak{v}$ teilerfremden $\hat{\mu}$ und daß zweitens X einen Charakter mod $\mathfrak{t}$ induziert, wo $\mathfrak{t} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{a})$ ist. In diesem Falle bezeichnen wir den induzierten Charakter mod $\mathfrak{t}$ mit $\mathsf{X}_{\mathfrak{t}}$. Es gilt dann

$$
\mathsf{X}(\hat{\mu}) = \mathsf{X}_{\mathfrak{t}}(\hat{\mu}) \quad \text{für} \quad (\hat{\mu}, \mathfrak{A}) = 1 \qquad (5.911)
$$

und

$$
\chi(\hat{\mu}) = \overline{\mathsf{X}}_{\mathfrak{t}}(\hat{\mu}) \quad \text{für} \quad (\hat{\mu}, \mathfrak{a}) = 1. \qquad (5.912)
$$

Wenn es ein solches $\mathsf{X}_{\mathfrak{t}}$ gibt, ist also

$$
\sum_{\chi} b(\mathsf{X}\chi) C(\chi) = C(\overline{\mathsf{X}}_{\mathfrak{t}}), \qquad (5.921)
$$

wo wegen (5.912) und (2.313)

$$
C(\overline{\mathsf{X}}_{\mathfrak{t}}) = \sum_{\substack{\varrho \succ 0 \\ \varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho, \mathfrak{a})=1}} \mathsf{X}_{\mathfrak{t}}(\varrho)\, e^{2\pi i S(\gamma\varrho)} \qquad (5.922)
$$

ist. Wenn dagegen X keinen Charakter mod $\mathfrak{t}$ induziert, so daß es also für alle χ keinen Hauptcharakter unter den $\mathsf{X}\chi$ gibt, so ist

$$
\sum_{\chi} b(\mathsf{X}\chi) C(\chi) = 0. \qquad (5.923)
$$

Wegen (5.923) braucht in der in (5.88) auftretenden Summe der Cha-

rakter χ nur diejenigen Charaktere mod $\mathfrak{A}$ zu durchlaufen, die einen Charakter mod t induzieren. Daher ist nach (5.921) und (5.922)

$$\begin{aligned}(5.93)\qquad &\sum_{\chi_{\mathfrak{A}}} \overline{\chi}(\alpha) \sum_{\chi} b(\chi\chi) C(\chi) = \sum_{\chi_t} \overline{\chi}_t(\alpha) C(\overline{\chi}_t) \\ &= \sum_{\substack{\varrho \succ 0 \\ \varrho \bmod a \\ (\varrho, a)=1}} e^{2\pi i S(\gamma\varrho)} \sum_{\chi_t} \overline{\chi}_t(\alpha) \chi_t(\varrho) = \varphi(t) \sum_{\substack{\varrho \succ 0 \\ \varrho \bmod a \\ (\varrho, a)=1 \\ \varrho \equiv \alpha \bmod t}} e^{2\pi i S(\gamma\varrho)},\end{aligned}$$

und da in dieser letzten Summe die Bedingung $\varrho \succ 0$ überflüssig ist, wenn nur ϱ ein reduziertes Restsystem mod a durchläuft, so läßt sich (2.251) anwenden. Aus (5.88), (5.93) und (2.251) folgt

$$(5.94)\qquad \Phi_a(w, y; \Lambda) = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad \left(\frac{a}{t}, t\right) \neq 1 \\ \dfrac{e^{2\pi i S(\gamma\varkappa a)}}{h\, 2^{r_1}\, \varphi(\mathfrak{A})} \dfrac{\mu\left(\frac{a}{t}\right)}{\varphi\left(\frac{a}{t}\right)} \varphi(w, y; \Lambda) \quad \text{für} \quad \left(\frac{a}{t}, t\right) = 1 \end{cases}$$

mit der Festsetzung (2.252) für $\varkappa$.

Wir brauchen später noch eine Abschätzung der Größenordnung von $\Phi_a(w, y; \Lambda)$. Aus der Definition (5.72) von $\varphi(w, y; \Lambda)$ aus (5.69) und (4.312) folgt mit der Abkürzung x_p aus (5.412)

$$|\varphi(w, y; \Lambda)| < C \int_{\frac{1}{2}}^{1} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{e^{-\delta_q |V_q|} (1 + |V_q|)^{\sigma - \frac{1}{2}}}{|w_q - 2\pi i y_q|^{\sigma}}$$

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{x_p^{\frac{A_p + A_{p+r_2}}{2}}}{(w_p^2 + 4\pi^2 |y_p|^2)^{\sigma}} (1 + A_p + A_{p+r_2} + |V_p|)^{\sigma - \frac{1}{2}}\, d\sigma,$$

und da wir die A_p und V_p als Konstante behandeln,

$$|\varphi(w, y; \Lambda)| < C \int_{\frac{1}{2}}^{1} \prod_{q=1}^{r_1} |w_q - 2\pi i y_q|^{-\sigma} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} (w_p^2 + 4\pi^2 |y_p|^2)^{-\sigma}\, d\sigma.$$

Der Integrand ist nun, je nach den Größen der w_q und y_q, monoton abnehmend oder zunehmend als Funktion von σ, daher also gewiß

$$\begin{aligned}(5.95)\qquad |\varphi(w, y; \Lambda)| &< C \prod_{q=1}^{r_1} (w_q + 2\pi |y_q|)^{-1} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} (w_p^2 + 4\pi^2 |y_p|^2)^{-1} \\ &+ C \prod_{q=1}^{r_1} (w_q + 2\pi |y_q|)^{-\frac{1}{2}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} (w_p^2 + 4\pi^2 |y_p|^2)^{-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

Aus (5.95) und (5.94) folgt

$$(5.96)\qquad \begin{aligned}|\Phi_{\mathfrak{a}}(w,y;\Lambda)| &< \frac{C}{\varphi(\mathfrak{a})}\prod_{q=1}^{r_1}(w_q+2\pi|y_q|)^{-1}\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}(w_p^2+4\pi^2|y_p|^2)^{-1}\\ &+\frac{C}{\varphi(\mathfrak{a})}\prod_{q=1}^{r_1}(w_q+2\pi|y_q|)^{-\frac{1}{2}}\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}(w_p^2+4\pi^2|y_p|^2)^{-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

wobei benutzt worden ist, daß $\mathfrak{t}|\mathfrak{A}$, also für $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}},\mathfrak{t}\right)=1$

$$\frac{\varphi(\mathfrak{a})}{\varphi\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}\right)}=\varphi(\mathfrak{t})\leqq\varphi(\mathfrak{A})=C,$$

da wir das gegebene Ideal $\mathfrak{A}$ nicht als variabel betrachten.

6. Asymptotische Auswertung der Koeffizienten des Produktes mehrerer Fundamentalfunktionen.

6.1. Zu dem Ideal $\mathfrak{A}$ als Modul seien nun m Größencharaktere $\Lambda_j(\hat{\mu})$ gegeben, die untereinander gleich oder verschieden sein dürfen. Analog zu (5.11) setzen wir

$$(6.11)\qquad \Lambda_j(\hat{\mu})=\prod_{q=1}^{r+1}|\hat{\mu}^{(q)}|^{-iV_{qj}}\prod_{p=r_1+1}^{n}\left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(p)}|}\right)^{A_{pj}}\quad(j=1,2,\ldots,m)$$

und bilden gemäß (5.12) zu diesen Λ_j und zu gewissen Zahlen $\alpha_1,\ldots\alpha_m$, die zu $\mathfrak{A}$ teilerfremd seien, die m Funktionen

$$(6.12)\qquad f(w,z;\Lambda_j)=\sum_{\substack{\varpi\succ 0\\ \varpi\equiv\alpha_j \bmod \mathfrak{A}}}\Lambda_j(\varpi)\exp\Big\{-\sum_{q=1}^{n}|\varpi^{(q)}|w_q+2\pi i\sum_{q=1}^{n}\varpi^{(q)}z_q\Big\}.$$

Dann ist

$$\prod_{j=1}^{m}f(w,z;\Lambda_j)=\sum_{\mu\succ 0}A_m(\mu;w)\,e^{2\pi i\sum_{q=1}^{n}\mu^{(q)}z_q}$$

mit

$$(6.13)\qquad A_m(\mu;w)=\sum_{\substack{\varpi_1+\ldots+\varpi_m=\mu\\ \varpi_j\equiv\alpha_j \bmod \mathfrak{A}\\ \varpi_j\succ 0}}\Lambda_1(\varpi_1)\ldots\Lambda_m(\varpi_m)\,e^{-\sum_{q=1}^{n}(|\varpi_1^{(q)}|+\ldots+|\varpi_m^{(q)}|)w_q}$$

Es sei $(\omega_1,\ldots\omega_n)$ eine Basis von $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ und $x_1,\ldots x_n$ seien *reelle* Variable; die Variablen

$$(6.14)\qquad z_q=\sum_{l=1}^{n}\omega_l^{(q)}x_l$$

erfüllen dann die in (5.13) den z_q auferlegten Bedingungen. Ferner sei ν eine *totalpositive* Körperzahl. Wir bilden dann

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{j=1}^{m} f(w, z; \Lambda_j) \cdot e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} \nu^{(q)} z_q} \, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{\mu \succ 0} A_m(\mu; w) \, e^{2\pi i \sum_{q=1}^{n} (\mu^{(q)} - \nu^{(q)}) \sum_{l=1}^{n} \omega_l^{(q)} x_l} \, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{\mu \succ 0} A_m(\mu; w) \, e^{2\pi i \sum_{l=1}^{n} x_l S((\mu - \nu)\omega_l)} \, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \sum_{\mu \succ 0} A_m(\mu; w) \prod_{l=1}^{n} \int_0^1 e^{2\pi i x_l S((\mu-\nu)\omega_l)} \, dx_l .$$

Da nun nur für $\mu = \nu$ die n Gleichungen

$$S((\mu - \nu)\omega_l) = 0 \qquad (l = 1, 2, \dots, n)$$

erfüllt sind, und stets $S((\mu - \nu)\omega_l)$ eine ganze rationale Zahl ist, so folgt

$$A_m(\nu; w) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{j=1}^{m} f(w, z; \Lambda_j) \cdot e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} \nu^{(q)} z_q} \, dx_1 \dots dx_n . \tag{6.15}$$

Wir setzen von nun an

$$w_q = |\nu^{(q)}|^{-1} . \tag{6.16}$$

Nach (6.13) ist dann

$$A_m(\nu) = A_m\left(\nu; \frac{1}{|\nu|}\right)$$

$$= \sum_{\substack{\varpi_1 + \dots + \varpi_m = \nu \\ \varpi_j \equiv a_j \bmod \mathfrak{A} \\ \varpi_j \succ 0}} \Lambda_1(\varpi_1) \dots \Lambda_m(\varpi_m) \cdot e^{-\sum_{q=1}^{n} \frac{|\varpi_1^{(q)}| + \dots + |\varpi_m^{(q)}|}{|\nu^{(q)}|}} . \tag{6.17}$$

Verstehen wir unter η eine Einheit $\bmod \mathfrak{A}$, so erkennen wir aus (6.17) leicht, daß

$$A_m(\nu) = A_m(\nu\eta) \tag{6.18}$$

ist. Es gibt nun zwei durch den Körper und das Ideal $\mathfrak{A}$ bestimmte *positive* Konstanten K_1 und K_2, so daß es zu jeder Körperzahl ν eine solche $\bmod \mathfrak{A}$ assoziierte ν^* gibt, so daß

$$K_1 |N(\nu)|^{\frac{1}{n}} < |\nu^{*(q)}| < K_2 |N(\nu)|^{\frac{1}{n}} \qquad (q = 1, 2, \dots, n)$$

gilt. Wegen (6.18) bedeutet es daher keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir bei der asymptotischen Bestimmung von $A_m(\nu)$ für ν nur solche totalpositiven ganzen ν annehmen, die

$$K_1 N(\nu)^{\frac{1}{n}} < |\nu^{(q)}| < K_2 N(\nu)^{\frac{1}{n}} \tag{6.19}$$

erfüllen.

6.2. Wir führen nun die in **2.1** dargelegte Fareyzerschneidung ein und zwar mit

$$M = N(\nu)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.21}$$

Wir bemerken vorher noch, daß dem Integrationsbereich der $x_1, \dots x_n$ in (6.15) durch die Transformation (6.14) ein Bereich der $z_1, \dots z_n$ entspricht, der in Hilfssatz 4 mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet ist und der dort in das System der $\mathfrak{F}_\gamma$ für $\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{d}}$ zerlegt ist.

Indem wir uns die zunächst nur in der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ der z_q definierte Fareyzerschneidung durch die Transformation (6.14) auf den Raum der x_l übertragen denken, wobei $\mathfrak{F}_\gamma$ in $\mathfrak{F}'_\gamma$ übergehen möge, erhalten wir aus (6.15)

$$A_m(\nu) = \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{d}} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} \int\dots\int_{\mathfrak{F}'_\gamma} \prod_{j=1}^{m} f(|\nu|^{-1}, z; \Lambda_j) \cdot e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} \nu^{(q)} z_q} \, dx_1 \dots dx_n$$

und mit der Substitution (5.16)

$$A_m(\nu) = \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{d}} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} e^{-2\pi i S(\gamma\nu)} \int\dots\int_{\mathfrak{F}'_\gamma} \prod_{j=1}^{m} f(|\nu|^{-1}, y+\gamma; \Lambda_j) \cdot e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} \nu^{(q)} y_q} \, dx_1 \dots dx_n,$$

wo unter $\mathfrak{a}$ wie bisher der Nenner von $\gamma\mathfrak{d}$ verstanden ist. Folglich ist

$$\left| A_m(\nu) - \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{d}} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} e^{-2\pi i S(\gamma\nu)} \int\dots\int_{\mathfrak{F}'_\gamma} \prod_{j=1}^{m} \Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j) \cdot e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} \nu^{(q)} y_q} \, dx_1 \dots dx_n \right|$$

$$= \left| \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{d}} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} e^{-2\pi i S(\gamma\nu)} \int\dots\int_{\mathfrak{F}'_\gamma} \left(\prod_{j=1}^{m} f(|\nu|^{-1}, y+\gamma; \Lambda_j) - \prod_{j=1}^{m} \Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j) \right) \right. \tag{6.22}$$

$$\left. \times e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} \nu^{(q)} y_q} \, dx_1 \dots dx_n \right|$$

$$\leqq \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} \int\dots\int_{\mathfrak{F}'_\gamma} \Big| \prod_{j=1}^{m} f(|\nu|^{-1}, \gamma+y; \Lambda_j)$$

$$- \Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j) \prod_{j=2}^{m} f(|\nu|^{-1}, \gamma+y; \Lambda_j) \Big| dx_1 \dots dx_n$$

$$+ \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} \int\dots\int_{\mathfrak{F}'_\gamma} \Big| \Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_1) \prod_{j=2}^{m} f(|\nu|^{-1}, \gamma+y; \Lambda_j)$$

(6.22)

$$- \prod_{j=1}^{2} \Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j) \cdot \prod_{j=3}^{m} f(|\nu|^{-1}, \gamma+y; \Lambda_j) \Big| dx_1 \dots d$$

$$+ \dots\dots\dots\

Ähnlich folgern wir aus (5.96)

$$|\Phi_a(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j)| < \frac{CN(\nu)}{\varphi(a)} \prod_{q=1}^{r_1} \left(1 + \frac{2\pi|y_q|}{w_q}\right)^{-1} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \left(1 + \frac{4\pi^2|y_p|^2}{w_p^2}\right)^{-1}$$

$$\times \left(1 + N(\nu)^{-\frac{1}{2}} \prod_{q=1}^{r_1} \left(1 + \frac{2\pi|y_q|}{w_q}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \left(1 + \frac{4\pi^2|y_p|^2}{w_q^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

und wegen (6.23)

$$|\Phi_a(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j)| < \frac{CN(\nu)}{\varphi(a)} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{1}{1+2\pi|\nu^{(q)}||y_q|} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{1+4\pi^2|\nu^{(p)}|^2|y_p|^2} \tag{6.25}$$

für $\gamma + y$ innerhalb $\mathfrak{F}_\gamma$.

Aus (6.22) und (6.24) erhalten wir

$$\left|A_m(\nu) - \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b} \\ N(a) \leqq M}} e^{-2\pi i S(\gamma\nu)} \int\limits_{\mathfrak{F}_\gamma'} \cdots \int \prod_{j=1}^{m} \Phi_a(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j) \cdot e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} \nu^{(q)} y_q} dx_1 \ldots dx_n\right|$$

$$< CN(\nu)^{\Theta + \frac{1}{4} + 2\varepsilon} \Bigg\{ \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b} \\ N(a) \leqq M}} \int\limits_{\mathfrak{F}_\gamma'} \cdots \int \left| \prod_{j=2}^{m} f(|\nu|^{-1}, \gamma + y; \Lambda_j) \right| dx_1 \ldots dx_n$$

26)

$$+ \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b} \\ N(a) \leqq M}} \int\limits_{\mathfrak{F}_\gamma'} \cdots \int \left| \Phi_a(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_1) \cdot \prod_{j=3}^{m} f(|\nu|^{-1}, \gamma + y; \Lambda_j) \right| dx_1 \ldots dx_n$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b} \\ N(a) \leqq M}} \int\limits_{\mathfrak{F}_\gamma'} \cdots \int \left| \prod_{j=1}^{m-1} \Phi_a(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j) \right| dx_1 \ldots dx_n \Bigg\}.$$

6.3. Ehe wir die Ungleichung (6.26) weiter ausnützen können, müssen wir noch zwei Abschätzungen von f durchführen.

Wir erhalten, indem wir die Stücke der Fareyzerschneidung wieder zusammenfügen,

$$\sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b} \\ N(a) \leqq M}} \int\limits_{\mathfrak{F}_\gamma'} \cdots \int |f(|\nu|^{-1}, \gamma + y; \Lambda_j)|^2 \, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(|\nu|^{-1}, \gamma + y; \Lambda_j)|^2 \, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{\substack{\varpi \succ 0 \\ \varpi \equiv a_j \bmod \mathfrak{A}}} A_j(\varpi) \exp\left\{ -\sum_{q=1}^{n} \left| \frac{\varpi^{(q)}}{\nu^{(q)}} \right| + 2\pi i \sum_{q=1}^{n} \varpi^{(q)} z_q \right\}$$

$$\times \sum_{\substack{\varpi_* \succ 0 \\ \varpi_* \equiv a_j \bmod \mathfrak{A}}} \bar{A}_j(\varpi_*) \exp\left\{ -\sum_{q=1}^{n} \left| \frac{\varpi_*^{(q)}}{\nu^{(q)}} \right| - 2\pi i \sum_{q=1}^{n} \varpi_*^{(q)} z_q \right\} dx_1 \dots dx_n .$$

Zufolge den bei der Herleitung von (6.15) gemachten Überlegungen bleiben hier nach der Vertauschung der Summation mit der Integration nur die Glieder mit $\varpi = \varpi_*$ stehen, so daß

$$\sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b} \\ N(a) \leqq M}} \int \dots \int_{\mathfrak{F}'_\gamma} |f(|\nu|^{-1}, \gamma + y; A_j)|^2 \, dx_1 \dots dx_n$$

$$(6.31) \qquad = \sum_{\substack{\varpi \succ 0 \\ \varpi \equiv a_j \bmod \mathfrak{A}}} \exp\left\{ -2 \sum_{q=1}^{n} \left| \frac{\varpi^{(q)}}{\nu^{(q)}} \right| \right\} \leqq \sum_{\varpi \succ 0} \exp\left\{ -2 \sum_{q=1}^{n} \left| \frac{\varpi^{(q)}}{\nu^{(q)}} \right| \right\}$$

herauskommt. Verstehen wir wieder unter $\xi, \eta_1, \dots \eta_r$ das in (2.412) angegebene System von Grundeinheiten mod 1, so ist auf Grund von (3.312), Hilfssatz 14, und nach den im Anfang von **5.3** ausgeführten Schlüssen:

$$\sum_{\varpi \succ 0} \exp\left\{ -2 \sum_{q=1}^{n} |\varpi^{(q)}| w_q \right\}$$

$$= \sum_{\substack{(\varpi)_1 \\ \varpi \succ 0}} \sum_{b=1}^{\frac{w_*}{b_*}} \sum_{\substack{b_1 \dots b_r \\ -\infty}}^{+\infty} \exp\left\{ -\sum_{q=1}^{n} |\eta_1^{(q) b_1} \dots \eta_r^{(q) b_r}| \, 2 \, |\varpi^{(q)}| w_q \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{w_*}{b_*} \frac{2^{r_2}}{R_1} \sum_{\substack{(\varpi)_1 \\ \varpi \succ 0}} \sum_{\substack{m_1 \dots m_r \\ -\infty}}^{+\infty} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\Gamma(e_q s + i v_q)}{(2 \, |\varpi^{(q)}| \, w_q)^{e_q s + i v_q}}$$

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{(4 \, |\varpi^{(p)}| \, w_p)^{e_p s + i v_p}} \Gamma(e_p s + i v_p) \, F\left(\frac{e_p s + i v_p}{2}, \frac{1 - e_p s - i v_p}{2}; 1; 0 \right) ds,$$

mit $a_{r_1+1} = \dots = a_n = 0$, was durch das Verschwinden der in (3.312) mit z_p bezeichneten Variablen zustande kommt. Hierin hat die hypergeometrische Funktion den Wert 1. Aus bekannten Abschätzungen der Γ-Funktion erhält man somit

$$\sum_{\varpi \succ 0} \exp\left\{-2\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\varpi^{(q)}}{\nu^{(q)}}\right|\right\}$$

$$< CN(\nu)^{\sigma_0}\sum_{(\varpi)_1}\frac{1}{|N(\varpi)|^{\sigma_0}}\sum_{\substack{m_1\dots m_r\\ -\infty}}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{q=1}^{r_1} e^{-\frac{\pi}{2}|t+v_q|}(1+|t+v_q|)^{\sigma_0-\frac{1}{2}}$$

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} e^{-\frac{\pi}{2}|2t+v_p|}(1+|2t+v_p|)^{2\sigma_0-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Hierin konvergieren die Summe nach den m_k samt dem uneigentlichen Integral nach **5.4**, wobei jetzt die Bedingung $a_{r_1+1}=\dots=a_n=0$ zu bedenken ist. Daher ist

$$\sum_{\varpi \succ 0} \exp\left\{-2\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\varpi^{(q)}}{\nu^{(q)}}\right|\right\} < CN(\nu)^{\sigma_0}\sum_{(\varpi)_1}\frac{1}{|N(\varpi)|^{\sigma_0}}. \tag{6.32}$$

Damit die Summe nach $(\varpi)_1$ konvergiert, muß $\sigma_0 > 1$ genommen werden. Somit erhalten wir schließlich aus (6.31) und (6.32)

$$\sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b}\\ N(a)\leqq M}}\int\dots\int_{\mathfrak{F}_\gamma'}|f(|\nu|^{-1},\gamma+y;\Lambda_j)|^2\,dx_1\dots dx_n < CN(\nu)^{1+\varepsilon}. \tag{6.33}$$

Ferner haben wir nach (6.12)

$$|f(|\nu|^{-1},z;\Lambda_j)| \leqq \sum_{\varpi \succ 0}\exp\left\{-\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\varpi^{(q)}}{\nu^{(q)}}\right|\right\},$$

und folglich nach (6.32), wenn man sich dort ν durch 2ν ersetzt denkt, für $\sigma_0 = 1+\varepsilon$:

$$|f(|\nu|^{-1},z;\Lambda_j)| < CN(\nu)^{1+\varepsilon}. \tag{6.34}$$

6.4. In (6.26) unterscheiden wir auf der rechten Seite drei Typen von Summen: die erste, die letzte und die übrigen. Wir nehmen von nun an

$$m \geqq 3 \tag{6.41}$$

an. Dann ist nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, zuerst auf die Integrale, dann auf die Summen angewandt:

$$\left\{\sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b}\\ N(a)\leqq M}}\int\dots\int_{\mathfrak{F}_\gamma'}\left|\prod_{j=2}^{m} f(|\nu|^{-1},\gamma+y;\Lambda_j)\right|dx_1\dots dx_n\right\}^2$$

$$\leqq\left\{\sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b}\\ N(a)\leqq M}}\sqrt{\int\dots\int_{\mathfrak{F}_\gamma'}|f(|\nu|^{-1},\gamma+y;\Lambda_2)|^2\,dx_1\dots dx_n}\times\right.$$

$$\times \sqrt{\int\cdots\int_{\mathfrak{F}_\gamma'} \prod_{j=3}^{m} |f(|\nu|^{-1}, \gamma+y; \Lambda_j)|^2 \, dx_1 \ldots dx_n}\Bigg\}^2$$

$$\leqq \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} \int\cdots\int_{\mathfrak{F}_\gamma'} |f(|\nu|^{-1}, \gamma+y; \Lambda_2)|^2 \, dx_1 \ldots dx_n$$

$$\times \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} \int\cdots\int_{\mathfrak{F}_\gamma'} \prod_{j=3}^{m} |f(|\nu|^{-1}, \gamma+y; \Lambda_j)|^2 \, dx_1 \ldots dx_n$$

und folglich wegen (6.33) und (6.34)

$$(6.42) \quad \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} \int\cdots\int_{\mathfrak{F}_\gamma'} \Big| \prod_{j=2}^{m} f(|\nu|^{-1}, \gamma+y; \Lambda_j) \Big| \, dx_1 \ldots dx_n < C N(\nu)^{(m-2)(1+\varepsilon)}.$$

Für die letzte Summe in (6.26) gilt wegen (6.25)

$$\sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} \int\cdots\int_{\mathfrak{F}_\gamma'} \Big| \prod_{j=1}^{m-1} \Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j) \Big| \, dx_1 \ldots dx_n$$

$$(6.43) \quad < C N(\nu)^{m-1} \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} \frac{1}{\varphi(\mathfrak{a})^{m-1}} \int\cdots\int_{\mathfrak{F}_\gamma'} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{1}{(1+2\pi |\nu^{(q)} y_q|)^{m-1}}$$

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{(1+4\pi^2 |\nu^{(p)} y_p|^2)^{m-1}} \, dx_1 \ldots dx_n.$$

In diesem Integral führen wir neue Variablen $u_1, \ldots u_n$ ein, und zwar

$$(6.44) \qquad \begin{aligned} u_q &= y_q \\ u_p &= \Re(y_p), \qquad u_{p+r_2} = \Im(y_p) \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} q = 1, \ldots r_1 \\ p = r_1+1, \ldots r_1+r_2 \end{pmatrix},$$

wodurch $\mathfrak{F}_\gamma'$ in $\mathfrak{F}_\gamma''$ übergehen möge.

Wegen (5.16) und (6.14) haben wir

$$y_q = \sum_{l=1}^{n} \omega_l^{(q)} x_l - \gamma^{(q)},$$

also wegen (6.43)

$$(6.45) \quad \left|\frac{\partial(u_1 \ldots u_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)}\right| = \text{absol. Betrag von} \begin{vmatrix} \omega_1^{(1)} & \ldots & \omega_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Re(\omega_1^{(r_1+1)}) & \ldots & \Re(\omega_n^{(r_1+1)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Im(\omega_1^{(r_1+1)}) & \ldots & \Im(\omega_n^{(r_1+1)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{r_2} |\sqrt{d}|}.$$

Durch diese Transformation der Integrationsvariablen ergibt sich

$$(6.46)\qquad \int\limits_{\mathfrak{F}_\gamma'}\cdots\int \prod_{q=1}^{r_1}\frac{1}{(1+2\pi|\nu^{(q)}y_q|)^{m-1}}\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\frac{1}{(1+4\pi^2|\nu^{(p)}y_p|^2)^{m-1}}\,dx_1\dots dx_n$$

$$= 2^{r_2}|\sqrt{d}|\int\limits_{\mathfrak{F}_\gamma''}\cdots\int \prod_{q=1}^{r_1}\frac{1}{(1+2\pi|\nu^{(q)}u_q|)^{m-1}}\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\frac{1}{(1+4\pi^2|\nu^{(p)}|^2(u_p^2+u_{p+r_2}^2))}\,dx_1\dots dx_n$$

$$< CN(\nu)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int \prod_{q=1}^{r_1}\frac{1}{(1+U_q)^{m-1}}\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\frac{1}{(1+U_p^2+U_{p+r_2}^2)^{m-1}}\,dU_1\dots dU_n.$$

Wegen (6.41) ist hierin das Integral konvergent, das übrigens von ν unabhängig ist. Aus (6.43) und (6.46) erhalten wir

$$(6.47)\qquad \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}}\\ N(\mathfrak{a})\leqq M}}\int\limits_{\mathfrak{F}_\gamma'}\cdots\int\Big|\prod_{j=1}^{m-1}\Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1},y;\Lambda_j)\Big|\,dx_1\dots dx_n < CN(\nu)^{m-2}\sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}}\\ N(\mathfrak{a})\leqq M}}\frac{1}{\varphi(\mathfrak{a})^{m-1}}$$

$$\leqq CN(\nu)^{m-2}\sum_{N(\mathfrak{a})\leqq M}\frac{1}{\varphi(\mathfrak{a})} < CN(\nu)^{m-2}(\log N(\nu))^2,$$

letzteres wegen (6.21) und $\varphi(\mathfrak{a}) > C\dfrac{N(\mathfrak{a})}{\log(N(\mathfrak{a})+1)}$.

Die übrigen Summen rechts in (6.26) behandeln wir wieder mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung; sie gehen für $l=2,\dots m-1$ aus der folgenden hervor:

$$\left\{\sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}}\\ N(\mathfrak{a})\leqq M}}\int\limits_{\mathfrak{F}_\gamma'}\cdots\int\prod_{j=1}^{l-1}|\Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1},y;\Lambda_j)|\cdot\prod_{j=l+1}^{m}|f(|\nu|^{-1},\gamma+y;\Lambda_j)|\,dx_1\dots dx_n\right\}^2$$

$$\leqq\left\{\sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}}\\ N(\mathfrak{a})\leqq M}}\sqrt{\int\limits_{\mathfrak{F}_\gamma'}\cdots\int\prod_{j=1}^{l-1}|\Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1},y;\Lambda_j)|^2\,dx_1\dots dx_n}\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\int\limits_{\mathfrak{F}_\gamma'}\cdots\int\prod_{j=l+1}^{m}|f(|\nu|^{-1},\gamma+y;\Lambda_j)|^2\,dx_1\dots dx_n}\right\}^2$$

$$\leqq\sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}}\\ N(\mathfrak{a})\leqq M}}\int\limits_{\mathfrak{F}_\gamma'}\cdots\int\prod_{j=1}^{l-1}|\Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1},y;\Lambda_j)|^2\,dx\dots dx_n$$

$$\times\sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}}\\ N(\mathfrak{a})\leqq M}}\int\limits_{\mathfrak{F}_\gamma'}\cdots\int\prod_{j=l+1}^{m}|f(|\nu|^{-1},\gamma+y;\Lambda_j)|^2\,dx_1\dots dx_n.$$

Wird hierin der erste Faktor wie die Summe (6.43) behandelt, so hat man im Ergebnis (6.47) nur $m-1$ durch $2(l-1)$ zu ersetzen; die Überlegungen bleiben sonst gültig, da $2(l-1) \geqq 2$ ist. Auf den zweiten Faktor wenden wir (6.33) und (6.34) an und erhalten schließlich

$$\begin{aligned}(6.48)\qquad &\sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} \int\cdots\int_{\mathfrak{F}_\gamma'} \prod_{j=1}^{l-1} |\Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j)| \cdot \prod_{j=l+1}^{m} |f(|\nu|^{-1}, \gamma+y; \Lambda_j)|\, dx_1 \ldots dx \\ &< CN(\nu)^{\frac{2(l-1)-1}{2}} \log N(\nu) \cdot N(\nu)^{\frac{2(m-l-1)+1}{2}(1+\varepsilon)} < CN(\nu)^{(m-2)(1+\varepsilon)}\end{aligned}$$

Tragen wir (6.42), (6.47) und (6.48) in (6.26) ein, so entsteht

$$\begin{aligned}(6.49)\qquad &\Big| A_m(\nu) - \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} e^{-2\pi i S(\gamma\nu)} \int\cdots\int_{\mathfrak{F}_\gamma'} \prod_{j=1}^{m} \Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j) \cdot e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} \nu^{(q)} y_q} dx_1 \ldots d \\ &< CN(\nu)^{m-1+(\Theta-\frac{3}{4})+m\varepsilon}.\end{aligned}$$

6.5. Wir schätzen nun den Fehler ab, den wir begehen, wenn wir in (6.49) jedes Integral über den ganzen unendlichen n-dimensionalen Raum statt nur über $\mathfrak{F}_\gamma'$ erstrecken. Es sei $\mathfrak{E}_\gamma'$ das Reststück, das nach Wegnahme von $\mathfrak{F}_\gamma'$ aus dem unendlichen n-dimensionalen Raum der $x_1, \ldots x_n$ übrigbleibt, also

$$\begin{aligned}(6.51)\qquad &\Big| \int\cdots\int_{\mathfrak{F}_\gamma'} \prod_{j=1}^{m} \Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j) \cdot e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} \nu^{(q)} y_q} dx_1 \ldots dx_n \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int \prod_{j=1}^{m} \Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j) \cdot e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} \nu^{(q)} y_q} dx_1 \ldots dx_n \Big| \\ &\leqq \int\cdots\int_{\mathfrak{E}_\gamma'} \prod_{j=1}^{m} |\Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j)|\, dx_1 \ldots dx_n.\end{aligned}$$

Wegen (5.96) haben wir, indem wir gleich noch die Variablentransformation (6.44) einführen,

$$\begin{aligned}&\int\cdots\int_{\mathfrak{E}_\gamma'} \prod_{j=1}^{m} |\Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j)|\, dx_1 \ldots dx_n \\ (6.52)\qquad &< \frac{C}{\varphi(\mathfrak{a})^m} N(\nu)^m \int\cdots\int_{\mathfrak{E}_\gamma''} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{1}{\left(1+\frac{2\pi|u_q|}{w_q}\right)^m} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{\left(1+\frac{4\pi^2(u_p^2+u_{p+r_2}^2)}{w_p^2}\right)^m} du_1 \ldots d \\ &+ \frac{C}{\varphi(\mathfrak{a})^m} N(\nu)^{\frac{m}{2}} \int\cdots\int_{\mathfrak{E}_\gamma''} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{1}{\left(1+\frac{2\pi|u_q|}{w_q}\right)^{\frac{m}{2}}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{\left(1+\frac{4\pi^2(u_p^2+u_{p+r_2}^2)}{w_p^2}\right)^{\frac{m}{2}}} du_1 \ldots d\end{aligned}$$

wobei wir die Abkürzung (6.16) benutzt haben. Es handelt sich also um zwei Ausdrücke von dem Typ

$$J_k = N(\nu)^k \int\limits_{\mathfrak{E}_\gamma''} \cdots \int \prod_{q=1}^{r_2} \frac{1}{\left(1+\frac{2\pi|u_q|}{w_q}\right)^k} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{\left(1+\frac{4\pi^2(u_p^2+u_{p+\gamma_2}^2)}{w_p^2}\right)^k} du_1 \ldots du_n \tag{6.531}$$

für $k=\frac{m}{2}$ und $k=m$; wegen $m \geqq 3$ ist $k \geqq \frac{3}{2}$ vorauszusetzen. Dabei ist wegen (2.16), (2.18), (5.16) für $\gamma+y$ in $\mathfrak{F}_\gamma$

$$\prod_{q=1}^{n} \left(1+M^{\frac{2}{n}}|y^{(q)}|\right) > C\frac{M}{N(\mathfrak{a})}$$

und folglich wegen (6.16), (6.19), (6.21) in $\mathfrak{E}_\gamma''$

$$\prod_{q=1}^{r_1}\left(1+\frac{2\pi|u_q|}{w_q}\right) \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\left(1+\frac{2\pi\sqrt{u_p^2+u_{p+r_2}^2}}{w_p}\right)^2 > C\frac{M}{N(\mathfrak{a})}$$

und also gleichfalls in $\mathfrak{E}_\gamma''$:

$$\prod_{q=1}^{r_1}\left(1+\frac{2\pi|u_q|}{w_q}\right) \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\left(1+\frac{4\pi^2(u_p^2+u_{p+r_2}^2)}{w_p^2}\right) > C\frac{M}{N(\mathfrak{a})}. \tag{6.532}$$

Durch Einführung neuer Variablen erhalten wir aus (6.531) und (6.532)

$$J_k < C N(\nu)^{k-1} \int\limits_{\mathfrak{E}_\gamma^*} \cdots \int \prod_{q=1}^{r_1} \frac{1}{(1+|u_q^*|)^k} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{(1+u_p^{*2}+u_{p+r_2}^{*2})^k} du_1^* \ldots du_n^*,$$

wo $\mathfrak{E}_\gamma^*$ charakterisiert wird durch

$$\prod_{q=1}^{r_1}(1+|u_q^*|) \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}(1+u_p^{*2}+u_{p+r_2}^{*2}) > C\frac{M}{N(\mathfrak{a})}.$$

Setzen wir hierin

$$u_p^{*2}+u_{p+r_2}^{*} = R_p^2$$

$$u_p^* = R\cos\varphi_p, \qquad u_{p+r_2}^* = R\sin\varphi_p \qquad (p=r_1+1,\ldots r_1+r_2),$$

und führen die Integrationen nach den φ_p gleich aus, so finden wir

$$J_k < C N(\nu)^{k-1} \int\limits_{\mathfrak{B}_\gamma} \cdots \int \prod_{q=1}^{r_1} \frac{1}{(1+|u_q^*|)^k} \times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{(1+R_p^2)} du_1^* \ldots du_{r_1}^* R_{r_1+1} dR_{r_1+1} \ldots R_{r_1+r_2} dR_{r_1+r_2}$$

über den Bereich $\mathfrak{B}_\gamma$

$$\prod_{q=1}^{r_1}(1+|u_q^*|)\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}(1+R_p^2)>C\frac{M}{N(a)}.$$

Durch die Substitution

$$|u_q^*|=U_q \qquad (q=1,\dots r_1),$$
$$R_p^2=U_p \qquad (p=r_1+1,\dots r_1+r_2)$$

ergibt sich endlich

$$(6.541)\qquad J_k<CN(\nu)^{k-1}\int_{\mathfrak{C}_\gamma}\cdots\int\prod_{q=1}^{r_1+r_2}\frac{1}{(1+U_q)^k}\,dU_1\dots dU_{r_1+r_2}$$

über den Bereich $\mathfrak{C}_\gamma$

$$(6.542)\qquad \prod_{q=1}^{r_1+r_2}(1+U_q)>C\frac{M}{N(a)}=P,\qquad U_q\geqq 0$$

erstreckt, wo P vorübergehend zur Abkürzung eingeführt sei. Die Konvergenz des Integrals ist wegen $k\geqq\frac{3}{2}$ gesichert. Somit ist

$$J_k<CN(\nu)^{k-1}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\prod_{q=2}^{r_1+r_2}\frac{1}{(1+U_q)^k}\left\{\int_{U_1}\frac{dU_1}{(1+U_1)^k}\right\}dU_2\dots dU_{r_1+r_2},$$

worin das innere Integral gemäß (6.542) über den Bereich

$$U_1\geqq 0,\qquad 1+U_1>\frac{P}{\prod_{q=2}^{r_1+r_2}(1+U_q)}$$

zu erstrecken ist. Folglich ist das innere Integral

$$\int_{U_1}\frac{dU_1}{(1+U_1)^k}=\begin{cases}\dfrac{1}{k-1} & \text{für } \dfrac{P}{\prod_{q=2}^{r_1+r_2}(1+U_q)}<1,\\[2ex] \dfrac{1}{k-1}\left(\dfrac{\prod_{q=2}^{r_1+r_2}(1+U_q)}{P}\right)^{k-1} & \text{für } \dfrac{P}{\prod_{q=2}^{r_1+r_2}(1+U_q)}\geqq 1,\end{cases}$$

und daher

$$J_k<CN(\nu)^{k-1}\int_{\substack{\prod_{q=2}^{r_1+r_2}(1+U_q)>P\\ U_q\geqq 0}}\cdots\int\prod_{q=2}^{r_1+r_2}\frac{1}{(1+U_q)^k}\,dU_2\dots dU_{r_1+r_2}$$
$$+CN(\nu)^{k-1}\int_{\substack{\prod_{q=2}^{r_1+r_2}(1+U_q)\leqq P\\ U_q\geqq 0}}\cdots\int\frac{1}{P^{k-1}}\prod_{q=2}^{r_1+r_2}\frac{1}{1+U_q}\,dU_2\dots dU_{r_1+r_2}.$$

Hierin ist der letzte Summand kleiner als

$$C\left(\frac{N(\nu)}{P}\right)^{k-1} \prod_{q=2}^{r_1+r_2} \int_{U_q=0}^{P} \frac{dU_q}{1+U_q} = C\left(\frac{N(\nu)}{P}\right)^{k-1} (\log(P+1))^{r_1+r_2-1}$$

und nach (6.542) und (6.21) kleiner als

$$C N(\nu)^{\frac{k-1}{2}} N(\mathfrak{a})^{k-1} (\log(1+N(\nu)))^{r_1+r_2-1}.$$

Im ganzen ist also

$$(6.55) \quad J_k < C N(\nu)^{k-1} \int\limits_{\substack{\prod_{q=2}^{r_1+r_2}(1+U_q)>P \\ U_p \geqq 0}} \cdots \int \prod_{q=2}^{r_1+r_2} \frac{1}{(1+U_q)^k}\, dU_2 \ldots dU_{r_1+r_2} + C N(\nu)^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon} N(\mathfrak{a})^{k-1}.$$

Das in (6.55) auftretende Integral ist, sowohl in seinem Integranden als auch in seinem Integrationsbereich, von dem gleichen Bau wie das Integral in (6.541), ist aber um eine Dimension niedriger als dieses. Durch Wiederholung des eben durchgeführten Verfahrens gelangt man schließlich zu

$$J_k < C N(\nu)^{k-1} \int\limits_{\substack{1+U_{r_1+r_2}>P \\ U_{r_1+r_2} \geqq 0}} \frac{1}{(1+U_{r_1+r_2})^k}\, dU_{r_1+r_2} + C N(\nu)^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon} N(\mathfrak{a})^{k-1}$$

und daher nach (6.542) und (6.21) zu

$$(6.56) \qquad J_k < C N(\nu)^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon} N(\mathfrak{a})^{k-1}.$$

Nach (6.52), (6.531), (6.56) haben wir also

$$\int\limits_{\mathfrak{E}'_\gamma} \cdots \int \prod_{j=1}^{m} |\Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j)|\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$< \frac{C}{\varphi(\mathfrak{a})} N(\nu)^{\frac{m-1}{2}+\varepsilon} N(\mathfrak{a})^{\varepsilon} + \frac{C}{\varphi(\mathfrak{a})} N(\nu)^{\frac{m-2}{4}+\varepsilon} \frac{N(\mathfrak{a})^{\varepsilon}}{N(\mathfrak{a})^{\frac{m}{2}}}$$

$$< \frac{C}{\varphi(\mathfrak{a})} N(\nu)^{\frac{m-1}{2}+\varepsilon} N(\mathfrak{a})^{\varepsilon}$$

und somit

$$(6.57)\qquad \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} \int \cdots \int_{\mathfrak{E}'_\gamma} \prod_{j=1}^{m} |\Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j)|\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$< C \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} \frac{1}{\varphi(\mathfrak{a})} N(\nu)^{\frac{m-1}{2}+\varepsilon} N(\mathfrak{a})^{\varepsilon}$$

$$< C N(\nu)^{\frac{m-1}{2}+2\varepsilon} \sum_{\substack{\mathfrak{a} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} 1$$

$$< C N(\nu)^{\frac{m}{2}+2\varepsilon},$$

letzteres wegen (6. 21). Bedenken wir noch, daß wegen $m \geqq 3$, $\Theta \geqq \frac{1}{2}$ gewiß

$$m - 1 + \left(\Theta - \frac{3}{4}\right) + m\varepsilon > \frac{m}{2} + 2\varepsilon$$

ist, so folgt auf Grund von (6. 51) aus (6. 49) und (6. 57)

$$(6.58)\qquad |A_m(\nu) - B_m(\nu)| < C N(\nu)^{m-1+\left(\Theta-\frac{3}{4}\right)+m\varepsilon},$$

worin

$$(6.59)\quad B_m(\nu) = \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}} \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} e^{-2\pi i S(\gamma\nu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \prod_{j=1}^{m} \Phi_{\mathfrak{a}}(|\nu|^{-1}, y; \Lambda_j)\, e^{-2\pi i \prod_{q=1}^{n} \nu^{(q)} y_q}\, dx_1 .$$

gesetzt worden ist.

6.6. Durch Einsetzen von (5. 94) und (5. 72) in (6. 59) geht hervor

$$(6.61)\qquad B_m(\nu) = \left(\frac{2^{r_2} w_*}{2^{r_1} h R \varphi(\mathfrak{A})}\right)^m \sum_{\substack{\mathfrak{a} \\ \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}, \mathfrak{t}\right)=1 \\ N(\mathfrak{a}) \leqq M}} \left(\frac{\mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}\right)}{\varphi\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}\right)}\right)^m \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}} \\ \mathfrak{a}=\text{Nenner von } \gamma\mathfrak{b}}} e^{2\pi i S(\gamma(\varkappa \sum a_j - \nu))}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \prod_{j=1}^{m} \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} P_{\Lambda_j}(\sigma_j; |\nu|^{-1}, y)\, d\sigma_j \right] \cdot e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} \nu^{(q)} y_q}\, dx_1 \ldots dx_n .$$

Hierin ist der aus Integralen bestehende Faktor unabhängig von γ, also auch von $\mathfrak{a}$[32]); wir betrachten ihn zunächst.

---

[32]) Die Abhängigkeit von γ, die beim Ausdrücken der y durch die x mittelst (5. 16) und (6. 14) auftritt, ist nur *scheinbar*, da sie auf eine Translation im Raume der $x_1, \ldots x_n$ herauskommt, die bei dem über den Gesamtraum erstreckten Integral nichts ausmacht.

Nach (5.69) ist nun

$$P_A(\sigma; |\nu|^{-1}, y)$$

$$= \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\Gamma(e_q\sigma - iV_q)}{(|\nu^{(q)}|^{-1} - 2\pi i y_q)^{e_q\sigma - iV_q}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{(2\pi i y_p)^{A_{p+r_2}} (2\pi i y_{p+r_2})^{A_p}}{(|\nu^{(p)}|^{-2} + 4\pi^2 |y_p|^2)^{\frac{A_p + A_{p+r_2} + e_p\sigma - iV_p}{2}}}$$

$$\times G\left(e_p\sigma - iV_p,\ A_p + A_{p+r_2},\ \frac{4\pi^2 |y_p|^2}{|\nu^{(p)}|^{-2} + 4\pi^2 |y_p|^2}\right)$$

(6.62)
$$= \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\Gamma(e_q\sigma - iV_q)}{(1 - 2\pi i \nu^{(q)} y_q)^{e_q\sigma - iV_q}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{2\pi i \nu^{(p)} y_p)^{A_{p+r_2}} (2\pi i \nu^{(p+r_2)} y_{p+r_2})^{A_p}}{(1 + 4\pi^2 |\nu^{(p)} y_p|^2)^{\frac{A_p + A_{p+r_2} + e_p\sigma - iV_p}{2}}}$$

$$\times G\left(e_p\sigma - iV_p,\ A_p + A_{p+r_2},\ \frac{4\pi^2 |\nu^{(p)} y_p|^2}{1 + 4\pi^2 |\nu^{(p)} y_p|^2}\right)$$

$$\times N(\nu)^{\sigma} \prod_{q=1}^{r_1+r_2} |\nu^{(q)}|^{-iV_q} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{\nu^{(p)}}{|\nu^{(p)}|}\right)^{A_p}$$

$$= N(\nu)^{\sigma} A(\nu) P_A(\sigma; 1, \nu y).$$

Setzen wir

(6.631)
$$\nu^{(q)} y_q = Y_q,$$

so hängen die Y_q nach (5.16) und (6.14) mit den x durch die Transformation

(6.632)
$$Y_q = \nu^{(q)} \sum_{l=1}^{n} \omega_l^{(q)} x_l - \nu^{(q)} \gamma^{(q)}$$

zusammen. Aus (6.62) und (6.631) ergibt sich dann

(6.64)
$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \prod_{j=1}^{m} \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} P_{A_j}(\sigma_j; |\nu|^{-1}, y)\, d\sigma_j\right] \cdot e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} \nu^{(q)} y_q}\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \prod_{j=1}^{m} A_j(\nu) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \prod_{j=1}^{m} \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_j} P_{A_j}(\sigma_j; 1, Y)\, d\sigma_j\right] e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} Y_q}\, dx_1 \dots dx_n.$$

Hierin führen wir neue Integrationsvariablen ein durch

(6.651)
$$\begin{aligned} U_q &= Y_q && (q = 1, \dots, r_1) \\ U_p &= \Re(Y_p) \\ U_{p+r_2} &= \Im(Y_p) && (p = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2). \end{aligned}$$

Nach (6.632) und (6.651) ist die Funktionaldeterminante

(6.652)
$$\left|\frac{\partial(U_1, \dots, U_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right| = \frac{N(\nu)}{2^{r_2} |\sqrt{d}|},$$

wie eine einfache Rechnung zeigt. Statt des in (6.64) auftretenden Produktes von m Integralen nach den σ_j führen wir ein m-faches Integral ein, das wir dann noch mit dem n-fachen uneigentlichen Integral vertauschen. Aus (6.64), (6.651), (6.652) folgt somit

$$H = \frac{2^{r_2}|\sqrt{d}|}{N(\nu)} \prod_{j=1}^{m} \Lambda_j(\nu) \int_{\frac{1}{2}}^{1} \dots \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_1+\dots+\sigma_m} \tag{6.66}$$
$$\times \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \prod_{j=1}^{m} P_{\Lambda_j}(\sigma_j; 1, Y) \cdot e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} Y_q} \, dU_1 \dots dU_n \Big] d\sigma_1 \dots d\sigma_m.$$

Die schon erwähnte Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist hierin erlaubt, da sich aus (4.312) und (5.69) für $m \geqq 3$, $\frac{1}{2} \leqq \sigma_j \leqq 1$ ergibt

$$\Big| \prod_{j=1}^{m} P_{\Lambda_j}(\sigma_j; 1, Y) \Big| < C \prod_{q=1}^{r_1} \frac{1}{(1+2\pi|U_q|)^{\frac{3}{2}}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{1}{\left(1+4\pi^2(U_p^2+U_{p+r_2}^2)\right)^{\frac{3}{2}}},$$

womit die absolute und in den σ_j gleichmäßige Konvergenz des uneigentlichen Integrals bewiesen ist.

6.7. Setzen wir nun

$$G(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \prod_{j=1}^{m} P_{\Lambda_j}(\sigma_j; 1, Y) \cdot e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} Y_q} \, dU_1 \dots dU_n, \tag{6.71}$$

so ist $G(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ von ν unabhängig, und (6.66) geht über in

$$H = \frac{2^{r_2}|\sqrt{d}|}{N(\nu)} \prod_{j=1}^{m} \Lambda_j(\nu) \int_{\frac{1}{2}}^{1} \dots \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_1+\dots+\sigma_m} G(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \, d\sigma_1 \dots d\sigma_m. \tag{6.72}$$

Wir behaupten nun, daß für wachsende $N(\nu)$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \dots \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_1+\dots+\sigma_m} G(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \, d\sigma_1 \dots d\sigma_m \tag{6.73}$$
$$= G(1, 1, \dots, 1) \left(\frac{N(\nu)}{\log N(\nu)} \right)^m + O\left(\frac{N(\nu)^m}{\log N(\nu)^{m+1}} \right)$$

ist.

Es ist nämlich

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \dots \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_1+\dots+\sigma_m} G(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \, d\sigma_1 \dots d\sigma_m \tag{6.74}$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \dots \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_1+\dots+\sigma_{m-1}} \Big\{ \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_m} G(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \, d\sigma_m \Big\} d\sigma_1 \dots d\sigma_{m-1}$$

und darin

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_m} G(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)\, d\sigma_m = \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_m} G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, 1)\, d\sigma_m + \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_m} [G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, \sigma_m) - G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, 1)]\, d\sigma_m .$$

Nach dem Mittelwertsatze der Differentialrechnung ist

$$|G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, \sigma_m) - G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, 1)| < C(1 - \sigma_m),$$

also

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_m} G(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)\, d\sigma_m$$

$$= G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, 1) \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_m} d\sigma_m + O\Big(\int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_m} (1 - \sigma_m)\, d\sigma_m\Big)$$

$$= G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, 1)\, \frac{N(\nu)}{\log N(\nu)} + O\Big(\frac{N(\nu)}{(\log N(\nu))^2}\Big).$$

Dies in (6.74) eingesetzt, ergibt

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ldots \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_1 + \ldots + \sigma_m} G(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_m$$

$$= \frac{N(\nu)}{\log N(\nu)} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ldots \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_1 + \ldots + \sigma_{m-1}} G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, 1)\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_{m-1}$$

$$+ O\Big(\frac{N(\nu)}{(\log N(\nu))^2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ldots \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_1 + \ldots + \sigma_{m-1}}\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_{m-1}\Big) \tag{6.75}$$

$$= \frac{N(\nu)}{\log N(\nu)} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ldots \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\nu)^{\sigma_1 + \ldots + \sigma_{m-1}} G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, 1)\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_{m-1}$$

$$+ O\Big(\frac{N(\nu)^m}{\log N(\nu)^{m+1}}\Big).$$

Hiermit ist das m-fache Integral auf ein $(m-1)$-faches von gleichem Bau zurückgeführt. Durch Wiederholung des Verfahrens gelangt man von (6.75) zu der Behauptung (6.73).

Tragen wir (6.73) in (6.72) ein, so haben wir mit Hilfe von (6.71)

$$H = 2^{r_2} |\sqrt{d}|\, \frac{N(\nu)^{m-1}}{(\log N(\nu))^m} \prod_{j=1}^{m} \Lambda_j(\nu) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int \prod_{j=1}^{m} P_{\Lambda_j}(1; 1, Y)\, e^{-2\pi i \sum_{q=1}^{n} Y_q}\, dU_1 \ldots dU_n$$

$$+ O\Big(\frac{N(\nu)^{m-1}}{\log N(\nu)^{m+1}}\Big). \tag{6.76}$$

Die Bedeutung von H entnehmen wir aus (6.64) und erhalten dann aus (6.61) und (6.76)

$$B_m(\nu) = 2^{r_2}|\sqrt{d}|\left(\frac{2^{r_2}w_*}{2^{r_1}hR\varphi(\mathfrak{A})}\right)^m \frac{N(\nu)^{m-1}}{(\log N(\nu))^m}\prod_{j=1}^m \Lambda_j(\nu)$$

$$(6.77)\quad \times \sum_{\substack{\mathfrak{a} \\ \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}},\mathfrak{t}\right)=1 \\ N(\mathfrak{a})\leqq M}} \left(\frac{\mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}\right)}{\varphi\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}\right)}\right)^m \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}} \\ \gamma\mathfrak{b} \text{ mit} \\ \text{Nenner } \mathfrak{a}}} e^{2\pi i S(\gamma(\varkappa\sum\alpha_j-\nu))}\left\{T_m + O\left(\frac{1}{\log N(\nu)}\right)\right\}$$

mit der Abkürzung

$$(6.78)\qquad T_m = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\cdots\!\int \prod_{j=1}^m P_{\Lambda_j}(1;1,Y)\cdot e^{-2\pi i\sum_{q=1}^n Y_q}\, dU_1 \ldots dU_n.$$

Dieser Ausdruck ist durch die gegebenen $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ völlig bestimmt und kann daher als eine Konstante in unseren Rechnungen angesehen werden.

6.8. Der nächste Schritt besteht darin, die Summe in (6.77) über sämtliche $\mathfrak{a}$ zu erstrecken, statt nur über die mit kleinerer Norm als M, und den dadurch auftretenden Fehler abzuschätzen.

Die über alle $\mathfrak{a}$ erstreckte Summe ist für $m \geqq 3$ absolut konvergent, und zwar läßt der Rest der Reihe folgende Abschätzung zu:

$$\left|\sum_{\substack{\mathfrak{a} \\ \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}},\mathfrak{t}\right)=1 \\ N(\mathfrak{a})>M}} \left(\frac{\mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}\right)}{\varphi\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}\right)}\right)^m \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{\mathfrak{b}} \\ \gamma\mathfrak{b} \text{ mit} \\ \text{Nenner } \mathfrak{a}}} e^{2\pi i S(\gamma(\varkappa\sum\alpha_j-\nu))}\right|$$

$$(6.81)\quad \leqq \sum_{N(\mathfrak{a})>M} \frac{1}{\varphi\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}\right)^3}\varphi(\mathfrak{a}) < C\sum_{N(\mathfrak{a})>M}\frac{1}{\varphi(\mathfrak{a})^2}$$

$$< C\sum_{N(\mathfrak{a})>M}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^{2-2\varepsilon}} < CM^{-1+2\varepsilon} = CN(\nu)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Aus (6.58), (6.77) und (6.81) folgt nun

$$(6.82)\quad A_m(\nu) = 2^{r_2}|\sqrt{d}|\left(\frac{2^{r_2}w_*}{2^{r_1}hR\varphi(\mathfrak{A})}\right)^m \frac{N(\nu)^{m-1}}{(\log N(\nu))^m}\, T_m\, \mathfrak{S}_m(\nu)\prod_{j=1}^m \Lambda_j(\nu)$$

$$+ O\left(N(\nu)^{m-1+(\Theta-\frac{3}{4})+m\varepsilon}\right) + O\left(\frac{N(\nu)^{m-1}}{(\log N(\nu))^{m+1}}\right)$$

mit den Abkürzungen (6.78) und

$$(6.83)\qquad \mathfrak{S}_m(\nu) = \sum_{\substack{a \\ \left(\frac{a}{t}, t\right)=1}} \left(\frac{\mu\left(\frac{a}{t}\right)}{\varphi\left(\frac{a}{t}\right)}\right)^m \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b} \\ \gamma b \text{ mit} \\ \text{Nenner } a}} e^{2\pi i S(\gamma(\varkappa \sum \alpha_j - \nu))}.$$

7. Beweis der Hauptsätze.

7.1. Für den Beweis der Hauptsätze ist es nur noch nötig, die Ausdrücke T_m und $\mathfrak{S}_m(\nu)$ zu untersuchen. Die „singuläre Reihe" $\mathfrak{S}_m(\nu)$ wird sich in der üblichen Weise summieren lassen. Was T_m betrifft, so handelt es sich weniger darum, T_m umzuformen, als nachzuweisen, daß es von Null verschieden ist. Dieser Nachweis ist mir nicht in voller Allgemeinheit gelungen. In den folgenden zwei wichtigen (sich teilweise überdeckenden) Fällen werde ich jedoch tatsächlich zeigen, daß T_m nicht verschwindet:

I. Der zugrunde gelegte Zahlkörper sei *totalreell* und die $\Lambda_j(\hat{\mu})$ seien ganz beliebige Größencharaktere mod $\mathfrak{A}$.

II. Bei *beliebigem* Zahlkörper seien die $\Lambda_j(\hat{\mu})$ identisch gleich 1.

Zunächst können wir beide Fälle noch gemeinsam behandeln. Aus (5.69) und (6.78) ergibt sich unter Berücksichtigung von (6.651)

$$T_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(1 - i V_{qj})}{(1 - 2\pi i U_q)^{m - i V_q^*}} e^{-2\pi i U_q}$$

$$(7.11)\qquad \times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \frac{(2\pi i (U_p + i U_{p+r_2}))^{A_{p+r_2}^*} (2\pi i (U_p - i U_{p+r_2}))^{A_p^*}}{(1 + 4\pi^2 (U_p^2 + U_{p+r_2}^2))^{\frac{L_p^* - i V_p^*}{2} + m}} e^{-4\pi i U_p}$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} G\left(2 - i V_{pj}, L_{pj}, \frac{4\pi^2 (U_p^2 + U_{p+r_2}^2)}{1 + 4\pi^2 (U_p^2 + U_{p+r_2}^2)}\right) dU_1 \ldots dU_n,$$

wobei folgende Abkürzungen gebraucht worden sind

$$(7.12)\qquad \begin{aligned} V_q^* &= \sum_{j=1}^{m} V_{qj}, \\ A_p^* &= \sum_{j=1}^{m} A_{pj}, \\ L_{pj} &= A_{pj} + A_{p+r_2, j}, \\ L_p^* &= \sum_{j=1}^{m} L_{pj} = A_p^* + A_{p+r_2}^*. \end{aligned}$$

Dieses n-fache Integral zerfällt in ein Produkt von r_1 einfachen und r_2 doppelten Integralen:

$$T_m = \prod_{q=1}^{r_1}\left[\prod_{j=1}^{m}\Gamma(1-iV_{qj})\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2\pi i U_q}}{(1-2\pi i U_q)^{m-iV_q^*}}\,dU_q$$

$$(7.13)\quad \asymp \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(2\pi(iU_p-U_{p+r_2})\right)^{A_p^*+r_2}\left(2\pi(iU_p+U_{p+r_2})\right)^{A_p^*}}{\left(1+4\pi^2(U_p^2+U_{p+r_2}^2)\right)^{\frac{L_p^*-iV_p^*}{2}+m}}\,e^{-4\pi i U_p}$$

$$\asymp \prod_{j=1}^{m} G\left(2-iV_{pj}, L_{pj}, \frac{4\pi^2(U_p^2+U_{p+r_2}^2)}{1+4\pi^2(U_p^2+U_{p+r_2}^2)}\right)dU_p\,dU_{p+r_2}.$$

Hierin lassen sich die einfachen Integrale auswerten:

$$(7.14)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2\pi i U_q}}{(1-2\pi i U_q)^{m-iV_q^*}}\,dU_q = \frac{1}{e}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{1-2\pi i U_q}}{(1-2\pi i U_q)^{m-iV_q^*}}\,dU_q$$

$$= \frac{1}{2\pi i e}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{e^s}{s^{m-iV_q^*}}\,ds = \frac{1}{e\,\Gamma(m-iV_q^*)},$$

was man erhält, indem man nach dem Vorgange von Hankel [33]) den Integrationsweg umbiegt, so daß er die negative reelle Achse, die als Schnitt für die Funktion $s^{m-iV_q^*}$ anzusehen ist, umschlingt.

Die Doppelintegrale in (7.13) vereinfachen wir durch Einführung von Polarkoordinaten:

$$2\pi U_p = R_p \sin\varphi_p,$$

$$2\pi U_{p+r_2} = R_p \cos\varphi_p,$$

also

$$4\pi^2(U_p^2 + U_{p+r_2}^2) = R_p^2,$$

$$2\pi(U_{p+r_2} \pm iU_p) = R_p e^{\pm i\varphi_p},$$

so daß sich ergibt

---

[33]) Hankel, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 9 (1864), S. 7.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int \dots dU_p\, dU_{p+r_2}$$

$$= \frac{(-1)^{A_p^*+r_2}}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{R_p^{L_p^*}\, e^{i(A_p^*-A_{p+r_2}^*)\varphi_p - 2iR_p\sin\varphi_p}}{(1+R_p^2)^{\frac{L_p^*-iV_p^*}{2}+m}}$$

(7.15)

$$\times \prod_{j=1}^{m} G\left(2-iV_{pj}, L_{pj}, \frac{R_p^2}{1+R_p^2}\right) R_p\, dR_p\, d\varphi_p$$

$$= \frac{(-1)^{A_p^*+r_2}}{2\pi} \int_0^\infty J_{D_p^*}(2R_p) \frac{R^{L_p^*+1}}{(1+R_p^2)^{\frac{L_p^*-iV_p^*}{2}+m}} \prod_{j=1}^{m} G\left(2-iV_{pj}, L_{pj}, \frac{R_p^2}{1+R_p^2}\right) dR_p$$

mit der Abkürzung

$$D_p^* = A_p^* - A_{p+r_2}^*. \tag{7.16}$$

Mit Hilfe von (7.14) und (7.15) erhalten wir aus (7.13)

$$T_m = \frac{1}{e^{r_1}(2\pi)^{r_2}} \prod_{q=1}^{r_1} \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(1-iV_{qj})}{\Gamma(m-iV_q^*)} \tag{7.17}$$

$$\prod_{r_1+1}^{r_1+r_2} (-1)^{A_p^*+r_2} \int_0^\infty J_{D_p^*}(2R_p) \frac{R^{L_p^*+1}}{(1+R_p^2)^{\frac{L_p^*-iV_p^*}{2}+m}} \prod_{j=1}^{m} G\left(2-iV_{pj}, L_{pj}, \frac{R_p^2}{1+R_p^2}\right) dR_p.$$

In dem *speziellen Fall des totalreellen Körpers* ist $r_1 = n$, $r_2 = 0$, und wir erhalten dann

$$T_m = \frac{1}{e^n} \prod_{q=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(1-iV_{qj})}{\Gamma(m-iV_q^*)}. \tag{7.18}$$

Daraus, daß die Γ-Funktion nirgends verschwindet und in der rechten Halbebene auch keine Pole besitzt, folgt mittels (7.18), daß T_m für totalreelle Körper bei beliebigen $\Lambda_j(\hat{\mu})$ stets von Null verschieden ist.

7.2. Bei beliebigen Zahlkörpern bereitet die in der Funktion $G(s,l,x)$ steckende hypergeometrische Funktion Schwierigkeiten [34]). Wir betrachten

---

[34]) Möglicherweise wäre die folgende Formel zur weiteren Behandlung geeignet. Aus (3.23) und (4.311) folgt

$$\int_0^\infty e^{-x} J_{L_{pj}}(R_p x)\, x^{1-iV_{pj}}\, dx = \frac{R_p^{L_{pj}}\, 2^{2-iV_{pj}}}{(1+R_p^2)^{\frac{L_{pj}+2-iV_{pj}}{2}}} G\left(2-iV_{pj}, L_{pj}, \frac{R_p^2}{1+R_p^2}\right).$$

(Fortsetzung der Fußnote 34 auf nächster Seite.)

daher nur den Fall, in dem alle V_{pj} und alle A_{pj} verschwinden. Dann nehmen die Integrale in (7.17) die einfache Form

$$\int_0^\infty J_0(2R_p)\frac{R_p}{(1+R_p^2)^m}\left(G\left(2,0,\frac{R_p^2}{1+R_p^2}\right)\right)^m dR_p$$

an. Nun ist nach (4.311)

$$G(2,0,x)=\frac{1}{4}F\left(1,-\frac{1}{2};1;x\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{1+\frac{1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 1}x+\frac{1\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}x^2+\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{1-\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2-+\ldots\right\}=\frac{1}{4}(1-x)^{\frac{1}{2}},$$

also

$$\int_0^\infty J_0(2R_p)\frac{R_p}{(1+R_p^2)^m}\left(G\left(2,0,\frac{R_p^2}{1+R_p^2}\right)\right)^m dR_p$$

(7.21)

$$=\frac{1}{4^m}\int_0^\infty J_0(2R_p)\frac{R_p}{(1+R_p^2)^{\frac{3m}{2}}}dR_p=\frac{1}{4^m\Gamma\left(\frac{3m}{2}\right)}K_{\frac{3m}{2}-1}(2),$$

letzteres nach einer Sonineschen Formel[35]), worin K_ν die ν-te Besselsche

---

Daher ist, unter Berücksichtigung der Abkürzungen (7.12) und nach einer Substitution, die x durch $2x$ ersetzt,

$$\int_0^\infty J_{D_p^*}(2R_p)\frac{R^{L_p^*+1}}{(1+R_p^2)^{\frac{L_p^*-iV_p^*}{2}+m}}\prod_{j=1}^m G\left(2-iV_{pj},L_{pj},\frac{R_p^2}{1+R_p^2}\right)dR_p$$

$$=\int_0^\infty J_{D_p^*}(2R_p)\,R_p\left[\prod_{j=1}^m\int_0^\infty e^{-2x_j}J_{L_{pj}}(2R_px_j)\,x_j^{1-iV_{pj}}\,dx_j\right]dR_p$$

$$=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\left[\prod_{j=1}^m x_j^{1-iV_{pj}}\right]e^{-2\sum x_j}\int_0^\infty J_{D_p^*}(2R_p)\left[\prod_{j=1}^m J_{L_{pj}}(2R_px_j)\right]R_p\,dR_p\,dx_1\ldots dx_m$$

x_1 x_m

Hier ist zwar das einfache Integral durch ein $(m+1)$-faches ersetzt worden, dafür aber haben wir Besselsche Funktionen statt der hypergeometrischen Funktionen im Integranden. Soweit ich sehe, scheint es für das vermutete Nichtverschwinden des fraglichen Ausdruckes von Wichtigkeit zu sein, daß im letzten Integral die Summe der Indizes der Besselschen Funktionen $D_p^*+\sum_j L_{pj}=2A_p^*$ *gerade* ist.

[35]) N. Sonine, Math. Annalen **16** (1880), S. 50 oder Watson S. 434, Formel (2).

Funktion „dritter Art“ mit rein imaginärem Argument bedeutet[36]). Diese Funktion ist für alle positiven Werte ihrer Variablen *positiv*[37]).

Durch (7.21) erhalten wir für

$$V_{pj} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots m), \tag{7.22}$$
$$A_{pj} = 0 \quad (q = 1, \dots r_1 + r_2;\ p = r_1 + 1, \dots n),$$

aus (7.17)

$$T_m = \frac{1}{e^{r_1}(2\pi)^{r_2}} \frac{1}{((m-1)!)^{r_1}} \left(\frac{K_{\frac{3m}{2}-1}^{(2)}}{4^m \Gamma\left(\frac{3m}{2}\right)} \right)^{r_2}. \tag{7.23}$$

Also auch in diesem Falle ist T_m von Null verschieden, sogar positiv.

7.3. In (6.82) bleibt nun noch die in (6.83) angegebene singuläre Reihe auszuwerten. Setzen wir

$$C_a(\varrho) = \sum_{\substack{\gamma \bmod \frac{1}{b} \\ \gamma b \text{ mit Nenner } a}} e^{2\pi i S(\gamma\varrho)}, \tag{7.311}$$

so ist nach (2.262)

$$C_a(\varrho) = \sum_{c \mid (a, \varrho)} \mu\left(\frac{a}{c}\right) N(c). \tag{7.312}$$

Hieraus folgt für $(a_1, a_2) = 1$:

$$C_{a_1}(\varrho) \cdot C_{a_2}(\varrho) = C_{a_1 a_2}(\varrho), \tag{7.313}$$

denn

$$\begin{aligned} C_{a_1}(\varrho)\, C_{a_2}(\varrho) &= \sum_{c_1 \mid (a_1, \varrho)} \mu\left(\frac{a_1}{c_1}\right) N(c_1) \sum_{c_2 \mid (a_2, \varrho)} \mu\left(\frac{a_2}{c_2}\right) N(c_2) \\ &= \sum_{\substack{c_1 \mid (a_1, \varrho) \\ c_2 \mid (a_2, \varrho)}} \mu\left(\frac{a_1 a_2}{c_1 c_2}\right) N(c_1 c_2), \end{aligned} \tag{7.314}$$

letzteres wegen $(a_1, a_2) = 1$. Wegen dieser Voraussetzung folgt aus $c_1 \mid (a_1, \varrho)$ und $c_2 \mid (a_2, \varrho)$ auch $c_1 c_2 \mid (a_1 a_2, \varrho)$, und umgekehrt ist jeder Teiler c von $(a_1 a_2, \varrho)$ das eindeutige Produkt eines Teilers c_1 von (a_1, ϱ) und eines Teilers c_2 von (a_2, ϱ). Daher ist

$$\sum_{\substack{c_1 \mid (a_1, \varrho) \\ c_2 \mid (a_2, \varrho)}} \mu\left(\frac{a_1 a_2}{c_1 c_2}\right) N(c_1 c_2) = \sum_{c \mid (a_1 a_2, \varrho)} \mu\left(\frac{a_1 a_2}{c}\right) N(c),$$

womit wegen (7.312) und (7.314) die Behauptung (7.313) bewiesen ist. Wenden wir (7.311) und (7.313) auf (6.83) an, so erhalten wir

$$\mathfrak{S}_m(\nu) = \sum_{\left(\frac{a}{t}, t\right) = 1} \left(\frac{\mu\left(\frac{a}{t}\right)}{\mu\left(\frac{a}{t}\right)} \right)^m C_t(\varkappa \Sigma \alpha_j - \nu)\, C_{\frac{a}{t}}(\varkappa \Sigma \alpha_j - \nu). \tag{7.32}$$

[36]) Für die Definition von $K_\nu(z)$ vergleiche man etwa Watson S. 77, (2); S. 78, (6).

[37]) Siehe z. B. Watson S. 181, Formel (5).

Nun ist $\varkappa$ durch (2.252) bestimmt. Danach ist

$$(\mathfrak{t}, \varkappa \sum \alpha_j - \nu) = (\mathfrak{t}, \sum \alpha_j - \nu)$$

und

$$\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}, \varkappa \sum \alpha_j - \nu\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}, \nu\right)$$

und somit nach (7.312)

$$C_{\mathfrak{t}}(\varkappa \sum \alpha_j - \nu) = \sum_{\mathfrak{c} \mid (\mathfrak{t}, \sum \alpha_j - \nu)} \mu\left(\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{c}}\right) N(\mathfrak{c}) = C_{\mathfrak{t}}(\sum \alpha_j - \nu), \tag{7.33}$$

$$C_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}}(\varkappa \sum \alpha_j - \nu) = \sum_{\mathfrak{b} \mid \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}, \nu\right)} \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{t}}\right) N(\mathfrak{b}) = C_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}}(\nu). \tag{7.34}$$

Nun ist nach **2.32**, Hilfssatz 8, $\mathfrak{t} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{a})$, also

$$\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}, \mathfrak{t}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}, \mathfrak{a}, \mathfrak{A}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}, \mathfrak{A}\right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{t} \mid \mathfrak{A}. \tag{7.35}$$

Aus (7.32) bis (7.35) geht hervor

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_m(\nu) &= \sum_{\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}, \mathfrak{A}\right) = 1}{}^{\!\!*} \left(\frac{\mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}\right)}{\varphi\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}\right)}\right)^m C_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}}}(\nu)\, C_{\mathfrak{t}}(\sum \alpha_j - \nu) \\ &= \sum_{\mathfrak{t} \mid \mathfrak{A}} \sum_{(\mathfrak{t}, \mathfrak{A}) = 1} \left(\frac{\mu(\mathfrak{t})}{\varphi(\mathfrak{t})}\right)^m C_{\mathfrak{t}}(\nu) \sum_{\mathfrak{c} \mid (\mathfrak{t}, \sum \alpha_j - \nu)} \mu\left(\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{c}}\right) N(\mathfrak{c}) \qquad (7.36) \\ &= \sum_{(\mathfrak{t}, \mathfrak{A}) = 1} \left(\frac{\mu(\mathfrak{t})}{\varphi(\mathfrak{t})}\right)^m C_{\mathfrak{t}}(\nu) \sum_{\mathfrak{t} \mid \mathfrak{A}} \sum_{\mathfrak{c} \mid (\mathfrak{t}, \sum \alpha_j - \nu)} \mu\left(\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{c}}\right) N(\mathfrak{c}). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\sum_{\mathfrak{t} \mid \mathfrak{A}} \sum_{\mathfrak{c} \mid (\mathfrak{t}, \sum \alpha_j - \nu)} \mu\left(\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{c}}\right) N(\mathfrak{c}) = \sum_{\mathfrak{c} \mid (\mathfrak{A}, \sum \alpha_j - \nu)} N(\mathfrak{c}) \sum_{\mathfrak{c}' \mid \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{c}}} \mu(\mathfrak{c}'),$$

und da

$$\sum_{\mathfrak{c}' \mid \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{c}}} \mu(\mathfrak{c}')$$

nur dann gleich 1 ist, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{c}$ und sonst stets gleich Null ist, so haben wir

$$\sum_{\mathfrak{t} \mid \mathfrak{A}} \sum_{\mathfrak{c} \mid (\mathfrak{t}, \sum \alpha_j - \nu)} \mu\left(\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{c}}\right) N(\mathfrak{c}) = \begin{cases} N(\mathfrak{A}), & \text{wenn } \mathfrak{A} \mid (\mathfrak{A}, \sum \alpha_j - \nu) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{7.37}$$

Die Bedingung $\mathfrak{A} \mid (\mathfrak{A}, \sum \alpha_j - \nu)$ ist aber gleichbedeutend mit $\mathfrak{A} \mid (\sum \alpha_i - \nu)$, d. h. mit

$$\sum \alpha_j \equiv \nu \pmod{\mathfrak{A}}.$$

Daher folgt aus (7.36) und (7.37)

$$\mathfrak{S}_m(\nu) = 0 \quad \text{wenn} \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \not\equiv \nu \pmod{\mathfrak{A}} \tag{7.381}$$

und

$$\mathfrak{S}_m(\nu) = N(\mathfrak{A}) \sum_{(\mathfrak{k},\mathfrak{A})=1} \left(\frac{\mu(\mathfrak{k})}{\varphi(\mathfrak{k})}\right)^m C_{\mathfrak{k}}(\nu) \quad \text{wenn} \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \equiv \nu \pmod{\mathfrak{A}}. \tag{7.382}$$

Nun gilt aber in letzterem Falle nach (7.313) und wegen bekannter Eigenschaften der Symbole $\mu(\mathfrak{k})$ und $\varphi(\mathfrak{k})$ für $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2) = 1$

$$\left(\frac{\mu(\mathfrak{k}_1)}{\varphi(\mathfrak{k}_1)}\right)^m C_{\mathfrak{k}_1}(\nu) \cdot \left(\frac{\mu(\mathfrak{k}_2)}{\varphi(\mathfrak{k}_2)}\right)^m C_{\mathfrak{k}_2}(\nu) = \left(\frac{\mu(\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_2)}{\varphi(\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_2)}\right)^m C_{\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_2}(\nu), \tag{7.383}$$

und da $\mu(\mathfrak{k})$ nur für quadratfreie $\mathfrak{k}$ von Null verschieden ist, so folgt aus (7.382) und (7.383)

$$\mathfrak{S}_m(\nu) = N(\mathfrak{A}) \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{A}} \left(1 + \left(\frac{\mu(\mathfrak{p})}{\varphi(\mathfrak{p})}\right)^m C_{\mathfrak{p}}(\nu)\right)$$

und nach (7.312)

$$\mathfrak{S}_m(\nu) = N(\mathfrak{A}) \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{A} \\ \mathfrak{p} \nmid \nu}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^{m-1}\right) \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{A} \\ \mathfrak{p} \mid \nu}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^{m}\right) \tag{7.39}$$

für $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \equiv \nu \pmod{\mathfrak{A}}$.

7.4. In (7.39) können verschwindende Faktoren nur für solche $\mathfrak{p}$ auftreten, für die $N(\mathfrak{p}) = 2$ ist. Es sei $\mathfrak{l}$ das Produkt aller verschiedenen Primideale $\mathfrak{p}$ mit $N(\mathfrak{p}) = 2$; wenn es kein solches gibt, sei $\mathfrak{l} = 1$. Da in (7.39) nur Primideale vorkommen, die nicht in $\mathfrak{A}$ aufgehen, so bilden wir

$$\mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{l}}{(\mathfrak{l}, \mathfrak{A})} \tag{7.41}$$

und isolieren die Faktoren, die von Primidealen mit der Norm 2 herrühren. Nach (7.39) ist für $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \equiv \nu \pmod{\mathfrak{A}}$

$$\mathfrak{S}_m(\nu) = N(\mathfrak{A})\, \Omega \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{A} \\ \mathfrak{p} \nmid \nu \\ N(\mathfrak{p}) > 2}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^{m-1}\right) \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{A} \\ \mathfrak{p} \mid \nu \\ N(\mathfrak{p}) > 2}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^{m}\right) \tag{7.42}$$

mit

$$\Omega = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{L} \\ \mathfrak{p} \nmid \nu}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^{m-1}\right) \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{L} \\ \mathfrak{p} \mid \nu}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^{m}\right). \tag{7.43}$$

Bei *geradem* m kann ein verschwindender Faktor nur in dem zweiten Produkt von Ω vorkommen, und zwar dann und nur dann, wenn ein Primfaktor von $\mathfrak{L}$ nicht in ν aufgeht, wenn also $\mathfrak{L}$ selbst nicht in ν aufgeht. Ist dagegen $\mathfrak{L} \mid \nu$, so ist das zweite Produkt leer und das erste be-

steht aus lauter Faktoren 2, und zwar so vielen, wie $\mathfrak{L}$ Primfaktoren enthält. Also:

Für gerades m ist

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathfrak{L} \nmid \nu, \\ 2^g & \text{für } \mathfrak{L} \mid \nu, \end{cases} \tag{7.44}$$

wo g die Anzahl der Primfaktoren von $\mathfrak{L}$ bedeuten möge.

Bei *ungeradem* m kann ein verschwindender Faktor von Ω nur in dem ersten Produkt vorkommen, und zwar tritt dies dann und nur dann ein, wenn ein Primfaktor von $\mathfrak{L}$ in ν aufgeht, also $\mathfrak{L}$ und ν nicht teilerfremd sind. Ist dagegen $(\mathfrak{L}, \nu) = 1$, so ist das erste Produkt leer, und das zweite besteht aus g Faktoren 2.

Für ungerades m ist also

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{für } (\mathfrak{L}, \nu) \neq 1, \\ 2^g & \text{für } (\mathfrak{L}, \nu) = 1. \end{cases} \tag{7.45}$$

Wir können diese Ergebnisse symmetrischer in m und ν schreiben, indem wir bedenken, daß $\mathfrak{L}$ in der Zahl 2 aufgeht. Ist zunächst $\mathfrak{L}$ von 1 verschieden, so bedeutet $\mathfrak{L} \mid m$, daß m als rationale ganze Zahl gerade ist, und $(\mathfrak{L}, m) = 1$, daß m ungerade ist. Für $\mathfrak{L} = 1$ geben (7.44) und (7.45) ohnehin das gleiche Ergebnis, so daß wir hier gerades und ungerades m nicht zu trennen brauchen. Mit dieser Bemerkung geht aus (7.42), (7.44) und (7.45) hervor:

$$\mathfrak{S}_m(\nu) = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} \mathfrak{L} \mid m, \ \mathfrak{L} \nmid \nu \\ \text{oder} \\ (\mathfrak{L}, m) = 1, \ (\mathfrak{L}, \nu) \neq 1 \end{cases} \tag{7.461}$$

und

$$\mathfrak{S}_m(\nu) = N(\mathfrak{A})\, 2^g \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{A} \\ \mathfrak{p} \mid \nu \\ N(\mathfrak{p}) > 2}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^{m-1}\right) \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{A} \\ \mathfrak{p} \nmid \nu \\ N(\mathfrak{p}) > 2}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^{m}\right)$$

$$\text{für} \quad \begin{cases} \mathfrak{L} \mid m, \ \mathfrak{L} \mid \nu \\ \text{oder} \\ (\mathfrak{L}, m) = 1, \ (\mathfrak{L}, \nu) = 1. \end{cases} \tag{7.462}$$

Im Falle (7.462) ist offenbar für $m \geqq 3$

$$\begin{aligned} C' &= N(\mathfrak{A})\, 2^n \prod_{\substack{\mathfrak{p} \\ N(\mathfrak{p}) > 2}} \left(1 + \frac{1}{(N(\mathfrak{p})-1)^2}\right) \\ &\geqq \mathfrak{S}_m(\nu) \geqq N(\mathfrak{A}) \prod_{\substack{\mathfrak{p} \\ N(\mathfrak{p}) > 2}} \left(1 - \frac{1}{(N(\mathfrak{p})-1)^2}\right) = C''. \end{aligned} \tag{7.47}$$

Führen wir noch die Abkürzung

$$C_m = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \\ N(\mathfrak{p})>2}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^m\right) \tag{7.481}$$

für eine ersichtlich nur von m und vom Zahlkörper abhängende Größe ein, so können wir (7.462) auch schreiben

$$\mathfrak{S}_m(\nu) = 2^g N(\mathfrak{A})\, C_m \prod_{\substack{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{A} \\ N(\mathfrak{p})>2}} \frac{(N(\mathfrak{p})-1)^m}{(N(\mathfrak{p})-1)^m-(-1)^m}$$

$$\times \prod_{\substack{\mathfrak{p}+\mathfrak{A} \\ \mathfrak{p}\mid\nu \\ N(\mathfrak{p})>2}} \frac{(N(\mathfrak{p})-1)\left((N(\mathfrak{p})-1)^{m-1}-(-1)^{m-1}\right)}{(N(\mathfrak{p})-1)^m-(-1)^m} \tag{7.482}$$

für $\mathfrak{L}\mid m$, $\mathfrak{L}\mid\nu$ und für $(\mathfrak{L}, m) = (\mathfrak{L}, \nu) = 1$.

7.5. Um nun zur Aufstellung unserer Hauptsätze zu kommen, prüfen wir die Größenordnung der Glieder der rechten Seite in (6.82) bei wachsender $N(\nu)$.

Das Hauptglied rechts in (6.82) verschwindet nur, wenn $\mathfrak{S}_m(\nu)$ verschwindet, wenigstens in den beiden Fällen, in denen wir T_m untersucht haben. Wegen (7.47) und $|A_j(\nu)| = 1$ ist es genau von der Größenordnung

$$\frac{N(\nu)^{m-1}}{(\log N(\nu))^m}. \tag{7.51}$$

Das zweite O-Glied ist ohnehin von niedrigerer Größenordnung. Damit das erste O-Glied auch von kleinerer Größenordnung als (7.51) ist, muß

$$\Theta - \frac{3}{4} + m\varepsilon < 0$$

sein, und da ε beliebig positiv angenommen werden konnte, so muß

$$\Theta < \frac{3}{4} \tag{7.52}$$

sein. Dies setzen wir nun voraus.

Für die Formulierung der Hauptsätze trennen wir nun die beiden in **7.1** und **7.2** unterschiedenen Fälle.

Der zugrunde liegende Zahlkörper sei erstens totalreell. In diesem Falle ist für $\varpi \succ 0$

$$\varpi^{(q)} = |\varpi^{(q)}|;$$

daher vereinfacht sich nach (6.17) $A_m(\nu)$ zu

$$A_m(\nu) = \sum_{\substack{\varpi_1+\ldots+\varpi_m=\nu \\ \varpi_j\equiv\alpha_j \bmod \mathfrak{A} \\ \varpi_j\succ 0}} A_1(\varpi_1) A_2(\varpi_2) \ldots A_m(\varpi_m) e^{-n}. \tag{7.53}$$

Wir werden daher das asymptotische Verhalten von $e^n A_m(\nu)$ feststellen, wodurch im Resultat zugleich der Nenner e^n, den T_m in (7.18) besitzt, beseitigt wird.

Bemerken wir noch, daß in einem totalreellen Körper die Anzahl der Einheitswurzeln $w_* = 2$ ist, so können wir (6.82), (7.18), (7.381), (7.41), (7.461), (7.481), (7.482) zusammenfassen zu dem folgenden

Hauptsatz 1. *Es sei ein totalreeller Körper vorgelegt. In diesem sei $\mathfrak{A}$ ein Ideal, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ seien zu $\mathfrak{A}$ teilerfremde ganze Körperzahlen, $\Lambda_1(\hat{\mu}), \Lambda_2(\hat{\mu}), \ldots, \Lambda_m(\hat{\mu})$ seien Heckesche Größencharaktere* mod $\mathfrak{A}$, *definiert durch*

$$\Lambda_j(\hat{\mu}) = \prod_{q=1}^{n} |\hat{\mu}|^{-iV_{qj}}.$$

Es sei $\mathfrak{l}$ das Produkt der verschiedenen Primidealfaktoren ersten Grades von 2, und $\mathfrak{l} = 1$, falls es keine solchen gibt. Dann werde

$$\mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{l}}{(\mathfrak{l}, \mathfrak{A})}$$

gesetzt, und g sei die Anzahl der Primidealfaktoren von $\mathfrak{L}$. Ist Θ die obere Grenze der Realteile aller Nullstellen aller Heckeschen $\zeta(s, \lambda)$-Funktionen des Körpers, so gilt, falls

$$\Theta < \frac{3}{4} \tag{7.54}$$

ist: Für $\nu \succ 0$ und wachsende $N(\nu)$ ist, bei $m \geqq 3$, wenn

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m \equiv \nu \,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{A}) \tag{7.55}$$

und

(7.56) *entweder* $\mathfrak{A} \mid m, \mathfrak{L} \mid \nu$ oder $(\mathfrak{L}, m) = (\mathfrak{L}, \nu) = 1$

erfüllt sind,

$$\sum_{\substack{\varpi_1 + \ldots + \varpi_m = \nu \\ \varpi_j \equiv \alpha_j \bmod \mathfrak{A} \\ \varpi_j \succ 0}} \Lambda_1(\varpi_1)\Lambda_2(\varpi_2)\ldots\Lambda_m(\varpi_m) \tag{7.57}$$

$$\sim |\sqrt{d}|\, C_m\, 2^g\, N(\mathfrak{A})\, \frac{\prod_{j=1}^{m} \Lambda_j(\nu)}{(2^{n-1} h R \varphi(\mathfrak{A}))^m}\, \frac{N(\nu)^{m-1}}{(\log N(\nu))^m} \prod_{q=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(1 - iV_{qj})}{\Gamma\left(m - i\sum_{j=1}^{m} V_{qj}\right)}$$

$$\times \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{A} \\ N(\mathfrak{p}) > 2}} \frac{(N(\mathfrak{p})-1)^m}{(N(\mathfrak{p})-1)^m - (-1)^m} \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{A} \\ \mathfrak{p} \mid \nu \\ N(\mathfrak{p}) > 2}} \frac{(N(\mathfrak{p})-1)\left((N(\mathfrak{p})-1)^{m-1} - (-1)^{m-1}\right)}{(N(\mathfrak{p})-1)^m - (-1)^m}.$$

Hierin ist

$$C_m = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \\ N(\mathfrak{p})>2}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^m\right),$$

d ist die Diskriminante, h die Klassenzahl und R der Regulator des Körpers.

Ist jedoch von den beiden Bedingungen (7.55) *und* (7.56) *eine nicht erfüllt, so ist*

$$\sum_{\substack{\varpi_1+\ldots+\varpi_m=\nu \\ \varpi_j \equiv \alpha_j \bmod \mathfrak{A} \\ \varpi_j \succ 0}} \Lambda_1(\varpi_1)\,\Lambda_2(\varpi_2)\ldots\Lambda_m(\varpi_m) = o\left(\frac{N(\nu)^{m-1}}{\log N(\nu)^m}\right). \tag{7.58}$$

7.6. Unter Zugrundelegung beliebiger Zahlkörper haben wir in 7.2 nur den Fall behandelt, wo alle $\Lambda_j(\hat{\mu})$ identisch 1 sind. Dann spezialisiert sich (6.17) zu

$$A_m(\nu) = \sum_{\substack{\varpi_1+\ldots+\varpi_m=\nu \\ \varpi_j \equiv \alpha_j \bmod \mathfrak{A} \\ \varpi_j \succ 0}} e^{-\sum_{q=1}^{n} \frac{|\varpi_1^{(q)}|+\ldots+|\varpi_m^{(q)}|}{|\nu^{(q)}|}} \tag{7.61}$$

In diesem Falle erhalten wir durch Zusammenfassung von (6.82), (7.23), (7.381), (7.41), (7.461), (7.481), (7.482) und (7.61) den

Hauptsatz 2. *Der zugrunde gelegte Zahlkörper besitze r_1 reelle und $2r_2$ komplexe konjugierte Körper. In ihm sei $\mathfrak{A}$ ein Ideal und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ seien zu $\mathfrak{A}$ teilerfremde ganze Körperzahlen. Es sei $\mathfrak{l}$ das Produkt der verschiedenen Primidealfaktoren ersten Grades von 2 und $\mathfrak{l}=1$, falls es keine solchen gibt. Dann werde*

$$\mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{l}}{(\mathfrak{l}, \mathfrak{A})}$$

gesetzt, und g sei die Anzahl der Primidealfaktoren von $\mathfrak{L}$. Ist Θ die obere Grenze der Realteile aller Nullstellen aller Heckeschen $\zeta(s, \lambda)$-Funktionen des Körpers, so gilt, falls

$$\Theta < \frac{3}{4} \tag{7.62}$$

ist: Für $\nu \succ 0$ und wachsende $N(\nu)$ ist, bei $m \geqq 3$, wenn

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m \equiv \nu \bmod \mathfrak{A} \tag{7.63}$$

und

$$\text{(7.64) } \textit{entweder } \mathfrak{L} \mid m \quad \mathfrak{L} \mid \nu \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{L}, m) = (\mathfrak{L}, \nu) = 1$$

erfüllt sind,

$$\sum_{\substack{\varpi_1+\ldots+\varpi_m=\nu \\ \varpi_j\equiv\alpha_j \bmod \mathfrak{A} \\ \varpi_j\succ 0}} e^{-\sum_{q=1}^{n}\frac{|\varpi_1^{(q)}|+\ldots+|\varpi_m^{(q)}|}{|\nu|^{(q)}}}$$

$$\sim \frac{2^q|\sqrt{d}|}{e^{r_1}\pi^{r_2}} C_m \left(\frac{w_*}{2^{r_1+r_2}hR\varphi(\mathfrak{A})}\right)^m \frac{1}{((m-1)!)^{r_1}} \left(\frac{K_{\frac{3m}{2}-1}^{(2)}}{\Gamma\left(\frac{3m}{2}\right)}\right)^{r_2} \tag{7.65}$$

$$\times N(\mathfrak{A}) \prod_{\substack{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{A} \\ N(\mathfrak{p})>2}} \frac{(N(\mathfrak{p})-1)^m}{(N(\mathfrak{p})-1)^m-(-1)^m}$$

$$\times \prod_{\substack{\mathfrak{p}+\mathfrak{A} \\ \mathfrak{p}\mid\nu \\ N(\mathfrak{p})>2}} \frac{(N(\mathfrak{p})-1)\left((N(\mathfrak{p})-1)^{m-1}-(-1)^{m-1}\right)}{(N(\mathfrak{p})-1)^m-(-1)^m} \frac{N(\nu)^{m-1}}{(\log N(\nu)^m}.$$

Hierin ist

$$C_m = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \\ N(\mathfrak{p})>2}} \left(1-\left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^m\right),$$

d ist die Diskriminante, h die Klassenzahl, R der Regulator und w_* die Anzahl der Einheitswurzeln des Körpers. Ferner ist K_l die l-te Besselsche Funktion dritter Art rein imaginären Argumentes.

Ist dagegen eine der Bedingungen (7.63) *oder* (7.64) *nicht erfüllt, so ist*

$$\sum_{\substack{\varpi_1+\ldots+\varpi_m=\nu \\ \varpi_j\equiv\alpha_j \bmod \mathfrak{A} \\ \varpi_j\succ 0}} e^{-\sum_{q=1}^{n}\frac{|\varpi_1^{(q)}|+\ldots+|\varpi_m^{(q)}|}{|\nu^{(q)}|}} = o\left(\frac{N(\nu)^{m-1}}{(\log N(\nu))^m}\right). \tag{7.66}$$

Weimar, den 12. April 1926.

(Eingegangen am 30. April 1926.)

Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

Die Involutionen auf den linearen Strahlenkongruenzen sind für den Strahlenraum von ähnlicher Bedeutung wie die Involutionen auf den Grundgebilden erster Stufe für den Punkt- und Ebenenraum. Eine Theorie dieser Involutionen wurde aber bisher nicht aufgestellt. Es fehlte hierzu eine jede von ihnen umfassende Definition. Die von mir für die windschiefe Involution auf einer linearen Strahlenkongruenz aufgestellte gilt nur für diese.

In der folgenden Untersuchung gebe ich nunmehr eine Theorie aller Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz. Sie fußt auf der Erkenntnis, daß die ∞^2 Paare einander zugeordneter Strahlen einer solchen Involution aus reziproken Polaren eines polaren Raumes bestehen. Hiervon ausgehend gelingt ein organischer Aufbau der ganzen Theorie. Freilich muß hier und da auf stark ausgeartete polare Räume eingegangen werden, und das bietet größere Schwierigkeiten.

Ausführlich werden die Involutionen auf den allgemeinen linearen Strahlenkongruenzen behandelt, d. h. auf solchen linearen Strahlenkongruenzen, deren Mittelebenen einen gleichseitigen paraboloidischen Ebenenbündel zweiter Ordnung bilden. Besondere Involutionen auf allgemeinen und metrischen linearen Strahlenkongruenzen sind bei der Fülle des Stoffes nur in wenigen wichtigen Fällen berücksichtigt.

Durch die Theorie der Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz findet so manche bisher ungenügend beantwortete Frage eine übersichtliche und überraschend einfache Antwort. Ich verweise nur auf die Lösung der von Steiner und Chasles angeregten und behandelten und dann von Schröter wieder aufgenommenen Aufgabe, einen orthogonalen polaren Raum zu konstruieren, gleichgültig ob die beiden in ihm enthaltenen und ihn mitbestimmenden reziprok polaren Fokalachsen reell oder konjugiert imaginär sind.

Eng verknüpft mit den Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz erweist sich auch die Fokaltheorie dieses Strahlengebildes. Ältere hierher gehörige Sätze werden von neuem und schärfer bewiesen und die Theorie selbst weiter ausgebaut.

1. Eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 heiße „involutorisch gepaart“ oder kurz „involutorisch“, wenn ihre Strahlen paarweise in einem polaren Raume Π reziprok polar sind. Π ist entweder[1]) ein primärer oder ein sekundärer polarer Raum von C_1^1. Die (reelle oder imaginäre) Inzidenzfläche P^2 von Π liegt also entweder einscharig in der linearen Kongruenz, oder trägt zwei involutorische Regelscharen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes $\Sigma_{i\,g}$ von C_1^1. Im ersteren Falle heiße die involutorische lineare Strahlenkongruenz „primär“, im letzteren „sekundär“ involutorisch.

A.

Die primären Involutionen auf einer hyperbolischen oder elliptischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz.

2. Jede (reelle oder imaginäre) einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung bedingt eine primär involutorische Paarung der Kongruenzstrahlen. Die einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung bilden aber ein Gebüsch[2]). Somit trägt eine lineare Strahlenkongruenz ∞^3 primäre Strahleninvolutionen.

Je zwei Strahlenpaare einer primären Involution von C_1^1 liegen in einer Regelschar zweiter Ordnung[3]). Die Doppelstrahlen der Involution bilden die in C_1^1 enthaltene Regelschar der die Involution bedingenden Fläche zweiter Ordnung. Je nachdem die bedingende Fläche reell oder imaginär ist, unterscheiden wir primäre Involutionen mit einer reellen und primäre Involutionen mit einer imaginären Regelschar zweiter Ordnung von Doppelstrahlen. Eine hyperbolische lineare Strahlenkongruenz trägt nur primäre Involutionen mit reellen Regelscharen zweiter Ordnung von Doppelstrahlen, eine elliptische ∞^3 primäre Involutionen mit reellen und ∞^3 mit imaginären[4]). Eine primäre von C_1^1 getragene Strahleninvolution enthält ∞^2 auf den Flächen eines F^2-Bündels gelegene involutorische Regelscharen zweiter Ordnung. Die Flächen des Bündels sind für die die Involution bedingende einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung polarinvariant[5]). Bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz

[1]) Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **134** (1908), Einleitung.

[2]) A. a. O., Nr. 5. [3]) A. a. O., Nr. 8. [4]) A. a. O., Nr. 2. [5]) A. a. O. Nr. 9.

besteht der F^2-Bündel aus ∞^2 reellen Flächen, bei einer elliptischen entweder aus ∞^2 reellen und ∞^2 imaginären oder nur aus ∞^2 reellen Flächen, je nachdem die bedingende einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung reell oder imaginär ist[6]).

3. Eine in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltene Regelschar zweiter Ordnung zerfällt, wenn sie durch zwei mit einem Punkte inzidente Kongruenzstrahlen geht, in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung mit einem gemeinsamen Strahle. Die zerfallene Regelschar wird von einer in ein Ebenenpaar zerfallenen Fläche zweiter Ordnung getragen. Der gemeinsame Strahl der Strahlenbüschel fällt mit der Doppelpunktsgerade der Fläche zusammen. Das Ebenenpaar besteht aus zwei Doppelebenen des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1. Es trägt selbstverständlich auch die in zwei involutorische Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene Leitschar der Regelschar. Jeder Kongruenzstrahl ist die Doppelpunktsgerade einer einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Fläche zweiter Ordnung. Bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz sind die einscharig in ihr enthaltenen zerfallenen Regelflächen zweiter Ordnung reell, bei einer elliptischen nur ihre Doppelpunktsgeraden. Eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 enthält ∞^2 einscharig in ihr enthaltene zerfallene Regelflächen zweiter Ordnung. Jede von ihnen bedingt auf C_1^1 eine besondere primäre Involution, bei der dem mit der Doppelpunktsgerade zusammengefallenen Kongruenzstrahle alle anderen Strahlen der Kongruenz zugeordnet sind. Auf einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz bedingt also eine einscharig in ihr enthaltene zerfallene Regelfläche zweiter Ordnung eine besondere primäre Involution mit zwei reellen Strahlenbüscheln erster Ordnung von Doppelstrahlen, auf einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz dagegen eine besondere primäre Involution, bei der die beiden Strahlenbüschel konjugiert imaginär sind.

4. Aus den Auseinandersetzungen vorstehender zwei Nummern folgt die nachstehende Zusammenstellung:

Eine hyperbolische allgemeine lineare Strahlenkongruenz trägt

1. die primären Involutionen, deren ∞^1 reelle Doppelstrahlen eine Regelschar zweiter Ordnung bilden und deren ∞^2 involutorische Regelscharen zweiter Ordnung reell sind,
2. die primären Involutionen, deren ∞^1 reelle Doppelstrahlen eine in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene Regelschar zweiter Ordnung bilden und deren Strahlenpaare den gemeinsamen Strahl beider Büschel enthalten.

---

[6]) Jolles, Die durch eine polare Korrelation in sich selbst überführbaren Regelflächen zweiter Ordnung, Math. Zeitschr. 26 (1927), Nr. 3.

Eine elliptische allgemeine lineare Strahlenkongruenz dagegen **trägt**

1. die primären Involutionen, deren ∞^1 reelle Doppelstrahlen eine Regelschar zweiter Ordnung bilden und deren ∞^2 involutorische Regelscharen zweiter Ordnung aus ∞^2 reellen und ∞^2 imaginären Regelscharen bestehen,
2. die primären Involutionen, deren Doppelstrahlen eine imaginäre Regelschar zweiter Ordnung bilden und deren ∞^2 involutorische Regelscharen zweiter Ordnung reell sind,
3. die primären Involutionen, deren Doppelstrahlen zwei kongujiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung bilden und deren Strahlenpaare den gemeinsamen Strahl beider Büschel enthalten.

B.

Die sekundären Involutionen auf einer hyperbolischen oder elliptischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz.

5. Durch eine Fläche zweiter Ordnung, die zwei involutorische Regelscharen des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthält, geht ein Büschel solcher Flächen[7]). Seine Basiskurve ist ein aus Strahlen von C_1^1 gebildetes Raumvierseit. Die Flächen des F^2-Büschels haben die Strahlen der linearen Kongruenz paarweise zu gemeinsamen reziproken Polaren, und diese ∞^2 Strahlenpaare bilden somit eine sekundäre involutorische lineare Strahlenkongruenz (**1.**). Die Doppelstrahlen der involutorischen Kongruenz sind die vier Seiten des Basisvierseits des F^2-Büschels. Je nachdem sie reell oder paarweise konjugiert imaginär sind, ergibt sich eine involutorische lineare Strahlenkongruenz mit zwei Paaren reeller, oder mit zwei Paaren konjugiert imaginärer windschiefen, oder mit zwei Paaren konjugiert imaginärer inzidenten, oder endlich mit einem Paare windschiefer reellen und einem Paare windschiefer konjugiert imaginären Doppelstrahlen[8]).

Bei einer Involution mit vier reellen oder einem Paare reeller und einem Paare konjugiert imaginärer windschiefen Doppelstrahlen ist deren involutorische Paarung ohne weiteres gegeben. Ein Paar reeller windschiefer Doppelstrahlen wird nämlich von jedem Strahlenpaare der Involution harmonisch getrennt.

Eine lineare Strahlenkongruenz trägt ∞^4 Involutionen mit je vier Doppelstrahlen, die paarweise konjugiert imaginär sein können[9]). Jede

[7]) Die unter [1]) angeführte Abhandlung, Nr. 12—14.

[8]) Jolles, Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenkongruenz und die beiden Arten windschief involutorischer linearen Strahlenkongruenzen, Math. Zeitschr. **18** (1922), Nr. 13.

[9]) A. a. O., Nr. 11.

der ∞^4 involutorischen linearen Strahlenkongruenzen, deren vier Doppelstrahlen reell oder paarweise konjugiert imaginäre Geraden zweiter Art sind, enthält zwei Büschel von ∞^1 reellen involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung[10]). Die Regelscharen jedes Büschels liegen auf Flächen eines F^2-Büschels. Jede (reelle oder imaginäre) Fläche des einen Büschels ist für alle Flächen des andern polarinvariant. Die Basiskurven beider Büschel sind Raumvierseite. Sie haben ein Paar Gegenseiten, die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden der linearen Kongruenz, gemein. Das andere Paar Gegenseiten bilden je zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) windschiefe Doppelstrahlen der involutorischen Kongruenz. Eine Involution mit vier reellen oder mit zwei Paaren konjugiert imaginären windschiefen oder inzidenten Doppelstrahlen liegt auf einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz, eine Involution mit zwei reellen und zwei konjugiert imaginären windschiefen Doppelstrahlen auf einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz. Die Strahlenpaare einer involutorischen linearen Strahlenkongruenz mit vier reellen oder mit zwei Paaren windschiefer konjugiert imaginären Doppelstrahlen schneiden beide Leitgeraden ihres hyperbolischen Trägers bzw. in hyperbolischen oder elliptischen Punktinvolutionen, die Strahlenpaare einer involutorischen Strahlenkongruenz mit zwei Paaren inzidenter konjugiert imaginären Doppelstrahlen dagegen treffen die eine Leitgerade in einer hyperbolischen Punktinvolution, die andere in einer elliptischen[8]).

6. Eine durch zwei involutorische Regelscharen zweiter Ordnung eines geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} gehende Fläche zweiter Ordnung artet in einen involutorischen Strahlenkegel oder in ein involutorisches Achsenflach*) zweiter Ordnung von Σ_{ig} aus, wenn sie zwei inzidente einander zugeordnete Geraden des geschart involutorischen Raumes enthält. Diese schneiden einander, gleichgültig ob sie reell oder konjugiert imaginär sind, in einem reellen Doppelpunkte von Σ_{ig}. Somit liegen (reelle oder imaginäre) involutorische Strahlenkegel und Achsenflache zweiter Ordnung mit bzw. reellen Mittelpunkten und Mittelebenen nur in einem hyperbolisch geschart involutorischen Raume, und den Ort ihrer Mittelpunkte und Mittelebenen bilden die Leitgeraden u, v seiner linearen Strahlenkongruenz C_1^1.

Alle Strahlenkegel zweiter Ordnung, deren gemeinsame reziproke Po-

---

[10]) A. a. O., Nr. 14.

*) Ein „Achsenflach“ n-ter Ordnung ist das einem Kegel n-ter Ordnung als Punktgebilde durch eine Raumkorrelation zugeordnete Ebenengebilde. Den Strahlen des Kegels als Träger von Punktreihen erster Ordnung entsprechen dabei die „Achsen“ des Achsenflaches als Träger von Ebenenbüscheln erster Ordnung, dem Mittelpunkte des Kegels die „Mittelebene des Achsenflaches“.

laren die Leitgeraden u, v einer hyperbolischen Kongruenz C_1^1 sind, sind geschart involutorisch. Zwei gegebene (reelle oder konjugiert imaginäre) Ebenen von u bzw. v werden von ∞^2 involutorischen Strahlenkegeln zweiter Ordnung des hyperbolisch geschart involutorischen Raumes berührt. Sie ordnen sich zu ∞^1 Büscheln. Im geschart involutorischen Raume einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz liegen somit ∞^4 involutorische Strahlenkegel zweiter Ordnung. Aus jedem Punkte einer der beiden Leitgeraden u, v strahlen ∞^2 Büschel, aus allen Punkten beider Leitgeraden also ∞^3 Büschel solcher Kegel zweiter Ordnung aus.

In einem hyperbolisch geschart involutorischen Raume Σ_{ig} haben die Elemente eines Büschels in ihm enthaltener involutorischen Strahlenkegel zweiter Ordnung nicht nur die Leitgeraden u, v der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 von Σ_{ig} zu reziproken Polaren, sondern sie bestimmen auch auf ihnen je dieselbe Involution konjugierter Punkte. Liegt der gemeinsame Mittelpunkt M aller Kegel des Büschels auf u, so trägt v eine hyperbolische oder elliptische Punktinvolution, dagegen u eine parabolische, deren Doppelpunkte mit M zusammenfallen. Die Kegel des Büschels haben hiernach die Strahlen von C_1^1 paarweise so zu gemeinsamen reziproken Polaren, daß stets einer von zwei einander zugeordneten Strahlen durch M geht. Die involutorische lineare Strahlenkongruenz, deren einander zugeordnete Strahlen paarweise gemeinsame reziproke Polaren für die Elemente eines Büschels involutorischer Strahlenkegel zweiter Ordnung von Σ_{ig} sind, ist also eine besondere sekundär involutorische. Sie hat zwei Doppelstrahlen. Jeder von ihnen verbindet den gemeinsamen Mittelpunkt M der Kegel des Büschels mit einem der beiden (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelpunkte der von v getragenen Involution und stellt somit zwei vereinigte Doppelstrahlen dar. Die beiden Doppelstrahlen sind entweder reell oder konjugiert imaginäre Geraden erster Art. Alle ∞^3 Büschel involutorischer in Σ_{ig} enthaltenen Strahlenkegel zweiter Ordnung bedingen solche von C_1^1 getragenen Involutionen. Eine hyperbolische lineare Strahlenkongruenz ist also der Träger von ∞^3 besonderen Involutionen mit je zwei inzidenten (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelgeraden, von denen jede zwei vereinigte Doppelgeraden darstellt. Zu denselben Involutionen führen die ∞^3 Scharen involutorischer in Σ_{ig} enthaltenen Achsenflache zweiter Ordnung.

7. Ein in einem hyperbolisch geschart involutorischen Raume Σ_{ig} gelegener Büschel involutorischer Strahlenkegel zweiter Ordnung enthält einen in zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) involutorische Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenen Kegel. Die Träger der zwei involutorischen Büschel sind die beiden gemeinsamen (reellen oder konjugiert imaginären) Tangentialebenen aller Kegel des Büschels, d. h. ein Paar Doppelebenen (6.)

von Σ_{ig}. Jedes solches Paar involutorischer Strahlenbüschel erster Ordnung hat zum gemeinsamen Doppelstrahle die Schnittgerade ihrer Ebenen. Der andere Doppelstrahl jeder der beiden involutorischen Büschel ist bzw. der in jeder ihrer Trägerebenen gelegene gemeinsame Berührungsstrahl aller Kegel des Büschels. Jedes (reelle oder konjugiert imaginäre) Ebenenpaar einer der beiden Leitgeraden u, v der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 von Σ_{ig} trägt ∞^1 in zwei involutorische Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene involutorische Strahlenkegel zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes. In ihm liegen somit ∞^3 solcher Strahlenkegel.

Die ∞^1 in einem Ebenenpaare einer Leitgerade von C_1^1 gelegenen zerfallenen involutorischen Strahlenkegel zweiter Ordnung von Σ_{ig} bilden, da sie jene Leitgerade zum gemeinsamen Doppelstrahle haben, einen Büschel einander doppelt berührender involutorischen zerfallenen Strahlenkegel zweiter Ordnung von Σ_{ig}. Die Punkte des gemeinsamen Doppelstrahles sind für alle Kegel autokonjugiert. Das allen Kegeln gemeinsame Ebenenpaar besteht aus deren beiden gemeinsamen Berührungsebenen. Seine Schnittpunkte mit der nicht mit ihm inzidenten Leitgerade von C_1^1 sind die beiden gemeinsamen (reellen oder konjugiert imaginären) Berührungspunkte der Kegel mit dem Ebenenpaare und gleichzeitig die Doppelelemente einer von dieser Leitgerade getragenen Punktinvolution. Die einander zugeordneten Punkte der Punktinvolution sind für alle Kegel des Büschels konjugiert. Auf der einen Leitgerade der Strahlenkongruenz bestimmen also die Kegel des Büschels dieselbe identische, auf der anderen dieselbe hyperbolische oder elliptische Punktinvolution, und beide Leitgeraden bilden zwei gemeinsame reziproke Polaren der Kegel. In der besonderen sekundären Involution, die der in Σ_{ig} enthaltene Büschel dieser zerfallenen involutorischen Kegel zweiter Ordnung in C_1^1 bedingt, sind somit je zwei Kongruenzstrahlen einander zugeordnet, die aus einem Punkte des gemeinsamen Doppelstrahles der Kegel je zwei für alle konjugierte Punkte auf der nicht mit dem Doppelstrahle zusammengefallenen Leitgerade von C_1^1 projizieren. Je zwei einander zugeordnete Strahlen der Involution auf C_1^1 sind hiernach stets mit einem Punkte der auf allen Kegeln gelegenen Leitgerade der Kongruenz inzident. Die Involution selbst besteht aus ∞^1 involutorischen Strahlenbüscheln erster Ordnung, deren Mittelpunkte die Punktreihe auf dieser Leitgerade bilden. Je nachdem die Involution der für alle Kegel des Büschels konjugierten Punkte auf der andern Leitgerade hyperbolisch oder elliptisch ist, bilden die Doppelstrahlen der involutorischen Strahlenkongruenz zwei reelle oder konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung. Ihre Mittelpunkte sind die (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelelemente der Punktinvolution. Die besondere sekundär involutorische lineare Strahlenkongruenz, bei der je zwei einander

zugeordnete Strahlen inzident sind, heiße nun „inzidentpaarig involutorisch“. Da jedes der ∞^2 Ebenenpaare einer Leitgerade von C_1^1 einen Büschel zerfallener involutorischen Strahlenkegel zweiter Ordnung von Σ_{ig} trägt, so lassen sich die Strahlen einer linearen Strahlenkongruenz auf ∞^2 Weisen inzidentpaarig involutorisch einander zuordnen.

8. Ein Büschel zerfallener involutorischen Strahlenkegel zweiter Ordnung im hyperbolisch geschart involutorischen Raume Σ_{ig} ist ein besonderer, wenn die beiden gemeinsamen Berührungsebenen (7.) zusammenfallen, die Kegel also in einem Strahle der so entstandenen Ebene einander vierfach berühren. Jede Doppelebene von Σ_{ig} berührt die Elemente eines solchen Büschels zerfallener involutorischen Strahlenkegel des geschart involutorischen Raumes. Die mit ihr inzidente Leitgerade der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 von Σ_{ig} ist der gemeinsame Doppelstrahl der Kegel. Aus dem Schnittpunkte dieser Doppelebene und der andern Leitgerade von C_1^1 werden die Mittelpunkte der Kegel durch deren vierfache Berührungsstrahlen projiziert. Je zwei einander zugeordnete Strahlen jedes der zerfallenen Kegel trennen dessen vierfachen Berührungsstrahl harmonisch von dem allen Kegeln gemeinsamen Doppelstrahle. Der in einer Doppelebene von Σ_{ig} gelegene Büschel in Σ_{ig} enthaltener zerfallenen involutorischen Strahlenkegel zweiter Ordnung bestimmt auf der nicht mit ihr inzidenten Leitgerade von C_1^1 eine parabolische Punktinvolution, deren einander zugeordnete Punkte für alle Kegel des Büschels konjugiert sind. Die beiden Doppelpunkte der Involution liegen vereinigt im Schnittpunkte der Doppelebene und Leitgerade.

Ein in einer Doppelebene von Σ_{ig} enthaltener Büschel zerfallener involutorischen Kegel zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes bedingt eine besondere inzidentpaarige Involution der Strahlen von C_1^1, bei der von jedem Punkte der in der Doppelebene gelegenen Leitgerade von C_1^1 ein parabolisch involutorischer Büschel von Kongruenzstrahlen ausgeht. Mit jeder der ∞^1 Doppelebenen von Σ_{ig} ist eine besondere inzidentpaarige Involution der Strahlen von C_1^1 verknüpft. Es gibt also deren ∞^1. In jeder von ihnen bilden die Doppelstrahlen aller ihrer parabolisch involutorischen Strahlenbüschel erster Ordnung einen Strahlenbüschel erster Ordnung. In seinem Mittelpunkte schneidet die in Frage kommende Doppelebene von Σ_{ig} die nicht mit ihr inzidente Leitgerade von C_1^1.

9. Es liegen demgemäß auf einer hyperbolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz

1. die sekundären Involutionen mit vier reellen Doppelstrahlen,
2. die sekundären Involutionen mit zwei Paaren konjugiert imaginärer windschiefen Doppelstrahlen,

3. die sekundären Involutionen mit zwei Paaren konjugiert imaginärer inzidenten Doppelstrahlen,
4. die sekundären Involutionen mit zwei inzidenten reellen Doppelstrahlen, von denen jeder zwei vereinigte Doppelstrahlen darstellt,
5. die sekundären Involutionen mit zwei inzidenten konjugiert imaginären Doppelstrahlen, von denen jeder zwei vereinigte Doppelstrahlen darstellt,
6. die sekundären inzidentpaarigen Involutionen mit zwei Büscheln erster Ordnung reeller Doppelstrahlen,
7. die sekundären inzidentpaarigen Involutioneu mit zwei konjugiert imaginären Büscheln erster Ordnung von Doppelstrahlen,
8. die sekundären inzidentpaarigen Involutionen mit einem Büschel erster Ordnung reeller Doppelstrahlen, von denen jeder zwei vereinigte Doppelstrahlen darstellt.

Und es liegen auf einer elliptischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz die sekundären Involutionen mit einem Paare reeller und einem Paare konjugiert imaginärer windschiefen Doppelstrahlen.

C.

Metrische Involutionen auf einer hyperbolischen oder elliptischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz.

a) Die beiden symmetrischen primären Involutionen.

10. Die in einer allgemeinen linearen Strahlenkongruenz C_1^1 einscharig enthaltenen gleichseitigen Paraboloide bilden einen F^2-Büschel. Seine Basiskurve ist ein Raumvierseit, dessen eines Paar Gegenseiten die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1 sind, und dessen anderes Paar[11]) aus der Hauptsymmetrieachse c_d und dem unendlich fernen Kongruenzstrahle besteht. Ein gleichseitiges Paraboloid ${}^1F^2$ des F^2-Büschels hat mit C_1^1 die eine Nebensymmetrieachse c_1 gemein, ein zweites ${}^2F^2$ die andere Nebensymmetrieachse c_2. Die beiden übrigen Nebensymmetrieachsen beider gleichseitigen Paraboloide fallen in die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1, ihre Hauptachsen bzw. in die Nebensymmetrieachsen c_2, c_1 der Kongruenz.

Als Nebensymmetrieachsen[12]) des Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 sind c_1, c_2 bzw. orthogonal zu den Strahlen der Fokalregelscharen $\mathfrak{C}_1^2$, $\mathfrak{C}_2^2$ der Kongruenz. Die mit $\mathfrak{C}_1^2$ verbundenen[13]) orthogonalen Regelflächen zweiter Ordnung haben

[11]) Jolles, Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen, Math. Annalen 63 (1907), Nr. 6.

[12]) A. a. O., Nr. 15.

[13]) A. a. O., Nr. 18.

die gemeinsame Hauptachse c_1 und mit ihr sind zwei zyklische Ebenen jeder solchen Fläche inzident[14]). Jede mit $\mathfrak{C}_1^2$ verbundene Fläche zweiter Ordnung schneidet somit das gleichseitige Paraboloid ${}^1F^2$ außer in den Leitgeraden u, v von C_1^1 noch in je zwei Strahlen der Kongruenz, die bzw. zu den beiden mit c_1 inzidenten zyklischen Ebenen der Fläche normal sind. Die Strahlen trennen in den sie enthaltenden orthogonalen Regelscharen von C_1^1 die Achsen der zu ihren Leitscharen perspektiven kongruenten Ebenenbüschel erster Ordnung harmonisch[15]). Nun sind alle mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ verbundenen Flächen zweiter Ordnung für das mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2^2$ verbundene gleichseitige Paraboloid ${}^1F^2$ polarinvariant[16]). Folglich sind je zwei solche Strahlen in den mit $\mathfrak{C}_1^2$ verbundenen orthogonalen Regelscharen zweiter Ordnung für ${}^1F^2$ reziprok polar, aus denen die im geschart involutorischen Raume von C_1^1 enthaltenen involutorischen Leitscharen dieser Regelscharen durch kongruente involutorische Ebenenbüschel erster Ordnung projiziert werden. Je zwei für ${}^1F^2$ reziprok polare Strahlen von C_1^1 sind aber durch c_1 und den c_1 rechtwinklig kreuzenden unendlich fernen Strahl harmonisch getrennt und werden an c_1 ineinander gespiegelt. Ein gleiches gilt für die einander zugeordneten Strahlen der durch ${}^2F^2$ in C_1^1 bedingten primären Involution in bezug auf c_2. Mit Rücksicht auf diese Grundeigenschaft nenne ich die zwei von C_1^1 getragenen durch die gleichseitigen Paraboloide ${}^1F^2$, ${}^2F^2$ bedingten primären Involutionen „symmetrisch“. Für sie ist dargetan:

Eine allgemeine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 trägt zwei symmetrische primäre Involutionen. Sie sind durch die einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide ${}^1F^2$, ${}^2F^2$ bedingt, deren Hauptachsen bzw. mit den Nebensymmetrieachsen c_2, c_1 der Kongruenz zusammenfallen. Die Symmetrieachsen der durch ${}^1F^2$, ${}^2F^2$ bedingten symmetrischen primären Involutionen sind bzw. c_1, c_2. Je zwei einander zugeordnete Strahlen jeder der beiden von C_1^1 getragenen symmetrischen primären Involutionen sind Achsen kongruenter Ebeneninvolutionen in dem polaren Raume des die Involution bedingenden gleichseitigen Paraboloides.

b) Die orthogonale sekundäre Involution.

11. Bei einer hyperbolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz C_1^1 mit dem Fokalparaboloide C^2 sind die beiden Leitgeraden u, v zwei

---

[14]) A. a. O., Nr. 17.

[15]) Ruth, Über eine besondere Erzeugung des orthogonalen Hyperboloides und über Büschel orthogonaler Kegel und Hyperboloide, Sitzber. d. Math.-Naturw. Klasse d. Wiener Akad. d. Wissenschaften **80** (1880), 2. Abt., Nr. 1.

[16]) Die unter [11]) angeführte Abhandlung, Nr. 20.

Fokalachsen von C^2 und für diese Fläche reziprok polar[17]). Bezeichnen wir daher die durch das Fokalparaboloid auf einer linearen Strahlenkongruenz bedingte sekundäre Strahleninvolution als „orthogonal", so folgt:

Die Strahlenpaare der von einer hyperbolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz C_1^1 getragenen orthogonalen sekundären Strahleninvolution werden aus den beiden Leitgeraden u, v von C_1^1 durch die Ebenenpaare orthogonaler Ebenenbüschel projiziert.

Zu den orthogonalen Ebenenbüscheln u, v ist wechselseitig auf den Leitgeraden u, v eine elliptisch involutorische Punktreihe perspektiv. Die involutorischen Punktreihen sind kongruent. Ihre Mittelpunkte liegen auf der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1. Ist $2a$ der Abstand beider Leitgeraden u, v voneinander und uv der von ihnen gebildete Winkel, so sind die Potenzen der kongruenten elliptisch involutorischen Punktreihen $-\left(\frac{2a}{\sin uv}\right)^2$. Beiläufig bemerkt stellt $\frac{2a}{\sin uv}$ sowohl den Abstand der Brennpunkte[18]) beider Hauptparabeln des Fokalparaboloides C^2 voneinander dar, wie auch den Abstand, den die zwei Kuspidalebenen[19]) des mit C^2 orthogonal verbundenen Zylindroides voneinander haben.

Bei einer elliptischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz C_1^1 mit dem Fokalparaboloide C^2 gehen die mit der elliptisch involutorischen Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelflächen zweiter Ordnung[20]) durch die beiden reellen Fokalachsen f', f'' der Kongruenz. Sie tragen folglich in der durch C^2 bedingten sekundären Involution auf C_1^1 hyperbolisch involutorische Regelscharen zweiter Ordnung mit den gemeinsamen Doppelstrahlen f', f''. Ermittelt man also in der elliptischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz nach bekannter Vorschrift die beiden reellen Fokalachsen f', f'', so gilt:

Die beiden reellen Fokalachsen f', f'' einer elliptischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz C_1^1 liegen mit den Strahlenpaaren der von C_1^1 getragenen orthogonalen sekundären Strahleninvolution in orthogonalen Regelscharen zweiter Ordnung und trennen diese Strahlenpaare harmonisch.

12. Jede mit einer Fokalregelschar einer allgemeinen linearen Strahlenkongruenz C_1^1 verbundene orthogonale Regelschar zweiter Ordnung ist polarinvariant für das Fokalparaboloid C^2 der Kongruenz[21]). Ihre Leitstrahlen sind durch C_1^1 einander zugeordnet und liegen[22]) in der Fokalkongruenz ${}^1F_1^1$ oder ${}^2F_1^1$ der Kongruenz C_1^1, je nachdem die Regelschar und deren Fläche zweiter Ordnung mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ oder $\mathfrak{C}_2^2$ des Fokal-

---

[17]) Die unter [11]) angeführte Abhandlung, Nr. 40.
[18]) A. a. O., Nr. 40. [19]) A. a. O., Nr. 41. [20]) A. a. O., Nr. 21.
[21]) A. a. O., Nr. 19. [22]) A. a. O., Nr. 22.

paraboloides C^2 verbunden ist. Das von den zwei Paaren[23]) windschiefer Fokalachsen von C_1^1 begrenzte Raumvierseit ist nun die Basiskurve eines durch C^2 gehenden F^2-Büschels $F^2(C^2)$. Seine Flächen tragen je zwei durch C_1^1 involutorisch gepaarte Regelscharen zweiter Ordnung, und je zwei für C^2 reziprok polare Strahlen der Kongruenz sind für alle Flächen des Büschels $F^2(C^2)$ reziprok polar[7]). Jede mit einer Fokalregelschar von C_1^1 verbundene orthogonale Regelschar zweiter Ordnung und die sie tragende Fläche ist folglich für alle Flächen des Büschels $F^2(C^2)$ polarinvariant. Die Fläche hat mit jeder Fläche des Büschels $F^2(C^2)$, je nachdem sie in dem mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ oder $\mathfrak{C}_2^2$ verbundenen F^2-Büschel $F^2(\mathfrak{C}_1^2)$ oder $F^2(\mathfrak{C}_2^2)$ liegt, außer zwei windschiefen Fokalachsen von C_1^1 zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) durch C_1^1 einander zugeordnete Strahlen der Fokalkongruenz ${}^1F_1^1$ oder ${}^2F_1^1$ gemein. D. h.:

Bei der orthogonalen sekundären Involution auf einer allgemeinen linearen Strahlenkongruenz C_1^1 liegen[24]) *die Flächen des durch das Fokalparaboloid C^2 bedingten F^2-Büschels $F^2(C^2)$ einscharig in beiden Fokalkongruenzen ${}^1F_1^1$, ${}^2F_1^1$ von C_1^1.*

13. Die Nebensymmetrieachse c_1 des Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 schneidet die von seiner Regelschar $\mathfrak{C}_1^2$ getragene Fokalinvolution[12]) in einer zu ihr perspektiven Punktinvolution. Die Punktinvolution liegt perspektiv zu einer Strahleninvolution (**10.**) der in C_1^1 enthaltenen Regelschar ${}^1\mathfrak{F}_1^2$ des gleichseitigen Paraboloides ${}^1F^2$. Alle Strahlen der Regelschar ${}^1\mathfrak{F}_1^2$ schneiden c_1 senkrecht, ferner bildet ein Strahlenpaar der Involution der unendlich ferne Strahl von C_1^1 und die Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz C_1^1. Somit ist die von ${}^1\mathfrak{F}_1^2$ getragene Strahleninvolution die eine Fokalinvolution[25]) einer neuen linearen Strahlenkongruenz. Die Bestimmung dieser Kongruenz samt ihrer zweiten Fokalinvolution sei unsere nächste Aufgabe!

Durch je zwei einander zugeordnete Strahlen der von ${}^1\mathfrak{F}_1^2$ getragenen Fokalinvolution geht eine mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ von C^2 verbundene orthogonale Regelschar zweiter Ordnung (**10.**). Jeder von ihnen ist dabei bzw. normal zu einer mit c_1 inzidenten zyklischen Ebene der die orthogonale Regelschar tragenden Fläche zweiter Ordnung. Der Büschel orthogonaler Regelflächen zweiter Ordnung $F^2(\mathfrak{C}_1^2)$ ist also mit (**12.**) der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ von C_1^1 und mit der Fokalregelschar ${}^1\mathfrak{F}_1^2$ von ${}^1F^2$ verbunden.

---

[23]) A. o. O., Nr. 15.

[24]) Dieses Ergebnis ist als Sonderfall in der unter [1]) angeführten Abhandlung, Nr. 21, enthalten. Es wurde aber von Reye später noch einmal auf anderm Wege abgeleitet, wie sich aus der in [27]) hervorgehobenen Stelle ergibt.

[25]) Die unter [11]) angeführte Abhandlung, Nr. 25.

Seine Flächen liegen mit der einen Regelschar in C_1^1, mit der anderen in ${}^1F_1^1$. Die gesuchte lineare Strahlenkongruenz ist folglich die Fokalkongruenz ${}^1F_1^1$ von C_1^1.

Das die Regelschar ${}^1\mathfrak{F}_1^2$ tragende gleichseitige Paraboloid ${}^1F^2$ ist in dem mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2^2$ von C^2 verbundenen F^2-Büschel von C_1^1 enthalten. Je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Strahlen in der Leitschar ${}^1\mathfrak{F}_d^2$ von ${}^1\mathfrak{F}_1^2$ sind sonach reziprok polar[16]) für die Flächen des mit $\mathfrak{C}_1^2$ verbundenen F^2-Büschels $F^2(\mathfrak{C}_1^2)$. Das gleiche gilt, da jede Fläche des Büschels $F^2(\mathfrak{C}_1^2)$ auch einscharig in ${}^1F_1^1$ enthalten und mit der Fokalregelschar ${}^1\mathfrak{F}_1^2$ verbunden ist, für je zwei durch ${}^1F_1^1$ einander zugeordnete Strahlen dieser Leitschar[21]). Hiernach fallen die beiden von der Regelschar ${}^1\mathfrak{F}_d^2$ getragenen bzw. durch die Kongruenzen C_1^1 und ${}^1F_1^1$ bedingten Strahleninvolutionen zusammen. Oder, die durch C_1^1 in der Regelschar ${}^1\mathfrak{F}_d^2$ bedingte Strahleninvolution bildet die zweite Fokalinvolution von ${}^1F_1^1$.

Für das mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2^2$ von C^2 verbundene gleichseitige Paraboloid ${}^1F^2$ sind die Flächen des Büschels $F^2(C^2)$ polarinvariant[16]). Jede von ihnen hat mit der Regelschar ${}^1\mathfrak{F}_d^2$ dieses Paraboloides zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Geraden gemein. Sie bilden, wie im vorstehenden Absatze bewiesen wurde, ein Strahlenpaar der von dieser Regelschar getragenen Fokalinvolution der Kongruenz ${}^1F_1^1$. Der Büschel $F^2(C^2)$ besteht somit aus den mit der Fokalregelschar ${}^1\mathfrak{F}_d^2$ verbundenen einscharig in ${}^1F_1^1$ enthaltenen Flächen zweiter Ordnung.

Ebenso wie die Kongruenz ${}^1F_1^1$ das Fokalparaboloid ${}^1F^2$ bestimmt, und die bzw. mit seinen Regelscharen ${}^1\mathfrak{F}_1^2$, ${}^1\mathfrak{F}_d^2$ verbundenen F^2-Büschel $F^2(\mathfrak{C}_1^2)$, $F^2(C^2)$, bestimmt die Kongruenz ${}^2F_1^1$ das Fokalparaboloid ${}^2F^2$ und die bzw. mit seinen Regelscharen ${}^2\mathfrak{F}_2^2$, ${}^2\mathfrak{F}_d^2$ verbundenen F^2-Büschel $F^2(\mathfrak{C}_2^2)$, $F^2(C^2)$. Bedenken wir ferner, daß die Fokalkongruenzen ${}^1F_1^1$, ${}^2F_1^1$ aus den Leitstrahlen der bzw. mit den Fokalregelscharen $\mathfrak{C}_1^2$, $\mathfrak{C}_2^2$ von C_1^1 verbundenen orthogonalen Regelscharen zweiter Ordnung dieser Kongruenz bestehen, und daß je zwei der durch C_1^1 einander zugeordneten Leitstrahlen, je nachdem sie in ${}^1F_1^1$ oder ${}^2F_1^1$ liegen, bzw. für ${}^1F^2$ oder ${}^2F^2$ reziprok polar sind, so folgt als Gesamtergebnis vorstehender Untersuchung:

Die Strahlen jeder der beiden Fokalkongruenzen ${}^1F_1^1$, ${}^2F_1^1$ einer allgemeinen linearen Strahlenkongruenz C_1^1 werden durch diese orthogonal sekundär involutorisch gepaart. Die bedingenden Fokalparaboloide[26]) *sind bzw. die in C_1^1 einscharig enthaltenen gleichseitigen Paraboloide ${}^1F^2$, ${}^2F^2$, deren Hauptachsen bzw. die Nebensymmetrieachsen c_2, c_1 von C_1^1 sind.*

---

[26]) Reye, Beitrag zur Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen, Math. Ann. **74** (1913), Nr. 21.

Mit den Regelscharen ${}^1\mathfrak{F}_1^2$, ${}^1\mathfrak{F}_d^2$ des Fokalparaboloides ${}^1F^2$ von ${}^1F_1^1$ sind bzw. die Flächen der F^2-Büschel $F^2(\mathfrak{C}_1^2)$, $F^2(\mathfrak{C}_d^2)$ verbunden. Ihre durch C_1^1 involutorisch gepaarten Regelscharen bilden die bzw. mit ${}^1\mathfrak{F}_1^2$, ${}^1\mathfrak{F}_d^2$ verbundenen Fokalkongruenzen von ${}^1F_1^1$. Die mit den Fokalregelscharen ${}^1\mathfrak{F}_1^2$, ${}^1\mathfrak{F}_d^2$ von ${}^1F_1^2$ verbundenen Fokalkongruenzen sind folglich die Kongruenzen C_1^1 und ${}^2F_1^1$. Ebenso sind mit den Fokalregelscharen ${}^2\mathfrak{F}_2^2$, ${}^2\mathfrak{F}_d^2$ von ${}^2F_2^1$ bzw. die Fokalkongruenzen C_1^1 und ${}^1F_1^1$ dieser Kongruenz verbunden.

Von den drei linearen Strahlenkongruenzen C_1^1, ${}^1F_1^1$, ${}^2F_1^1$ hat also jede die beiden anderen zu Fokalkongruenzen[27]*, und jede paart die Strahlen der beiden anderen orthogonal sekundär involutorisch.*

14. Die Strahlenpaare der auf einer allgemeinen linearen Strahlenkongruenz C_1^1 gelegenen orthogonalen sekundären Involution bestehen[7]) aus den gemeinsamen reziproken Polaren für die Flächen (**12.**) des Büschels $F^2(C^2)$. Nun ist dieser Büschel mit einer Fokalregelschar (**13.**) jeder der beiden Fokalkongruenzen ${}^1F_1^1$, ${}^2F_1^1$ — z. B. mit der Fokalregelschar ${}^1\mathfrak{F}_d^2$ von ${}^1F_1^1$ — verbunden und besteht sonach aus orthogonalen Regelflächen zweiter Ordnung. Sonach schließen wir:

Die Strahlenpaare der orthogonalen sekundären Involution auf einer allgemeinen linearen Strahlenkongruenz C_1^1 werden von den gemeinsamen reziproken Polaren der Flächen eines Büschels orthogonaler Regelflächen zweiter Ordnung gebildet. Seine Basiskurve ist ein Raumvierseit, dessen eines Paar Gegenseiten die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden und dessen anderes Paar Gegenseiten zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) windschiefe Fokalachsen von C_1^1 sind.

Bei einer hyperbolischen Kongruenz C_1^1 sind die beiden windschiefen Fokalachsen[23]) konjugiert imaginär, bei einem elliptischen reell oder konjugiert imaginär. Im letzteren Falle liegen im F^2-Büschel ∞^1 imaginäre orthogonale Regelflächen zweiter Ordnung mit reellen polaren Räumen.

15. Alle polaren Räume, die durch eine orthogonale sekundäre Involution auf einer allgemeinen linearen Strahlenkongruenz gehen, bilden einen Büschel[20]), und zwar einen Büschel orthogonaler polaren Räume (**14.**). Ein polarer Raum, der eine orthogonale sekundäre Involution auf einer allgemeinen linearen Strahlenkongruenz enthält, ist somit stets orthogonal. Liegt als Träger der orthogonalen sekundären Involution eine hyperbolische lineare Strahlenkongruenz vor, so sind ihre beiden Leitgeraden zwei reelle reziprok polare Fokalachsen (**11.**) des orthogonalen polaren Raumes. Hingegen repräsentiert die orthogonale sekundäre Involution, sobald ihr

---

[27]) A. a. O., Nr. 27.

Träger elliptisch ist, zwei im orthogonalen polaren Raume enthaltene konjugiert imaginäre reziprok polare Fokalachsen.

Mit Hilfe der orthogonalen sekundären Involution auf einer allgemeinen linearen Strahlenkongruenz gelingt es sonach, den orthogonalen polaren Raum zu definieren, gleichgültig, ob die beiden in ihm gelegenen reziprok polaren Fokalachsen reell oder konjugiert imaginär sind. Dies Ergebnis scheint mir, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, einen bemerkenswerten Fortschritt darzustellen.

D.

Die primären Involutionen auf einer parabolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz.

16. Mit den vereinigten Leitgeraden w einer parabolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 fällt ein Strahl der Kongruenz zusammen. Er ist die gemeinsame Doppelpunktsgerade der ∞^2 in P_1^1 enthaltenen in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenen Regelscharen zweiter Ordnung. Die Kongruenz enthält außerdem ∞^1 in je einen Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene Regelscharen zweiter Ordnung, wobei alle Strahlen eines solchen Büschels Doppelpunktsgeraden der zerfallenen Regelschar sind. Ein solcher Büschel liegt in jeder Ebene von w.

Je zwei reziprok polare Strahlen von P_1^1 für eine einscharig in der Kongruenz enthaltene Regelfläche zweiter Ordnung R^2 schneiden einander in einem Punkte P der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1. Je zwei Paare solcher Kongruenzstrahlen liegen aber in einer in P_1^1 enthaltenen Regelschar zweiter Ordnung[3]). Folglich besteht die Regelschar aus zwei Strahlenbüscheln erster Ordnung, die in besonderen Fällen zusammenfallen. Der Bündel für R^2 polarinvarianter einscharig in P_1^1 enthaltenen Regelflächen zweiter Ordnung[5]) setzt sich also aus den in der Kongruenz einscharig enthaltenen ausgearteten Flächen zweiter Ordnung zusammen. Da eine primäre Involution auf einer linearen Strahlenkongruenz auch durch eine einscharig in ihr enthaltene zerfallene Regelfläche zweiter Ordnung bedingt ist, so schließen wir:

Eine parabolische allgemeine lineare Strahlenkongruenz trägt

1. die primären Involutionen, deren ∞^1 Doppelstrahlen eine Regelschar zweiter Ordnung bilden,
2. die primären Involutionen, deren ∞^1 Doppelstrahlen die Elemente zweier Strahlenbüschel erster Ordnung sind und deren Strahlenpaare als einen Strahl die vereinigten Leitgeraden w der Kongruenz enthalten,

3. die primären Involutionen, bei denen jeder Doppelstrahl mit einem zweiten vereinigt ist, und die ∞^1 vereinigten Doppelstrahlen einen Strahlenbüschel erster Ordnung bilden.

In einer parabolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz liegen ∞^3 primäre Involutionen.

E.

Die sekundären Involutionen auf einer parabolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz.

17. Jedem zu den vereinigten Leitgeraden w einer parabolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 windschiefen Strahle ist durch P_1^1 der Strahl w als „Träger" der vereinigten Leitgeraden zugeordnet. Hingegen ordnet P_1^1 jedem mit w inzidenten Strahle g alle Strahlen eines Büschels erster Ordnung zu. Der Büschel ist konzentrisch mit dem in der Ebene wg enthaltenen Strahlenbüschel von P_1^1 und liegt in der Ebene des Kongruenzstrahlenbüschels mit dem Mittelpunkte wg. Sind demnach die Strahlen beider Regelscharen einer Fläche zweiter Ordnung durch P_1^1 involutorisch gepaart, so bilden die Strahlenpaare der einen involutorischen Regelschar eine parabolische Involution mit zwei mit w vereinigten Doppelstrahlen und die der andern eine hyperbolische oder elliptische Involution.

Alle in P_1^1 enthaltenen ∞^4 Raumvierseite sind ausgeartet. Das eine Paar Gegenseiten bildet der doppelt zu zählende Träger der vereinigten Leitgeraden w, das andere Paar bilden zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Kongruenzstrahlen. Jedes dieser ausgearteten Raumvierseite ist die Basiskurve eines F^2-Büschels, dessen Flächen zwei involutorische Regelscharen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes von P_1^1 tragen[7]). Die Flächen eines solchen F^2-Büschels berühren einander längs des Strahles w. Eine von ihnen zerfällt in zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlenbüschel erster Ordnung. Jedem Strahle des einen Strahlenbüschels sind durch P_1^1 alle Strahlen des andern zugeordnet.

Die Strahlen von P_1^1 sind paarweise gemeinsame reziproke Polaren für alle Flächen eines jeden dieser F^2-Büschel. Alle diese Strahlenpaare bilden auf der Kongruenz eine sekundäre Involution (**1.**). Die Kongruenz trägt ∞^4 solcher sekundären Involutionen. Jede enthält ∞^1 involutorische Regelscharen zweiter Ordnung und ∞^1 Paare einander zugeordneter Strahlenbüschel erster Ordnung, die als ∞^1 zerfallene involutorische Regelscharen zweiter Ordnung aufzufassen sind. Sowohl die Träger dieser zerfallenen, wie jener nicht zerfallenen involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung bilden einen F^2-Büschel. Jede Fläche eines dieser beiden F^2-

Büschel ist für alle die sekundäre Involution bedingenden Flächen zweiter Ordnung polarinvariant.

Die Mittelpunkte je zweier einander zugeordneten Strahlenbüschel erster Ordnung in einer solchen von P_1^1 getragenen sekundären Involution bilden auf den vereinigten Leitgeraden w der Kongruenz die Punktepaare einer involutorischen Punktreihe. Je nachdem die involutorische Punktreihe hyperbolisch oder elliptisch ist, liegen in jeder der sekundären Involutionen zwei reelle oder konjugiert imaginäre in je einen involutorischen Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene involutorische Regelscharen zweiter Ordnung. Die Doppelstrahlen dieser beiden involutorischen Strahlenbüschel sind die Doppelstrahlen der betreffenden sekundären Involution. Sie hat sonach zwei mit dem Träger von w vereinigte und zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) windschiefe Doppelstrahlen.

18. Alle Punkte der vereinigten Leitgeraden w einer allgemeinen parabolischen Kongruenz P_1^1 sind die Mittelpunkte perspektiv involutorischer zentrischen Bündel des geschart involutorischen Raumes von P_1^1. In einem solchen perspektiv involutorischen Bündel mit dem Mittelpunkte X ist der Strahl w die Involutionsachse und die Ebene ξ des Strahlenbüschels X von P_1^1 die Involutionsebene. ξ ist eine Ebene des Strahles w. Somit berühren die im perspektiv involutorischen Bündel X enthaltenen involutorischen Strahlenkegel zweiter Ordnung längs w die Ebene ξ. Sie ordnen sich zu ∞^2 Büscheln, die aus längs des Trägers von w einander vierstrahlig berührenden Kegeln zweiter Ordnung bestehen. Für alle Kegel eines solchen Büschels ist zu den Strahlen jedes in P_1^1 gelegenen Strahlenbüschels je ein mit dem Punkte X inzidenter Strahl von P_1^1 polar. Die durch die ∞^2 Paare dieser reziprok polaren Kongruenzstrahlen auf w ausgeschnittenen Punktepaare bilden also eine parabolische Punktinvolution mit den vereinigten Doppelpunkten X. Jeder Kegel unseres Büschels bedingt auf der parabolischen Kongruenz P_1^1 die nämliche sekundäre Involution mit vier mit dem Strahle w vereinigten Doppelstrahlen. Zu jedem der ∞^2 Büschel von Kegeln zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkte X, deren Elemente längs des Trägers von w einander vierstrahlig berühren, gehört eine solche sekundäre Involution. Es ergeben sich also, wenn der Punkt X die Gerade w beschreibt, deren ∞^3.

In **17** und dem vorstehenden Absatze ist somit bewiesen:

Auf einer parabolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz liegen

1. die sekundären Involutionen, deren eines Paar Doppelstrahlen mit dem Träger der vereinigten Leitgeraden w der Kongruenz zusammenfällt und deren anderes Paar zwei windschiefe reelle Kongruenzstrahlen sind,

2. die sekundären Involutionen, deren eines Paar Doppelstrahlen mit dem Träger der vereinigten Leitgeraden w der Kongruenz zusammenfällt und deren anderes Paar zwei windschiefe konjugiert imaginäre Kongruenzstrahlen sind,
3. die sekundären Involutionen, deren vier Doppelstrahlen mit dem Träger der vereinigten Leitgeraden w der Kongruenz zusammenfallen.

F.
Metrische Involutionen auf einer parabolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz.

a) Die beiden symmetrischen primären Involutionen.

19. Bei einer parabolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz P_1^1, deren vereinigte Leitgeraden w also von einem eigentlichen Strahle getragen werden, ist die Fluchtebene von P_1^1, die beide Nebensymmetrieachsen der Kongruenz enthält, eine eigentliche mit w inzidente Ebene. Mit dem Strahle w fällt die eine Nebensymmetrieachse von P_1^1 zusammen. Die andere c steht auf ihr im Mittelpunkte des Kongruenzstrahlenbüschels senkrecht, der in der zur Fluchtebene senkrechten Ebene des Strahles w liegt[28]).

Das in P_1^1 einscharig enthaltene gleichseitige Paraboloid F_w^2 mit der Nebensymmetrieachse w hat zur zweiten Nebensymmetrieachse die Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz und zur Hauptachse deren Nebensymmetrieachse c. Das in P_1^1 einscharig enthaltene gleichseitige Paraboloid F_c^2 mit der Nebensymmetrieachse c zerfällt. Seine in der Kongruenz gelegene Regelschar besteht aus den zu c senkrechten Strahlen der Fluchtebene von P_1^1 und aus den mit c inzidenten Strahlen der zur Fluchtebene senkrechten Ebene von w. Die Leitschar dieser zerfallenen Regelschar setzt sich aus den mit dem Punkte cd und der Fluchtebene inzidenten Strahlen und aus den Parallelen zu w in der zur Fluchtebene senkrechten Ebene von w zusammen. Mit F_w^2 hat das zerfallene gleichseitige Paraboloid F_c^2 die zweite Nebensymmetrieachse c_d gemein. w ist seine Doppelpunktsgerade und zugleich seine Hauptachse.

Die durch das gleichseitige Paraboloid F_w^2 in P_1^1 bedingte symmetrische primäre Involution (**10.**) hat den Träger von w zur Symmetrieachse. Ihre Strahlenpaare bestehen aus je zwei mit w inzidenten Tangenten von F_w^2 die für diese Fläche reziprok polar sind. Jeder Punkt von w ist der Mittel-

[28]) Reye, Die Geometrie der Lage, zweite Abteilung, vierte Auflage, Stuttgart, 1907, S. 130.

punkt eines in der Involution enthaltenen symmetrisch involutorischen Strahlenbüschels erster Ordnung, dessen Doppelstrahlen w und der auf w in dem Punkte normale Kongruenzstrahl sind.

Die durch das zerfallene gleichseitige Paraboloid F_c^2 in P_1^1 bedingte symmetrische primäre Involution hat die Symmetrieachse c. In ihr sind also je zwei Strahlenbüschel erster Ordnung der Kongruenz paarweise einander zugeordnet, deren Mittelpunkte zu c symmetrisch liegen. Die Ebenen je zweier einander zugeordneten Strahlenbüschel erster Ordnung bilden die Ebenenpaare eines symmetrisch involutorischen Ebenenbüschels erster Ordnung. Seine Doppelebenen sind die Fluchtebene von P_1^1 und die in w zu ihr normale Ebene. Je zwei einander zugeordnete Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 sind kongruent. Kurz:

In einer parabolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz gibt es zwei primäre symmetrische Involutionen. In der einen sind je zwei einander zugeordnete Strahlen inzident und symmetrisch zu dem Strahle von w. In der andern sind je zwei einander zugeordnete Strahlenbüschel erster Ordnung kongruent, und ihre Mittelpunkte liegen symmetrisch zu der vom Strahle von w verschiedenen Nebensymmetrieachse c der Kongruenz.

b) Die orthogonale sekundäre Involution.

20. Bei einer parabolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 liegt auf der einen Regelschar des Fokalparaboloides P^2 von P_1^1 eine parabolische Involution, deren vereinigte Doppelstrahlen denselben Träger wie die vereinigten Leitgeraden w der Kongruenz haben, auf der andern eine elliptische, deren einander zugeordnete Strahlen windschief rechtwinklig sind [29]). Der Träger von w und die Nebensymmetrieachse c der parabolischen Kongruenz (**19.**) sind die Nebensymmetrieachsen des Fokalparaboloides P^2. Seine Hauptachse ist die Hauptsymmetrieachse c_d von P_1^1.

Das Fokalparaboloid P^2 der parabolischen Kongruenz P_1^1 bedingt auf ihr eine orthogonale sekundäre Involution (**11.**). Ihre Strahlenpaare bestehen aus reziprok polaren Kongruenzstrahlen (**1.**) für P^2. Nun sind der Mittelpunkt und die Ebene jedes Strahlenbüschels erster Ordnung von P_1^1 bzw. mit zwei einander zugeordneten rechtwinklig windschiefen Strahlen von P^2 inzident. Also gilt:

Die Strahlenpaare der orthogonalen sekundären Involution auf einer parabolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 und die Paare ihrer einander zugeordneten Strahlenbüschel erster Ordnung werden aus dem Träger der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 durch die Ebenenpaare eines orthogonalen Ebenenbüschels erster Ordnung projiziert.

---

[29]) Die unter [11]) angeführte Abhandlung, Nr. 16.

21. Zwischen zwei einander zugeordneten Strahlen a, a_0 der orthogonalen sekundären Involution auf der parabolischen allgemeinen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 mit den vereinigten Leitgeraden w besteht rechnerisch eine sehr einfache Beziehung.

Zwei mit dem Träger von w inzidente rechtwinklig windschiefe Geraden s, s', die durch P_1^1 einander zugeordnet sind, bilden nämlich ein Strahlenpaar der elliptisch involutorischen Regelschar auf dem Fokalparaboloide P^2 von P_1^1. Außerdem sind die in der orthogonalen sekundären Involution einander zugeordneten Kongruenzstrahlen a, a_0 ein Paar reziproker Polaren für das Fokalparaboloid (**20.**). Ist demnach a mit dem Punkte sw, also a_0 mit dem Punkte $s'w$ inzident, so haben a, a_0 wechselseitig noch mit s, s' zwei Punkte $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$ eines zum Träger von w windschiefen Strahles von P^2 gemein.

Es sei nun durch den Träger von w und (**19.**) die beiden Achsen c_d und c von P_1^1 ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte O bestimmt. Es sei ferner diejenige Richtung von s bzw. s' als positive bezeichnet, die mit der positiven Richtung von c_d einen spitzen Winkel einschließt, und es sei endlich σ der Winkel der positiven Richtungen von s und c_d. Dann gilt, da die zum Träger von w parallelen Leitebenen von P^2 zur Fluchtebene von P_1^1 senkrecht stehen, die Gleichung:

$$S\mathfrak{S} \sin\sigma = S'\mathfrak{S}' \cos\sigma$$

oder

$$(\alpha) \qquad \frac{\mathfrak{S}'S'}{S\mathfrak{S}} = \operatorname{tang}\sigma.$$

Bezeichnet e den absoluten Wert des Abstandes der Achse c_d von jeder der beiden durch P_1^1 einander zugeordneten rechtwinklig windschiefen Geraden von P^2, deren positive Richtungen mit der von c_d den Winkel $\frac{\pi}{4}$ einschließen, so gilt außerdem[30]):

$$OS \operatorname{tang}\sigma = e,$$
$$OS' \cot\sigma = e.$$

Hieraus folgt:

$$(\beta) \qquad \frac{OS'}{OS} = \operatorname{tang}^2\sigma$$

und aus (α) und (β):

$$\left(\frac{S'\mathfrak{S}'}{S\mathfrak{S}}\right)^2 = \frac{OS'}{OS}.$$

Demnach bestehen zwischen den Strecken $S\mathfrak{S}$, $S'\mathfrak{S}'$ und den Strecken OS, OS', wenn λ einen reellen Parameter bedeutet, die Beziehungen:

$$S\mathfrak{S} = \lambda\sqrt{OS}, \qquad S'\mathfrak{S}' = \lambda\sqrt{OS'}.$$

[30]) Jolles, Die helikoidische Invarianz des linearen Strahlenkomplexes und eine neue Definition seines Parameters, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig. **26** (1917), Nr. 3.

Berücksichtigt man, daß die Strecken $S\mathfrak{S}'$, $S'\mathfrak{S}$ bzw. auf den Strahlen a, a_0 liegen, so stellen diese Gleichungen auch einfache metrische Beziehungen dar, die von den beiden einander zugeordneten Strahlen a, a_0 der von P_1^1 getragenen orthogonalen sekundären Involution zu erfüllen sind.

G.
Metrische Involutionen auf metrischen linearen Strahlenkongruenzen.

a) Die hyperbolischen linearen Strahlenkongruenzen mit einer unendlich fernen Leitgerade.

α) Die axial translatorische lineare Strahlenkongruenz.

22. Die axial translatorische lineare Strahlenkongruenz H_1^1 hat eine eigentliche Leitgerade u und eine unendlich ferne u schiefwinklig kreuzende v_∞. In jeder Ebene von v_∞ liegt ein zu u normaler Kongruenzstrahl. Er ist eine Hauptsymmetrieachse von H_1^1. Die axial translatorische Kongruenz H_1^1 hat also ∞^1 Hauptsymmetrieachsen. Alle einscharig in H_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung bilden ein Gebüsch[2]) von Paraboloiden. In ihm liegen ∞^2 gleichseitige Paraboloide. Jedes enthält eine Normale der Ebenen von v_∞. Somit gehen diese gleichseitigen Paraboloide durch den mit diesen Normalen inzidenten unendlich fernen Kongruenzstrahl und bilden einen Bündel[31]). Die Fluchtebene von H_1^1 fällt mit der unendlich fernen Ebene zusammen. H_1^1 hat also keine Nebensymmetrieachsen und trägt keine symmetrischen primären Involutionen. Die aufeinander senkrechten und durch H_1^1 einander zugeordneten Ebenen α, α' eines Kongruenzstrahles a hälften nun die von den Ebenen au, av_∞ gebildeten Winkel. Beschreibt der Strahl a den in der Ebene av_∞ enthaltenen Strahlenbüschel von H_1^1, so umhüllen die durch H_1^1 einander zugeordneten und aufeinander senkrechten Ebenen α, α' einen Kegel zweiter Ordnung und zwar einen Hachetteschen[32]) Kegel, dessen Strahlen durch H_1^1 paarweise einander zugeordnet sind. Er hat die eigentliche Leitgerade u der Kongruenz zur Fokalachse und weist ihr die Polarebene av_∞ zu. Ebenso wie die Ebene av_∞ bestimmt jede zu ihr parallele Ebene einen im geschart involutorischen Raume von H_1^1 gelegenen involutorischen Hachetteschen Kegel mit der Fokalachse u, der u die mit seinem Mittelpunkte inzidente Ebene von v_∞ als Polarebene zuweist. Die Hachetteschen Kegel gehen

---

[31]) Die unter [1]) angeführte Abhandlung, Nr. 4.

[32]) Theodor Meyer, Über die Kegel des Pappus und des Hachette, Straßburger Inaug.-Diss., Berlin 1884.

durch denselben unendlich fernen im geschart involutorischen Raume von H_1^1 enthaltenen involutorischen Kegelschnitt. Je zwei seiner einander zugeordneten Punkte liegen auf einem Strahle des unendlich fernen Kongruenzstrahlenbüschels. Jede Ebene, der H_1^1 eine auf ihr normale Ebene zuordnet, ist nun eine Mittelebene[33]) von H_1^1. Somit schließen wir:

Der von den Mittelebenen einer allgemeinen linearen Strahlenkongruenz gebildete gleichseitige paraboloidische Bündel zweiter Ordnung[34]) *artet bei einer axial translatorischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 aus in ein Achsenflach zweiter Ordnung* (6.), *dessen Achsen einen unendlich fernen Strahlenbüschel zweiter Ordnung h_∞^2 bilden. In diesen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, den „Fokalstrahlenbüschel" von H_1^1, geht gleichzeitig das vom paraboloidischen Bündel umhüllte Fokalparaboloid der allgemeinen linearen Kongruenz über. Dabei vereinigen sich die beiden vom Fokalparaboloide getragenen Fokalinvolutionen der allgemeinen linearen Strahlenkongruenz mit der von h_∞^2 getragenen Fokalinvolution von H_1^1. Ihr Involutionszentrum ist der unendlich ferne Punkt U^∞ der eigentlichen Leitgerade u und ihre Involutionsachse die uneigentliche Leitgerade v_∞ der Kongruenz. Aus den Punkten von u wird h_∞^2 durch Ebenenkegel zweiter Ordnung projiziert, die Hachettesche Kegel umhüllen.*

Jede mit der Fokalinvolution von H_1^1 verbundene einscharig in der Kongruenz enthaltene Regelfläche zweiter Ordnung zerfällt. Ihre in H_1^1 gelegene Regelschar besteht aus dem unendlich fernen Kongruenzstrahlenbüschel und aus dem Büschel paralleler mit der Leitgerade u inzidenten Kongruenzstrahlen, die durch den Schnittpunkt der die Fläche bestimmenden Achsen des Achsenflaches gehen. In der Ebene dieses Büschels liegt auch der eine in der Leitschar der Fläche enthaltene involutorische Strahlenbüschel erster Ordnung. Seine Strahlen sind ebenfalls parallel, und seine Doppelstrahlen sind u und die unendlich ferne Gerade der Ebene. Der andere in der Leitschar enthaltene involutorische Strahlenbüschel erster Ordnung liegt in der unendlich fernen Ebene und hat das die Fläche bestimmende Achsenpaar zu Doppelstrahlen. Alle in einer Ebene von u enthaltenen, also parallelen Strahlen von H_1^1 haben für das in den Fokalstrahlenbüschel zweiter Ordnung h_∞^2 ausgeartete Fokalparaboloid der Kongruenz dieselbe Polare. D. h.:

Der Fokalstrahlenbüschel zweiter Ordnung h_∞^2 der axial translatorischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 bestimmt auf ihr eine orthogonale sekundäre Involution, bei der den Strahlen von H_1^1 in jeder Ebene der eigentlichen Leitgerade u der Kongruenz je ein unendlich ferner Kongruenzstrahl zugeordnet ist.

[33]) Die unter [11]) angeführte Abhandlung, Nr. 13.
[34]) A. a. O., Nr. 14.

β) Die helikoidische lineare Strahlenkongruenz.

23. Bei einer helikoidischen linearen Strahlenkongruenz ${}_hH_1^1$ liegt die eine Leitgerade v_∞ unendlich fern und kreuzt die andere u rechtwinklig. Alle einscharig in ${}_hH_1^1$ enthaltenen Flächen zweiter Ordnung sind gleichseitige Paraboloide mit der gemeinsamen Nebensymmetrieachse u. Sie ist gleichzeitig die Drehachse des von diesen Paraboloiden gebildeten rotatorischen F^2-Gebüsches. Jeder Strahl von ${}_hH_1^1$ ist eine Hauptsymmetrieachse der Kongruenz. Die helikoidische lineare Strahlenkongruenz hat also ∞^2 Hauptsymmetrieachsen. Nebensymmetrieachsen und von der Kongruenz getragene symmetrische primäre Involutionen sind nicht vorhanden (22).

Die durch ${}_hH_1^1$ einander zugeordneten senkrechten Ebenen aller in einer Ebene von v_∞ gelegenen Kongruenzstrahlen umhüllen einen Drehkegel mit der Drehachse u. Sonach bilden die Mittelebenen von ${}_hH_1^1$ ein rotatorisches Achsenflach zweiter Ordnung und die Achsen dieses Achsenflaches einen unendlich fernen zirkularen Strahlenbüschel zweiter Ordnung ${}_h\mathfrak{h}_\infty^2$, dessen Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt von u ist. ${}_h\mathfrak{h}_\infty^2$ ist der „Fokalstrahlenbüschel“ zweiter Ordnung von ${}_hH_1^1$. Er wird aus den Punkten der Drehachse u des rotatorischen Achsenflaches durch rotatorische Ebenenkegel zweiter Ordnung mit der Drehachse u projiziert. Je zwei Strahlen von ${}_h\mathfrak{h}_\infty^2$, deren Berührungspunkte auf einem (unendlich fernen) Kongruenzstrahle liegen, sind durch ${}_hH_1^1$ einander zugeordnet und bilden ein Strahlenpaar der von ${}_h\mathfrak{h}_\infty^2$ getragenen Fokalinvolution. Weitere Sätze über ${}_hH_1^1$ folgen aus denen für H_1^1 in **22.**

b) Die rotatorische lineare Strahlenkongruenz.

24. Jede der ∞^1 Nebensymmetrieachsen einer rotatorischen linearen Strahlenkongruenz ${}_rE_1^1$ ist eine Nebensymmetrieachse je eines einscharig in der Kongruenz enthaltenen gleichseitigen Paraboloides. Die anderen Nebensymmetrieachsen dieser gleichseitigen Paraboloide fallen mit der Hauptsymmetrieachse c_d von ${}_rE_1^1$ zusammen und ihre Hauptachsen mit der auf den beiden Nebensymmetrieachsen jeder Fläche senkrechten Nebensymmetrieachse der Kongruenz. Alle einscharig in ${}_rE_1^1$ enthaltenen gleichseitigen Paraboloide haben mit der Kongruenz je eine Nebensymmetrieachse gemein. Jedes von ihnen bestimmt eine von ${}_rE_1^1$ getragene symmetrische primäre Involution. Die Symmetrieachse der Involution fällt zusammen mit der auf dem gleichseitigen Paraboloide gelegenen Nebensymmetrieachse von ${}_rE_1^1$. Eine rotatorische lineare Strahlenkongruenz trägt ∞^1 symmetrische primäre Involutionen. In jeder ist einem Strahle s von ${}_rE_1^1$ ein anderer Strahl der Kongruenz zugeordnet. Die Gesamtheit

dieser Strahlen bildet die durch s gehende Regelschar einer einscharig in rE_1^1 enthaltenen Drehfläche zweiter Ordnung mit der Drehachse c_d.

25. Der von den Mittelebenen einer linearen Strahlenkongruenz gebildete gleichseitige paraboloidische Ebenenbündel zweiter Ordnung[34]) zerfällt bei einer rotatorischen linearen Strahlenkongruenz rE_1^1 in zwei durch die Kongruenz einander zugeordnete zentrische Bündel erster Ordnung. Ihre Mittelpunkte liegen auf der Drehachse c_d von rE_1^1 und sind durch die Kongruenz einander zugeordnet. Sie bilden das aus dem Mittelpunkte C und aus dem unendlich fernen Punkte C'_∞ von c_d bestehende Elementenpaar der von c_d im geschart involutorischen Raume von rE_1^1 getragenen Punktinvolution[35]).

Die durch rE_1^1 einander zugeordneten zentrischen Bündel C, C'_∞ umhüllen ∞^1 zerfallene gleichseitige Paraboloide. Nämlich jede der beiden Regelscharen eines solchen Paraboloides setzt sich zusammen aus zwei durch rE_1^1 einander zugeordneten Strahlenbüscheln erster Ordnung, und beide Regelscharen werden getragen von demselben Paare durch rE_1^1 einander zugeordneter, also zueinander normalen Ebenen von c_d. Der eine Strahlenbüschel jeder zerfallenen Regelschar ist ein Büschel zu c_d paralleler Strahlen, der andere hat den Mittelpunkt C. Alle diese ∞^1 zerfallenen gleichseitigen Paraboloide sind Fokalparaboloide[12]) der rotatorischen linearen Strahlenkongruenz rE_1^1. Sie bilden einen rotatorischen F^2-Büschel mit der in seine Drehachse c_d ausgearteten Basiskurve. Mit jeder der beiden Regelscharen eines solchen Fokalparaboloides ist ein Büschel orthogonaler Regelflächen zweiter Ordnung verbunden[36]). Seine Flächen berühren einander längs c_d. Jede durch c_d gehende einscharig in rE_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung liegt in einem solchen F^2-Büschel. Der Bündel aller in rE_1^1 einscharig enthaltenen durch c_d gehenden Flächen besteht somit aus lauter orthogonalen Regelflächen zweiter Ordnung[35]). Er ist rotatorisch, seine Drehachse ist c_d, und er enthält ∞^1 Büschel längs c_d einander berührender orthogonalen Regelflächen zweiter Ordnung. Bei einer vollen Drehung um c_d geht jeder von ihnen nacheinander in alle übrigen über.

Zwei durch rE_1^1 einander zugeordnete Ebenen von c_d schneiden jede Fläche der beiden F^2-Büschel, die bzw. mit den Regelscharen eines der zerfallenen Fokalparaboloide von rE_1^1 verbunden sind, noch in zwei durch rE_1^1 einander zugeordneten Strahlen. Die Paare einander zugeordneter Strahlen bilden zwei Paare einander zugeordneter Strahlenbüschel erster Ordnung. Jedes dieser Paare einander zugeordneter Strahlenbüschel

[35]) A. a. O., Nr. 51.
[36]) A. a. O., Nr. 18—21.

ist die Regelschar einer zerfallenen Regelfläche zweiter Ordnung, deren Leitschar das andere Paar bildet. Die Strahlen der zerfallenen Regelfläche sind durch ${}_rE_1^1$ paarweise einander zugeordnet, und die Fläche selbst liegt in dem durch das zerfallene Fokalparaboloid gehenden F^2-Büschel, dessen Flächen je zwei durch ${}_rE_1^1$ involutorisch gepaarte Regelscharen tragen[7]). Dieser F^2-Büschel besteht hiernach aus lauter zerfallenen Flächen zweiter Ordnung. Jede von ihnen hat zu Doppelpunkten zwei der von c_d getragenen durch ${}_rE_1^1$ einander zugeordneten Punkte, zu Doppelebenen zwei der von c_d getragenen durch ${}_rE_1^1$ einander zugeordneten Ebenen. Beschreibt das zerfallene Fokalparaboloid den Büschel aller Fokalparaboloide von ${}_rE_1^1$, so beschreibt der durch das Fokalparaboloid gehende F^2-Büschel, dessen Flächen durch ${}_rE_1^1$ involutorisch gepaarte zerfallene Regelscharen tragen, einen rotatorischen F^2-Bündel zerfallener Flächen mit der Drehachse c_d.

In der orthogonalen sekundären Involution auf einer rotatorischen linearen Strahlenkongruenz ist jeder Kongruenzstrahl der Drehachse c_d zugeordnet.

c) Die planar translatorische lineare Strahlenkongruenz.

26. Die planar translatorische lineare Strahlenkongruenz ${}_pP_1^1$ ist parabolisch. Ihre vereinigten Leitgeraden w_∞ liegen unendlich fern. Sie spiegelt sich an allen w_∞ rechtwinklig kreuzenden Geraden in sich selbst, und diese parallelen Geraden sind die Nebensymmetrieachsen von ${}_pP_1^1$. Die Kongruenz hat also ∞^2 Nebensymmetrieachsen und trägt ∞^2 symmetrische primäre Involutionen. Durch jede Nebensymmetrieachse von ${}_pP_1^1$ geht ein einscharig in der Kongruenz enthaltenes gleichseitiges Paraboloid. Die einscharig in ${}_pP_1^1$ enthaltenen gleichseitigen Paraboloide bilden einen Bündel.

Alle Ebenen jeder Nebensymmetrieachse von ${}_pP_1^1$ sind Mittelebenen[33]) der Kongruenz. Der von den Mittelebenen einer allgemeinen linearen Strahlenkongruenz gebildete gleichseitige paraboloidische Ebenenbündel zweiter Ordnung[34]) artet sonach bei der planar translatorischen in einen doppelt zu zählenden zentrischen Bündel mit unendlich fernem Mittelpunkte aus. Dabei geht das Fokalparaboloid in einen unendlich fernen doppelt zu zählenden „Fokalstrahlenbüschel“ erster Ordnung über. Die von letzterem getragene Fokalinvolution (**22.**) ist parabolisch. Ihre beiden vereinigten Doppelstrahlen fallen in den Träger der beiden vereinigten Leitgeraden w_∞ von ${}_pP_1^1$.

II.

Die linearen Strahlenkongruenzen und ihre Bündel von Mittelebenen.

27. Die in den vorstehenden Untersuchungen weiter ausgebaute Theorie der durch die linearen Strahlenkongruenzen bestimmten Bündel von Mittelebenen führt zu folgender sich organisch aufbauenden Einteilung aller nicht zerfallenen linearen Strahlenkongruenzen:

1. Die hyperbolische, die elliptische und die parabolische allgemeine lineare Strahlenkongruenz haben je einen gleichseitigen paraboloidischen Bündel zweiter Ordnung von Mittelebenen.
2. Die axial translatorische und die helikoidische lineare Strahlenkongruenz haben je ein Achsenflach zweiter Ordnung von Mittelebenen. Bei der ersteren Kongruenz ist es allgemein (**22.**), bei der letzteren rotatorisch (**23.**).
3. Die rotatorische lineare Strahlenkongruenz hat zwei zentrische Bündel von Mittelebenen (**25.**).
4. Die planar translatorische lineare Strahlenkongruenz hat einen doppelt zu zählenden zentrischen Bündel von Mittelebenen (**26.**).

Der gleichseitige paraboloidische Bündel zweiter Ordnung von Mittelebenen ist also mit der allgemeinen, und jede seiner Ausartungen mit einer bestimmten metrischen linearen Strahlenkongruenz verknüpft.

Berlin-Halensee, den 4. Mai 1926.

(Eingegangen am 18. Mai 1926.)

Note on equivalent transformations.

By

Peter Field in Ann Arbor.

1. An equivalent transformation is a transformation in which a given element of area is transformed into an equal area. The condition which must be satisfied in order that a transformation may be of this kind is given in text books on differential geometry. Recently Grave [1]) and Scheffers [2]) have studied the problem, with the restriction however, that the areas are plane. The purpose of this brief note is to consider the problem of an equivalent transformation between a surface and a plane.

2. Let x, y, z be rectangular cartesian coordinates and let

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v) \tag{1}$$

be the equations of a surface. The functions φ, χ, ψ are of course supposed to be differentiable with respect to either u or v. Then if X and Y are rectangular cartesian coordinates, and if

$$X = X(u, v), \quad Y = Y(u, v)$$

there is established a correspondence between the points in the XY plane and the points on the surface. The areas are preserved if

$$X_u Y_v - Y_u X_v = \pm \sqrt{EG - F^2}, \tag{2}$$

where

$$E = \varphi_u^2 + \chi_u^2 + \psi_u^2,$$
$$G = \varphi_v^2 + \chi_v^2 + \psi_v^2,$$
$$F = \varphi_u \varphi_v + \chi_u \chi_v + \psi_u \psi_v,$$

and the subscripts denote, as usual, partial differentiation [3]).

---

[1]) Journal de Mathématiques 5me Série 2 (1896), p. 317–361.

[2]) Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 180–186.

[3]) Numerous references are given by Voss in his article „Abbildung und Abwicklung zweier Flächen aufeinander", Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, III D 6a.

3. In the particular case where equations (1) represent a surface of revolution, they may be written[4])

$$x = p(u)\cos v, \quad y = p(u)\sin v, \quad z = q(u), \tag{3}$$

v being an angle and u the length of arc measured along the meridian, and equation (2) becomes

$$X_u Y_v - Y_u X_v = \pm p(u). \tag{4}$$

This condition is satisfied by putting

$$X = v, \quad Y_u = \mp p(u). \tag{5}$$

Hence we may take

$$X = v, \quad Y = \mp \int_0^u p(u)\,du, \quad \text{i. e. } \frac{dY}{du} = \mp p(u),$$

and the points on the surface are represented by points on the plane in such a way that the areas are preserved.

4. It seems strange that attention has not been called to the fact that the same method gives a solution for the general equation (2). The right hand member (2) is in general a function of u and v and the only modification of equations (5) that is needed to get a solution of equation (2) is to use a partial derivative instead of a total; i. e. to take

$$X = v \quad \text{and } Y \text{ so that } \frac{\partial Y}{\partial u} = \mp \sqrt{EG - F^2}.$$

5. Application to the ellipsoid. For convenience write the equation of the ellipsoid in the form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \quad \text{with} \quad a > b > c > 0$$

and put $y = x \tan\theta$.

Then,

$$x = \sqrt{\frac{1 - cz^2}{a + b\tan^2\theta}}, \quad y = \tan\theta \sqrt{\frac{1 - cz^2}{a + b\tan^2\theta}}, \quad z = z$$

will be taken as the parametric equations of the ellipsoid; θ and z being the parameters.

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{(1 - cz^2)(a^2 + b^2\tan^2\theta)\sec^4\theta}{(a + b\tan^2\theta)^3},$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 = \frac{c^2 z^2 \sec^2\theta}{(a + b\tan^2\theta)(1 - cz^2)} + 1,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{cz(b - a)\tan\theta}{(a + b\tan^2\theta)^2},$$

[4]) See for instance: Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie **2**, 3. Aufl., S. 48.

$$EG - F^2 = \frac{1}{(a+b\tan^2\theta)^2}\left[\frac{(a^2+b^2\tan^2\theta)\sec^4\theta}{a+b\tan^2\theta}\right.$$
$$\left. - z^2 c\left(\frac{\sec^4\theta\{a^2+b^2\tan^2\theta\}\{a-c+\overline{b-c}\tan^2\theta\}}{(a+b\tan^2\theta)^2} + c\,\overline{b-a}^2\tan^2\theta\right)\right]$$
$$= \frac{A^2-B^2z^2}{(a+b\tan^2\theta)^2} = \frac{B^2\left(\frac{A^2}{B^2}-z^2\right)}{(a+b\tan^2\theta)^2}.$$

This gives

$$(7) \qquad X=\theta, \quad Y=\frac{B}{a+b\tan^2\theta}\left[\frac{z}{2}\sqrt{\frac{A^2}{B^2}-z^2}+\frac{A^2}{2B^2}\arcsin\frac{Bz}{A}\right].$$

The surface of the ellipsoid is represented by an area in the XY plane which is bounded by the lines $X=0$, $X=2\pi$ and the curves obtained by replacing z by $\pm\frac{1}{\sqrt{c}}$ and θ by X in the value for Y in equation (7). If we call B_1 and A_1 the values of B and A when θ is replaced by X, the equations of the two remaining boundary curves are

$$(8) \qquad Y=\pm\frac{B_1}{a+b\tan^2 X}\left(\frac{1}{2\sqrt{c}}\sqrt{\frac{A_1^2}{B_1^2}-\frac{1}{c}}+\frac{A_1^2}{2B_1^2}\arcsin\frac{B_1}{A_1\sqrt{c}}\right).$$

At $X=\frac{\pi}{2}$ and $\frac{3}{2}\pi$ A_1, B_1, and $\tan^2 X$ become infinite, but in such a way that Y is finite.

6. For $a=b$, the curves represented by equations (8) become the straight lines

$$(9) \qquad Y=\pm\left[\frac{1}{2a}+\frac{1}{2\sqrt{c(a-c)}}\arcsin\sqrt{\frac{a-c}{a}}\right].$$

The surface of the ellipsoid of revolution of semiaxes $\frac{1}{\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}}$ is represented by a rectangle whose sides are 2π and

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{c(a-c)}}\arcsin\sqrt{\frac{a-c}{a}}.$$

For $a=b=c$, $B=0$ and equations (8) become $y=\pm\frac{1}{c}$.

Univ. of Mich., April 1926.

(Eingegangen am 27. August 1926.)

Über die Regularität von Funktionen reellen Arguments.

Von

Walter Schnee in Leipzig.

Herr Pringsheim hat sich in mehreren Arbeiten mit den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür beschäftigt, daß die formal gebildete Potenzreihenentwicklung einer Funktion diese auch wirklich darstellt. In der letzten dieser Arbeiten[1]) hat er zusammenfassend einen sehr allgemeinen und zugleich ganz elementar beweisbaren Satz aufgestellt, bei welchem es sich, entsprechend dem Wesen der Aufgabe, darum handelt, möglichst wenig besagende Bedingungen, deren Notwendigkeit also möglichst trivial ist, auch als hinreichend nachzuweisen. Dieser Satz lautet folgendermaßen:

„Ist $f(x)$ im Intervall $x_0 \leqq x < x_0 + R$ eindeutig, endlich und unbeschränkt differenzierbar, so gilt die Entwicklung:

$$f(x_0+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \cdot h^{\nu} \quad \text{für} \quad 0 \leqq h < R,$$

wenn für jedes $r < R$ die Beziehung besteht:

(a) $$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot r^n = 0,$$

und wenn, wenn Annahme von $r < R$, für jedes $\varrho < R - r$

(b) $$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0+h) \cdot \varrho^n = 0$$

wird und zwar gleichmäßig für $0 \leqq h \leqq \varrho$.

Zusatz. Die Bedingung (b) läßt sich auch durch die folgende ersetzen: Es muß, nach Annahme von $r < R$,

$$\frac{1}{n!} | f^{(n)}(x_0+h) | \cdot \varrho_0^n$$

[1]) „Über den Taylorschen Lehrsatz", Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München, Jahrgang 1912, S. 137—154.

für ein gewisses $\varrho_0 < R - r$ und $0 \leqq h \leqq \varrho_0$ unter einer endlichen Schranke bleiben, etwa

$$\text{(c)} \qquad \frac{1}{n!} |f^{(n)}(x_0 + h)| \cdot \varrho_0^n < g.$$

Denn offenbar folgt (c) für $\varrho_0 \leqq \varrho$ ohne weiteres aus (b). Nimmt man andererseits $\varrho < \varrho_0$, so folgt auch umgekehrt (b) aus (c)."

Herr Neder hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß dieser Satz nicht dem Wortlaut entsprechend aufgefaßt werden kann[2]); es soll daher in der vorliegenden Arbeit ein Satz aufgestellt werden, welcher in demselben Sinne allgemein ist wie der zitierte, der einen sehr durchsichtigen Wortlaut hat und einen ebenso elementaren wie kurzen Beweis gestattet. Dabei werde ich natürlich dem sehr eleganten Grundgedanken der Beweisführung von Herrn Pringsheim folgen, nämlich gewissermaßen die Funktion $f(x)$ durch Potenzreihenentwicklung in sukzessiven Punkten vom Nullpunkt aus auf der reellen Achse nach rechts fortzusetzen; dies trifft auch vom funktionentheoretischen Standpunkt aus den Kern der Sache. Die Schwierigkeit besteht nur in der von Herrn Pringsheim in der zitierten Arbeit besonders hervorgehobenen Tatsache, daß sich unbeschränkt differenzierbare Ausdrücke $f(x)$ herstellen lassen, die nur auf einer Seite einer bestimmten Stelle x_0 durch die Taylorsche Reihe darstellbar sind.

Ich gehe aus von dem bekannten grundlegenden Satz, welcher sich in wenigen Zeilen beweisen läßt:

Es habe die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

den Konvergenzradius ϱ. Dann ist

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\varrho}.$$

In diesen Satz können die Grenzfälle $\varrho = 0$ und $\varrho = \infty$ einbezogen werden. Daraus ergibt sich ohne weiteres:

I. Es sei die Funktion $f(x)$ reellen Arguments im Punkte $x = 0$ nebst Umgebung definiert und im Punkte $x = 0$ beliebig oft differenzier-

[2]) Herr Pringsheim leitet den Beweis mit den Worten ein: „Wird sodann nach Annahme von $r < R$ ein positives $\varrho < R - r$ fixiert ...", und in der Tat werden r und ϱ sodann festgehalten, bis sich die Gültigkeit der zu beweisenden Entwicklung für $0 \leqq h \leqq r$ ergibt, womit der Beweis beendet ist. Man muß also zuletzt $r < R$ an R heranrücken lassen; dadurch aber wird $\varrho < R - r$ beliebig klein, und die Voraussetzung (b) verliert sowohl wegen des Faktors ϱ^n *als auch namentlich wegen des Gültigkeitsintervalles* $0 \leqq h \leqq \varrho$ um so mehr an Inhalt, je weiter man mit dem Beweise gelangen will, d. h. je näher r an R liegt. Diese Grundanlage der Beweisführung entspricht auch dem Inhalt des Zusatzes.

bar (oder auch beliebig oft von rechts differenzierbar). Dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die formal gebildete Taylorsche Entwicklung der Funktion $f(x)$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu} \tag{1}$$

im Intervall $-1 < x < 1$ konvergiert, in der Ungleichung

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}} \leqq 1. \tag{2}$$

Der zu beweisende Satz lautet nun folgendermaßen:

II. *Es sei die Funktion $f(x)$ reellen Arguments für eine feste positive Zahl $\vartheta < 1$ im Intervall $0 \leqq x \leqq \vartheta$ stetig und für $0 \leqq x < \vartheta$ beliebig oft differenzierbar (im Punkte $x = 0$ von rechts); ferner sei (2) erfüllt. Dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Entwicklung (1) im Intervall $0 \leqq x \leqq \vartheta$ die Funktion $f(x)$ darstellt, darin, daß der Ausdruck*

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}} \tag{3}$$

gleichmäßig im Intervall $0 < x < \vartheta$ nach oben beschränkt ist[3]).

Dieser Satz läßt sich im Sinne einer bekannten funktionentheoretischen Aufgabe auch folgendermaßen formulieren, wobei gleich beide Umgebungen des Punktes $x = 0$ zusammengenommen werden mögen:

III. Es sei die Funktion $f(x)$ reellen Arguments für zwei feste positive Zahlen $\vartheta_1 \leqq 1$ und $\vartheta_2 \leqq 1$ im Intervall $-\vartheta_1 < x < \vartheta_2$ definiert. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß $f(x)$ zu einer im Innern des Einheitskreises regulären Funktion erweitert werden kann, bestehen dann darin, daß $f(x)$ im Intervall $-\vartheta_1 < x < \vartheta_2$ beliebig oft im Sinne der reellen Funktionentheorie differenzierbar ist, daß (2) gilt und daß für jede beliebig kleine positive Zahl ε der Ausdruck (3) gleichmäßig im Intervall $-\vartheta_1 + \varepsilon < x < \vartheta_2 - \varepsilon$ nach oben beschränkt ist.

Eine ähnliche notwendige und hinreichende Bedingung hat Herr O. Hölder[4]) aufgestellt; diese bezieht sich aber auf die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ anstatt der Potenzreihenkoeffizienten im Ausdruck (3) und liefert die Regularität von $f(x)$ im Streifen anstatt im Kreise.

---

[3]) Es genügt natürlich, anstatt (2) nur vorauszusetzen, daß der Limes superior für eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl ε eine Größe $\leqq \frac{1}{\vartheta + \varepsilon}$ hat.

[4]) „Bedingungen des analytischen Charakters für reelle Funktionen reellen Arguments", Berichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, **63** (1911), S. 388–401.

Einen spezielleren Inhalt hat der folgende Satz, der natürlich auch aus II folgt:

IV. Es sei die Funktion $f(x)$ reellen Arguments im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definiert. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß $f(x)$ zu einer ganzen Funktion von x erweitert werden kann, bestehen dann darin, daß $f(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig und im Intervall $a < x < b$ beliebig oft differenzierbar ist, daß für wenigstens einen Punkt x_0 des Intervalls[5]) die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!}} = 0$$

gilt und daß der Ausdruck (3) gleichmäßig im Intervall $a < x < b$ nach oben beschränkt ist.

Es sei noch bemerkt, daß wegen der Stirlingschen Formel

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}} = e \limsup_{n=\infty} \frac{\sqrt[n]{|f^{(n)}(x)|}}{n}$$

ist, so daß der Ausdruck (3) in allen Sätzen durch

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{|f^{(n)}(x)|}$$

ersetzt werden darf.

Indem wir nunmehr zum Beweise von II übergehen, stellen wir zunächst den folgenden Hilfssatz auf:

Es sei die Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

für $|x| < 1$ konvergent. Dann ist für jeden Punkt x im Innern des Einheitskreises

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}} \leqq \frac{1}{1-|x|}.$$

Dieser Satz ist funktionentheoretisch trivial. Denn einerseits ist der Limes superior gleich dem reziproken Wert des Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von $f(x)$ im Punkte x, andererseits ist dieser Konvergenzradius aber $\geqq 1 - |x|$, da ja auf der Peripherie des Konvergenzkreises wenigstens ein singulärer Punkt der dargestellten Funktion liegen muß. Zugleich zeigt diese Überlegung, daß die Abschätzung des Limes superior nicht verbessert werden kann.

Elementarer Beweis. Da

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqq 1$$

---

[5]) Falls $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ ist, muß natürlich $f(x)$ in diesem Punkt vom Innern des Intervalls aus beliebig oft differenzierbar sein.

ist, existiert nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine positive Zahl n_0, so daß für alle $n \geqq n_0$

$$|a_n| \leqq (1+\varepsilon)^n$$

ist; dabei kann ε so klein angenommen werden, daß die Zahl $\eta = (1+\varepsilon)|x| < 1$ ist. Dann ist für $n \geqq n_0$

$$|f^{(n)}(x)| = \left| \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu(\nu-1)\dots(\nu-n+1)\, a_\nu x^{\nu-n} \right|$$

$$\leqq (1+\varepsilon)^n \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu(\nu-1)\dots(\nu-n+1)\,\eta^{\nu-n}$$

$$= (1+\varepsilon)^n \frac{d^n}{d\eta^n} \frac{1}{1-\eta} = \frac{n!\,(1+\varepsilon)^n}{(1-\eta)^{n+1}};$$

hieraus aber folgt

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}} \leqq \frac{1+\varepsilon}{1-\eta},$$

und der Grenzübergang $\varepsilon = +0$ ergibt die Behauptung.

Aus dem Hilfssatz folgt, daß die Bedingung des Satzes II notwendig ist; es ist also nur noch zu zeigen, daß sie auch hinreichend ist. Aus der Voraussetzung über den Ausdruck (3) folgt für $0 < x < \vartheta$ und $n \geqq 0$:

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}} \leqq \frac{1}{r} < m,$$

wo r eine positive Zahl $\leqq \vartheta$ und m eine positive ganze Zahl $\geqq 2$ sein soll. In der endlichen Taylorschen Entwicklung[6]) der Funktion $f(x)$ für den Punkt $x = 0$

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu + R_n, \qquad R_n = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} \cdot x^n,$$

wo $0 < x_1 < x$ ist, gilt also für $0 \leqq x < r$

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

womit die Entwicklung

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu \tag{4}$$

schon für $0 \leqq x < r$ nachgewiesen ist.

[6]) Ich lege hier keinen Wert darauf, die endliche Taylorsche Entwicklung mit dem Lagrangeschen Restglied, d. h. den Mittelwertsatz der Differentialrechnung zu vermeiden. Im Falle komplexer Werte von $f(x)$ kann natürlich dieser Schluß auf den reellen und imaginären Teil einzeln angewandt werden.

Wir setzen jetzt $\varrho = \frac{1}{m}$, so daß $0 < \varrho < r \leqq \vartheta < 1$ ist, und nehmen an, daß (4) im Intervall $0 \leqq x < (q-1)\varrho + r$ bereits bewiesen sei, wo q eine positive ganze Zahl ist. Zu beweisen ist, daß (4) dann auch im Intervall $0 \leqq x < q\varrho + r$ gilt, wenn $q\varrho + r \leqq \vartheta$ ist, und im Intervall $0 \leqq x \leqq \vartheta$, wenn $q\varrho + r > \vartheta$ ist. Dabei dürfen wir $(q-1)\varrho + r \leqq \vartheta$ annehmen, weil sonst die Annahme schon über den Inhalt des zu beweisenden Satzes hinausgehen würde; hieraus folgt, da $m\varrho = 1$ und $\varrho < r$ ist, $q \leqq m-1$ und $q\varrho < \vartheta$. Mit diesem Nachweis wird der Satz vollständig bewiesen sein; denn da (4) im Intervall $0 \leqq x < r$, also für $q = 1$ schon bewiesen ist, liefert der Induktionsschluß nach höchstens $m-1$ Schritten die zu beweisende Gültigkeit von (4) für $0 \leqq x \leqq \vartheta$.

Wir setzen die Taylorsche Entwickelung mit dem Lagrangeschen Restglied jetzt für den Punkt $x = q\varrho$ an und erhalten genau wie beim ersten Schritt aus der Voraussetzung über den Ausdruck (3) die Entwickelung

$$(5) \qquad f(q\varrho + x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(q\varrho)}{\nu!} x^{\nu}$$

für $0 \leqq x < r$, falls $q\varrho + r \leqq \vartheta$ ist, und für $0 \leqq x \leqq \vartheta - q\varrho$, falls $q\varrho + r > \vartheta$ ist; dabei ist $0 < \vartheta - q\varrho < r$. Dieses x-Intervall wollen wir in beiden Fällen mit J_1 bezeichnen. Andererseits folgt aus der Annahme, wenn wir darin das x durch $q\varrho + x$ ersetzen:

$$(6) \qquad f(q\varrho + x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} (q\varrho + x)^{\nu}$$

im Intervall $0 \leqq x < r - \varrho$, das wir mit J_0 bezeichnen. Schließlich folgt aus der Voraussetzung (2), daß in (6) die Reihe rechts in dem mit J_2 zu bezeichnenden Intervall $0 \leqq x < 1 - q\varrho$ sogar absolut konvergiert. Was nun die Größe dieser Intervalle anbetrifft, so liegen im Falle $q\varrho + r \leqq \vartheta$ wegen der hieraus folgenden Ungleichung $q\varrho \leqq \vartheta - r < 1 - r$ die drei Endpunkte in der Reihenfolge $0 < r - \varrho < r < 1 - q\varrho$, während im Falle $q\varrho + r > \vartheta$ infolge der Annahme $(q-1)\varrho + r \leqq \vartheta$ das entsprechende gilt: $0 < r - \varrho \leqq \vartheta - q\varrho < 1 - q\varrho$. Das Intervall J_1 enthält also stets das Intervall J_0 und das Intervall J_2 stets das Intervall J_1.

Da in (6) die Reihe rechts im Intervall J_2 absolut konvergiert, können wir den Ausdruck $(q\varrho + x)^{\nu}$ nach dem binomischen Satz entwickeln und erhalten, indem wir das ν-te Glied entsprechend dieser Entwickelung in $\nu + 1$ Glieder zerspalten:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} (q\varrho + x)^{\nu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} f_{\mu}(x),$$

wo die $f_\mu(x)$ Potenzen von x mit konstanten Koeffizienten sind; diese Gleichung gilt in J_2, und die Reihe rechts konvergiert dort ebenfalls absolut, da ja die binomische Entwickelung für jedes ν nur positive Glieder liefert. Infolgedessen dürfen wir in der Reihe rechts für jede ganze Zahl $\nu \geqq 0$ die unendlich vielen Glieder mit demselben Exponenten ν zusammenfassen, da auch jede Teilreihe konvergieren muß; wir erhalten so die Entwickelung

$$(7) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} (q\varrho + x)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu,$$

gültig in J_2, wo die Reihe rechts in J_2 ebenfalls absolut konvergiert. Da nun J_0 in J_2 enthalten ist, so geht die Gleichung (6) über in

$$(8) \qquad f(q\varrho + x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu,$$

und diese Gleichung gilt wie (6) in J_0. Andererseits ist aber J_0 auch in J_1 enthalten, so daß (5) insbesondere auch in J_0 richtig ist; wir haben also für $f(q\varrho + x)$ in J_0 zwei Potenzreihenentwickelungen mit dem Anfangspunkt $x = 0$, die also nach dem Eindeutigkeitssatze übereinstimmen müssen:

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(q\varrho)}{\nu!}.$$

Das bedeutet aber, daß (8) sogar im Gültigkeitsbereich J_1 der Gleichung (5) richtig sein muß, da ja die Gleichungen (5) und (8) identisch sind. Nunmehr verwenden wir auch noch, daß J_1 in J_2 enthalten ist; es gilt also die Transformation (7) insbesondere in J_1, und (8) geht rückwärts durch diese wieder in (6) über, so daß nunmehr auch die Gültigkeit von (6) im Intervall J_1 nachgewiesen ist; es gilt also (6) für $q\varrho \leqq q\varrho + x < q\varrho + r$, falls $q\varrho + r \leqq \vartheta$ ist, und für $q\varrho \leqq q\varrho + x \leqq \vartheta$, falls $q\varrho + r > \vartheta$ ist. Ersetzen wir jetzt in (6) rückwärts wieder $q\varrho + x$ durch x, so erhalten wir (4) mit Gültigkeit für $q\varrho \leqq x < q\varrho + r$ im ersten Falle und mit Gültigkeit für $q\varrho \leqq x \leqq \vartheta$ im zweiten Falle. Da aber wegen $\varrho < r$ stets $q\varrho < (q-1)\varrho + r$ ist, erhalten wir gerade diejenige Erweiterung der Gültigkeit von (4) über die Annahme hinaus, die bewiesen werden sollte[7]).

[7]) Herr Pringsheim hatte die Liebenswürdigkeit, mich während der Korrektur auf die leider von mir übersehene Druckfehlerkorrektur seiner zitierten Arbeit (Münchener Berichte (1913), S. 308) aufmerksam zu machen. Hiernach ist vor allem in dem zitierten Satz nebst Zusatz anstatt $0 \leqq h \leqq \varrho$ bzw. $0 \leqq h \leqq \varrho_0$ das Intervall $0 \leqq h \leqq r$ zu schreiben. Dies stimmt mit dem Inhalt der Anmerkuug [2]) überein.

(Eingegangen am 29. April 1927.)

Zur Riemannschen Geometrie. II.[1])

Bestimmung der krummlinigen Koordinaten, bei denen sich die geodätischen Diagonalen in jedem Koordinatenviereck halbieren.

Von

Kurt Zwirner in Hamburg.

---

1. Als Schiebnetz in der Euklidischen Ebene bezeichne ich ein Kurvennetz, welches dadurch entsteht, daß eine beliebige Kurve h_1 längs einer zweiten beliebigen Kurve h_2 parallel zu sich verschoben wird, und umgekehrt h_2 längs h_1. Diesen Kurvennetzen kommt die folgende Eigenschaft zu: Sie sind in Euklidischen Ebenen die allgemeinsten Netze, in welchen sich die geradlinigen Diagonalen in jedem Netzviereck gegenseitig halbieren. Es soll hier untersucht werden, ob auf krummen Flächen Netze existieren, die die entsprechende Eigenschaft haben, daß sich die geodätischen Diagonalen jedes Netzvierecks halbieren. Als Resultat ergibt sich: nur die Schiebnetze in Flächen mit verschwindender Krümmung haben die gewünschte Eigenschaft.

Analog zu den Schiebnetzen kann man im Euklidischen Raum von drei Dimensionen Schiebflächensysteme erklären, bei denen sich wiederum die geradlinigen Diagonalen in jedem Systemparallelipiped gegenseitig halbieren. Man kann auch hier wieder die Frage stellen, ob in Riemannschen Räumen von drei Dimensionen Flächensysteme mit der analogen Eigenschaft existieren. Das Resultat ist ähnlich dem im zweidimensionalen Falle: Die Riemannsche Krümmung dieser Räume muß verschwinden.

Zur Herleitung dieser Ergebnisses wird ausgiebig der Parallelismus im Sinne Levi-Civitas benutzt.

---

[1]) Unter dem Obertitel: Zur Riemannschen Geometrie I ist in den Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Hamburgischen Universität 5 (1927), Heft 4 eine Arbeit des Verf. erschienen, in denen eine ähnliche Fragestellung untersucht wird. Es wird dort Ivorys Forderung der Gleichheit der geodätischen Diagonalen gestellt.

2. Es sei auf einer Fläche, deren Metrik durch

$$(1) \qquad ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

bestimmt sei, (u, v) ein Netz mit der geforderten Eigenschaft; d. h. in jedem Viereck $ABCD$

$$A: (u, v) \qquad B: (u, v_1)$$
$$C: (u_1, v_1) \qquad D: (u_1, v)$$

halbieren sich die geodätischen Diagonalen AC und BD.

Es sei $O(u_0, v_0)$ der Schnittpunkt der geodätischen Diagonalen in einem solchen Koordinatenviereck $ABCD$. Wir führen um O als Zentrum Riemannsche Normalkoordinaten auf der Fläche[2]) ein. Verbindet man O mit jeder Ecke durch eine geodätische Linie, so wird unsre Forderung besagen, daß

1. die geodätischen Linien von O nach A und C (bzw. nach B und D) in O unter derselben Tangente eintreffen;

2. diametral gegenüberliegende Eckpunkte gleiche geodätische Entfernung von O besitzen.

Beiden Forderungen wird genügt, wenn man in Normalkoordinaten setzt:

$$A(+x, +y); \qquad B(+x+a, +y+b);$$
$$C(-x, -y); \qquad D(-x-a, -y-b).$$

Hieraus folgt nun schon ein erstes Ergebnis:

Die Parameter u, v sind Tschebyscheffsche Parameter; d. h. das Linienelement hat die Gestalt:

$$(2) \qquad ds^2 = du^2 + 2f\,du\,dv + av^2.$$

Sind nämlich x, y klein von erster Ordnung, a, b klein von zweiter Ordnung, so wird man die Vektoren AB und DC als zwei von derselben Kurve $v = \text{konst.}$ ausgehende Längenvektoren $(0, ds_v)$ und $(0, d\bar{s}_v)$ ansehen können, welche in Normalkoordinaten die gleichen Komponenten (a, b) haben. Nun gelten bekanntlich[3]) für die infinitesimale Parallelverschiebung eines beliebigen Vektors ξ in Normalkoordinaten die einfachen Gleichungen $d\xi^i = 0$ $(i = 1, 2)$, d. h. die Komponenten des Vektors ändern sich nicht. Unsere beiden Längenvektoren erfüllen diese Bedingung; sie sind also *parallel bezüglich der Kurve* $v = \text{konst.}$ Da die Kurven $v = \text{konst.}$ durch unsere Fragestellung in keiner Weise ausgezeichnet sind, so gilt genau das gleiche für zwei benachbarte Längenvektoren $(ds_u, 0)$ längs derselben Kurve $u = \text{konst.}$

[2]) Siehe etwa: L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton 1926. S. 53.

[3]) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 5. Aufl., Berlin 1923, S. 91.

Nun läßt der Parallelismus unter anderem die Länge eines Vektors ungeändert; die Bogenelemente zweier u-Kurven (und ebenso zweier v-Kurven) sind also gleich. Führt man an Stelle von u und v die Bögen s_u und s_v als Parameter ein, so erhalten wir demnach

$$ds^2 = du^2 + 2f\,du\,dv + dv^2, \tag{2}$$

wenn man nachträglich wieder die Bezeichnungen u, v verwendet.

Wir setzen jetzt voraus, daß die Kurven $u =$ konst. nicht geodätische Linien der Fläche (2) sind, und wählen auf einer solchen Kurve irgend zwei Punkte A und B. Die von den beiden Punkten ausgehenden Längenelemente du sind — wie wir wissen — parallel bezüglich der ausgewählten Kurve $u =$ konst. Wir zeigen jetzt, daß sie auch *parallel bezüglich der geodätischen Linie* sind, welche A mit B verbindet.

In der Fig. 1 seien φ_1 und φ_2 die Winkel, welche die Längenelemente du mit der Geodätischen AB bilden; ds sei das Längenelement der Kurve, welche der Schnittpunkt O der geodätischen Diagonalen beschreibt, wenn die Endpunkte der Elemente du variieren; φ sei der Winkel, welchen ds mit der Geodätischen AB bildet.

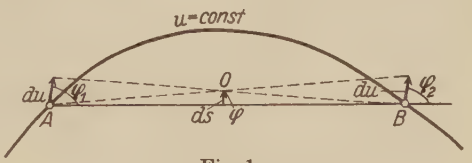


Fig. 1.

Dann gilt für eine Variation der Endpunkte der beiden du-Vektoren:

$$du \cdot \cos\varphi_1 = 2ds \cdot \cos\varphi, \qquad du \cdot \cos\varphi_2 = 2ds \cdot \cos\varphi,$$

also

$$\varphi_1 = \varphi_2 . \tag{3}$$

Aus der bekannten Eigenschaft des Flächenparallelismus, daß der Winkel erhalten bleibt, wenn ein Vektor längs einer Geodätischen parallel verschoben wird, folgt somit unsere Behauptung.

Wird also der Vektor $(du, 0)$ erst längs der Kurve $u =$ konst. von A nach B durch Parallelverschiebung transportiert und dann ebenso längs der Geodätischen zurück nach A, so kommt er nach diesem Umlauf in seiner Anfangslage wieder an. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist bekanntlich das Verschwinden des Integrals $\int k\,do$, wo k die Flächenkrümmung und do das Oberflächenelement ist und um das umlaufene Flächenstück zu integrieren ist. Nehmen wir das umlaufene Flächenstück hinreichend klein, so daß k von einerlei Zeichen in ihm ist, so kann die Gleichung

$$\int k\,do = 0$$

nur bestehen, falls $k = 0$ ist. Unsere Fläche ist also im kleinen eukli-

disch oder wie man auch sagen kann: die Fläche entsteht durch Verbiegung einer Ebene, die mit einem Schiebnetz überdeckt ist.

Man bemerkt, daß der letzte Schluß, der uns auf das Verschwinden der Gaußschen Krümmung führte, nur gültig bleibt, wenn — wie anfangs vorausgesetzt — die Kurven $u = \text{konst.}$ keine Geodätischen sind. Sollte dies der Fall sein, so verfahre man statt dessen mit den Kurven $v = \text{konst.}$ ebenso. Sollten auch diese Geodätische sein, so kommt man noch einfacher zum Ziel: Der Winkel, den die Parameterlinien miteinander bilden, ist dann nämlich stationär, also f stationär, wodurch wieder die Euklidizität im kleinen verbürgt ist.

3. Im Raum von drei Dimensionen verlaufen zunächst die Überlegungen genau analog zu den schon im Zweidimensionalen angestellten. Es sei (u, v, w) ein Koordinatensystem mit der gesuchten Eigenschaft; die Eckpunkte irgendeines Koordinatenparallelipipeds seien:

$$\begin{array}{ll} (1): & u, v, w, \\ (2): & u, v, w_1, \\ (3): & u, v_1, w_1, \\ (4): & u, v_1, w, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (5): & u_1, v, w, \\ (6): & u_1, v, w_1, \\ (7): & u_1, v_1, w_1, \\ (8): & u_1, v_1, w. \end{array}$$

Um den Schnittpunkt O der vier geodätischen Raumdiagonalen dieses Parallelipipeds als Zentrum werden Riemannsche Normalkoordinaten eingeführt. Die Forderung, daß sich die vier geodätischen Raumdiagonalen in O halbieren, wird erfüllt sein, wenn man setzt:

$$\begin{array}{ll} (1): & x^1, x^2, x^3, \\ (2): & x^1 + a^1, x^2 + a^2, x^3 + a^3, \\ (3): & x^1 + b^1, x^2 + b^2, x^3 + b^3, \\ 4): & x^1 + c^1, x^2 + c^2, x^3 + c^3, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (5): & -x^1 - b^1, -x^2 - b^2, -x^3 - b^3, \\ (6): & -x^1 - c^1, -x^2 - c^2, -x^3 - c^3, \\ (7): & -x^1, \quad -x^2, \quad -x^3, \\ (8): & -x^1 - a^1, -x^2 - a^2, -x^3 - a^3. \end{array}$$

Auch hieraus schließt man genau wie oben, daß etwa zwei Längenelemente ds_w, die von derselben Fläche $w = \text{konst.}$ ausgehen, durch beliebige Parallelverschiebung in der Fläche $w = \text{konst.}$ auseinander hervorgehen. Entsprechend für Längenelemente ds_u und ds_v. Analytisch kommt dies darin zum Ausdruck, daß die folgenden Christoffelsymbole verschwinden:

$$(4) \qquad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{31} = 0.$$

Das Linienelement unseres Raumes nimmt also wieder die Gestalt an

$$(5) \qquad ds^2 = du^2 + dv^2 + dw^2 + 2g_{12}\,du\,dv + 2g_{23}\,dv\,dw + 2g_{13}\,du\,dw.$$

Setzt man umgekehrt im Infinitesimalen den Parallelismus der Koordinatenvektoren (etwa zweier benachbarter Vektoren $(0, 0, dw)$) voraus,

so findet man rückschließend, daß sich die geodätischen Diagonalen halbieren. Damit hat man die von Herrn G. Herglotz herrührende Deutung des Parallelismus: Sind zwei benachbarte Vektoren parallel, so halbieren sich in dem von ihnen bestimmten Viereck die geodätischen Diagonalen und umgekehrt.

Wir bevorzugen bei den folgenden Überlegungen den Längenvektor $(0, 0, dw)$, bemerken aber, daß für die Vektoren $(du, 0, 0)$ und $(0, dv, 0)$ genau das gleiche gilt.

Wird ein Vektor $(0, 0, dw)$ auf einer geschlossenen Kurve in der der Fläche $w =$ konst. parallel herumgeführt, so kommt er wegen (4) als dw-Vektor in die Anfangslage zurück. Aus der allgemeinen Formel für die Parallelverschiebung eines beliebigen Vektors ξ um ein Flächenelement $d\omega$:

$$d\xi^\alpha = R^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}\, d\omega^{\gamma\varepsilon}\, \xi^\beta$$

folgt für unseren Vektor $(0, 0, dw)$ somit:

$$0 = R^\alpha_{312}(du\,dv - du\,dv)\,dw$$

für alle Zeiger $\alpha = 1, 2, 3$, d. h. $R^\alpha_{312} = 0$ oder nach Überschiebung mit $g_{\alpha\beta}$

$$g_{\alpha\beta} R^\alpha_{312} = R_{\beta 312} = 0.$$

Aus entsprechenden Überlegungen für die Vektoren $(du, 0, 0)$ und $(0, dv, 0)$ folgt:

$$(6) \qquad \begin{cases} R_{\beta 123} = 0, \\ R_{\beta 231} = 0, \\ R_{\beta 312} = 0. \end{cases}$$

Es bleiben somit noch die Komponenten der Form $R_{\alpha\beta\alpha\beta}$ zu untersuchen. Auch diese verschwinden, wie wir auf folgendem Wege nachweisen werden.

Es sei in Fig. 2 ACB eine geodätische Linie auf einer Fläche $w =$ konst. ADB die räumliche Geodätische, welche A mit B verbindet. Genau wie früher schließt man aus der Tatsache, daß sich die geodätischen Diagonalen halbieren, auf die Gleichheit der Winkel zwischen den dw-Vektoren und der Geodätischen ADB: $\varphi_1 = \varphi_2$. Hieraus folgt nun aber nicht der Parallelismus der beiden dw-Vektoren bezüglich ADB. Vielmehr wird der Vektor dw, wenn er längs ACB nach B und von dort längs BDA nach A parallel zurück verschoben wird, zwar mit der Richtung dr von ADB

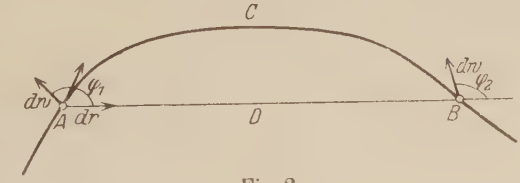


Fig. 2.

noch denselben Winkel wie vor der Parallelverschiebung einschließen, aber er wird sich im allgemeinen um dr als Achse gedreht haben. Die Änderung, welche der dw-Vektor bei einem Umlauf um $ACBDA$ erfährt, ist also senkrecht zur Richtung dr. Bezeichnet $d\omega$ das umlaufene Flächenelement, so hat man für die Änderung selbst: $R^{\alpha}_{3\beta\gamma}\, d\omega^{\beta\gamma}\, dw$; und dieser Vektor steht senkrecht auf dem Vektor dr, falls

$$g_{\alpha\varepsilon} R^{\alpha}_{3\beta\gamma}\, d\omega^{\beta\gamma}\, dw\, dr^{\varepsilon} = 0$$

oder

$$R_{\varepsilon 3\beta\gamma}\, d\omega^{\beta\gamma}\, dw\, dr^{\varepsilon} = 0$$

ist. Es kommt nun darauf an, das Flächenelement $d\omega$ in geeigneter Weise zu bestimmen. Ersichtlich wird $d\omega$ aufgespannt vom Vektor dr und dem Anfangsvektor der Geodätischen ACB auf der Fläche $w = \text{konst.}$ Im Infinitesimalen könnte man demnach $d\omega$ als Element der „Schmiegebene“ an die Kurve ACB bezeichnen. Bekanntlich enthält die Schmiegebene einer Geodätischen auf einer Fläche die Flächennormale. Läßt man B auf der Kurve ACB sich unbegrenzt dem Punkte A nähern, so wird dr sich dem Tangentenvektor dieser Kurve nähern und $d\omega$ wird im Grenzfall von dr und dem Normalenvektor dn der Fläche $w = \text{konst.}$ aufgespannt: $d\omega^{\beta\gamma} = dr^{\beta}\, dn^{\gamma} - dr^{\gamma}\, dn^{\beta}$. Wir erhalten:

$$R_{\varepsilon 3\beta\gamma}\left(dr^{\beta}\, dn^{\gamma} - dr^{\gamma}\, dn^{\beta}\right) dw\, dr^{\varepsilon} = 0$$

oder — da $R_{\varepsilon 3\beta\gamma}$ in den beiden letzten Zeigern alternierend ist —

$$R_{\varepsilon 3\beta\gamma}\, dr^{\beta}\, dn^{\gamma}\, dw\, dr^{\varepsilon} = 0.$$

Und wegen (6)

$$R_{\beta 3\beta 3}\, dr^{\beta}\, dr^{\beta} = 0 \qquad (\beta = 1, 2)$$

und da ferner das Verhältnis $\frac{dr^1}{dr^2}$ beliebig in $w = \text{konst.}$ angenommen werden kann:

$$R_{13\,13} = R_{23\,23} = 0.$$

Somit verschwinden alle Komponenten des Krümmungstensors. Herrn W. Blaschke danke ich für die Anregung und mannigfachen Ratschläge bei Abfassung der Arbeit.

(Eingegangen am 23. Februar 1927.)

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln.

Von

Arnold Walfisz in Wiesbaden.

Es sei für ganzes $n \geqq 0$

$$r_k(n) = \sum_{n_1^2 + \ldots + n_k^2 = n} 1$$

die Zerlegungsanzahl von n in k Quadrate und $A_k(x)$ die zugehörige summatorische Funktion, also die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf der Oberfläche der k-dimensionalen Kugel $u_1^2 + \ldots + u_k^2 \leqq x$. Dann ist, wie ich früher gezeigt habe[1]),

$$(1) \qquad A_k(x) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} x^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \qquad (k \geqq 5).$$

Als Ausgangspunkt diente mir für $k \geqq 8$ die Hardysche Abschätzung[2])

$$(2) \qquad r_k(n) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1} \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^k e^{-\frac{2\pi i n p}{q}} + O\left(n^{\frac{k}{4}}\right).$$

Hierbei durchläuft p nur die zu q primen Werte, so daß $p = 0$ lediglich zu $q = 1$ gehört, während

$$S_{p,q} = \sum_{m=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi i m^2 p}{q}}$$

---

[1]) „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden" [Mathematische Zeitschrift **19** (1924), S. 300—307], S. 302.

[2]) G. H. Hardy „On the expression of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five or seven" [Proceedings of the National Academy of Sciences **4** (1918), S. 189—193], S. 191.

eine Gaußsche Summe ist. Für $5 \leqq k \leqq 7$ war ich genötigt, von der wesentlich tiefer liegenden Hardyschen Identität[3])

$$(3) \quad r_k(n) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^k e^{-\frac{2\pi i n p}{q}} \qquad (5 \leqq k \leqq 8;\ n \geqq 1)$$

Gebrauch zu machen; für diese k gilt (2) auch noch, aber das Restglied stört.

Durch eine Modifikation der Hardyschen Methode gelangte E. Landau[4]), im allgemeineren Rahmen, zu der Abschätzung

$$(4) \quad A_k(x) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{q \leqq \sqrt{x}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^k \sum_{n \leqq x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{2\pi i n p}{q}} + O\left(x^{\frac{k}{4}} \log x\right) \quad (k \geqq 4)$$

und leitete hieraus (1) ab, ohne (3) zu benutzen. (Untere Summationsgrenzen lasse ich bisweilen weg, wenn sie Eins sind; $q \leqq \sqrt{x}$ steht beispielsweise für $1 \leqq q \leqq \sqrt{x}$.)

Ich werde im folgenden einen dritten Beweis mitteilen, der die singuläre Reihe vermeidet und mit verhältnismäßig primitiven Hilfsmitteln zum Ziele gelangt. Auf das allgemeinere Gitterpunktproblem bei rationalen Ellipsoiden läßt sich allerdings dieser Beweis nicht übertragen.

Sodann begründe ich auf neuem (oder vielmehr altem) Wege zwei Sätze von H. Petersson[5]) aus diesem Ideenkreise.

Es sei für ganzes $\nu \geqq 1$

$$(5) \qquad \mathfrak{R}_k^{(\nu)}(x, q) = \sum_{p=0}^{q-1}{}' \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^k e^{-\frac{2\pi i p x}{q}} \lim_{M=\infty} \sum_{\substack{m=-M \\ m \neq -\frac{p}{q}}}^{M} \frac{(-1)^m}{\left(\frac{p}{q}+m\right)^\nu};$$

oder auch, etwas eleganter geschrieben,

$$\mathfrak{R}_k^{(\nu)}(x, 1) = (1 + (-1)^\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^\nu},$$

$$\mathfrak{R}_k^{(\nu)}(x, q) = \sum_{p=1}^{q-1}{}' \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^k e^{-\frac{2\pi i p x}{q}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\left(\frac{p}{q}+m\right)^\nu} \qquad (q \geqq 2).$$

---

[3]) G. H. Hardy „On the representation of a number as the sum of any number of squares and in particular of five“ [Transactions of the American Mathematical Society **21** (1920), S. 255—284], § 3.

[4]) „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden“ [Mathematische Zeitschrift **21** (1924), S. 126—132], S. 127.

[5]) „Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden“, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **5** (1926), S. 116—150.

Ferner werde für $k \geqq 5$ gesetzt

$$\mathfrak{R}_k^{(\nu)}(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \mathfrak{R}_k^{(\nu)}(x, q).$$

In diesen Bezeichnungen gilt der folgende

Satz A. *Für* $x \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$ *ist*

$$A_k(x) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} x^{\frac{k}{2}} - \sum_{\nu \leqq \frac{k-1}{4}} \frac{1}{(2\pi i)^{\nu}} \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\nu+1\right)} x^{\frac{k}{2}-\nu} \mathfrak{R}_k^{(\nu)}(x) + O\left(x^{\frac{k}{4}} \log x\right).$$

Diesen Satz beweist Petersson, indem er die Hardysche Methode auf die Potenzreihe $\sum_0^{\infty} A_k(n) z^n$ anwendet, während Hardy und Landau vordem die einfachere Funktion $\sum_0^{\infty} r_k(n) z^n$ betrachtet haben. Ich werde nun zeigen, daß man Satz A ohne erhebliche Schwierigkeiten aus der Landauschen Formel (4) ablesen kann, indem man die n-Summe in eine Fourierreihe entwickelt. Dadurch wird der große rechnerische Apparat Peterssons gespart.

Für $5 \leqq k \leqq 8$ gelangt Petersson (auf Grund einer Formel von Hardy-Mordell) zu folgender Verschärfung von Satz A:

Satz B. *Für* $x \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$ *ist*

$$A_5(x) = \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} x^{\frac{3}{2}} \mathfrak{R}_5^{(1)}(x) + O(x),$$

$$A_6(x) = \frac{\pi^3}{\Gamma(4)} x^3 - \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi^3}{\Gamma(3)} x^2 \mathfrak{R}_6^{(1)}(x) + O(x \log x),$$

$$A_7(x) = \frac{\pi^{\frac{7}{2}}}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} x^{\frac{5}{2}} \mathfrak{R}_7^{(1)}(x) - \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} x^{\frac{3}{2}} \mathfrak{R}_7^{(2)}(x) + O(x),$$

$$A_8(x) = \frac{\pi^4}{\Gamma(5)} x^4 - \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi^4}{\Gamma(4)} x^3 \mathfrak{R}_8^{(1)}(x) - \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{\pi^4}{\Gamma(3)} x^2 \mathfrak{R}_8^{(2)}(x) + O(x \log x).$$

Dieser Satz ist wiederum eine keineswegs komplizierte Folgerung aus der Hardyschen Identität (3).

Beweis von (1). Für $k \geqq 4$ ist

$$A_{k+1}(x) = \sum_{0 \leqq n \leqq x} r_{k+1}(n) = \sum_{0 \leqq a_1^2 + \ldots + a_k^2 + n^2 \leqq x} 1$$

$$= \sum_{-\sqrt{x} \leqq n \leqq \sqrt{x}} \sum_{0 \leqq a_1^2 + \ldots + a_k^2 \leqq x - n^2} 1$$

$$= \sum_{-\sqrt{x} \leqq n \leqq \sqrt{x}} \sum_{0 \leqq m \leqq x - n^2} r_k(m),$$

also

$$A_{k+1}(x) = \sum_{-\sqrt{x} \leqq n \leqq \sqrt{x}} A_k(x - n^2). \tag{6}$$

Dies schreibe ich zunächst für $k = 4$ auf:

$$A_5(x) = \sum_{-\sqrt{x} \leqq n \leqq \sqrt{x}} A_4(x - n^2) \tag{7}$$

und forme die rechte Seite auf Grund der Jacobischen Beziehungen[6])

$$r_4(2n-1) = 8 \sum_{m \mid (2n-1)} m, \quad r_4(2n) = 24 \sum_{(2m-1) \mid 2n} (2m-1) \qquad (n \geqq 1) \tag{8}$$

um. Zu diesem Zwecke führe ich die Funktion

$$S(x) = \sum_{m \mid n \leqq x} m \tag{9}$$

ein (Summe der Teiler $m > 0$ aller natürlichen Zahlen n bis x). Man hat dann

$$\begin{aligned} \sum_{(2m-1) \mid 2n \leqq x} (2m-1) &= \sum_{(2m-1) \mid n \leqq \frac{x}{2}} (2m-1) = \sum_{m \mid n \leqq \frac{x}{2}} m - \sum_{2m \mid n \leqq \frac{x}{2}} 2m \\ &= S\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \sum_{2m \mid 2n \leqq \frac{x}{2}} m = S\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \sum_{m \mid n \leqq \frac{x}{4}} m \\ &= S\left(\frac{x}{2}\right) - 2S\left(\frac{x}{4}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{m \mid (2n-1) \leqq x} m &= \sum_{m \mid n \leqq x} m - \sum_{m \mid 2n \leqq x} m \\ &= S(x) - \sum_{2m \mid 2n \leqq x} 2m - \sum_{(2m-1) \mid 2n \leqq x} (2m-1) \\ &= S(x) - 2 \sum_{m \mid n \leqq \frac{x}{2}} m - S\left(\frac{x}{2}\right) + 2S\left(\frac{x}{4}\right) \\ &= S(x) - 3S\left(\frac{x}{2}\right) + 2S\left(\frac{x}{4}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

(8), (10) und (11) ergeben

$$A_4(x) = 1 + 8S(x) - 24S\left(\frac{x}{2}\right) + 16S\left(\frac{x}{4}\right) + 24S\left(\frac{x}{2}\right) - 48S\left(\frac{x}{4}\right),$$

---

[6]) Es gibt verschiedene elementare Beweise von (8). Vgl. z. B. E. Landau „Vorlesungen über Zahlentheorie“ (Leipzig 1927, S. Hirzel), I. Bd., S. 113 und A. Hurwitz „Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen“ (Berlin 1919, Julius Springer), S. 59. Die Quaternionen spielen bei der vierdimensionalen Kugel eine ähnliche Rolle wie die Gaußschen komplexen Zahlen beim Kreise.

d. h.

$$A_4(x) = 8S(x) - 32S\left(\frac{x}{4}\right) + 1. \quad (12)$$ [7]

Ich setze jetzt zur Abkürzung

$$R(x) = x - [x] - \frac{1}{2}, \quad (13)$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} R\left(\frac{x}{n}\right). \quad (14)$$

Aus (9), (13) und (14) folgt dann

$$S(x) = \sum_{m\,|\,n \leqq x} m = \sum_{mn \leqq x} m = \sum_{n \leqq x} \sum_{m \leqq \frac{x}{n}} m$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n \leqq x} \left[\frac{x}{n}\right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \leqq x} \left[\frac{x}{n}\right]$$

$$= \frac{x^2}{2} \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n^2} - x\psi(x) + \frac{1}{2} \sum_{n \leqq x} \left(\left[\frac{x}{n}\right] - \frac{x}{n}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n \leqq x} \left(\left[\frac{x}{n}\right] - \frac{x}{n}\right)^2,$$

d. h.

$$S(x) = \frac{\pi^2}{12} x^2 - x\psi(x) + O(x). \quad (15)$$

Aus (12) und (15) folgt

$$A_4(x) = \frac{\pi^2}{2} x^2 - 8x\psi(x) + 8x\psi\left(\frac{x}{4}\right) + O(x).$$

Wegen

$$\sum_{-\sqrt{x} \leqq n \leqq \sqrt{x}} O(x - n^2) = O(x) \sum_{-\sqrt{x} \leqq n \leqq \sqrt{x}} 1 = O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

ergibt sich hieraus, in Verbindung mit (7),

$$A_5(x) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{-\sqrt{x} \leqq n \leqq \sqrt{x}} (x - n^2)^2 - 8 \sum_{-\sqrt{x} \leqq n \leqq \sqrt{x}} (x - n^2)\psi(x - n^2) \quad (16)$$

$$+ 8 \sum_{-\sqrt{x} \leqq n \leqq \sqrt{x}} (x - n^2)\psi\left(\frac{x - n^2}{4}\right) + O\left(x^{\frac{3}{2}}\right).$$

Für ganzes $m \geqq 4$ ist nun

$$\sum_{-\sqrt{x} \leqq n \leqq \sqrt{x}} (x - n^2)^{\frac{m}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2} + 1\right)} x^{\frac{m+1}{2}} + O\left(x^{\frac{m-1}{2}}\right). \quad (17)$$ [8]

---

[7]) Vgl. hierzu W. Sierpiński „Teorja liczb“ (Warszawa 1925), S. 365.

[8]) Eine einfache Herleitung mittels der Eulerschen Summenformel bei E. Landau „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Zweite Abhandlung“ [Mathematische Zeitschrift **24** (1925), S. 299–310], S. 303.

Setzt man daher zur Abkürzung

$$B(x) = \sum_{-\sqrt{x} \leqq n \leqq \sqrt{x}} (x - n^2)\,\psi(x - n^2), \tag{18}$$

$$C(x) = \sum_{-\sqrt{x} \leqq n \leqq \sqrt{x}} (x - n^2)\,\psi\left(\frac{x - n^2}{4}\right), \tag{19}$$

so folgt aus (16) und (17) (mit $m = 4$)

$$A_5(x) = \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} x^{\frac{5}{2}} - 8B(x) + 8C(x) + O(x^{\frac{3}{2}}). \tag{20}$$

Wegen (13) und (14) ist augenscheinlich

$$\psi(x) = O(\log x). \tag{21}$$

Aus (18) folgt daher

$$B(x) = 2 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} (x - n^2)\,\psi(x - n^2) + x\,\psi(x)$$

$$= 2 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} (x - n^2)\,\psi(x - n^2) + O(x \log x). \tag{22}$$

Ich führe jetzt die summatorische Funktion

$$\sum_{r \leqq n} \psi(x - r^2) = \mathsf{P}_1(n) \tag{23}$$

ein und summiere in (22) partiell. Das ergibt

$$B(x) = 2 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \{(x - n^2) - (x - (n+1)^2)\}\,\mathsf{P}_1(n)$$

$$+ \mathsf{P}_1([\sqrt{x}])\,(x - [\sqrt{x} + 1]^2) + O(x \log x).$$

Aus (21) und (23) folgt

$$\mathsf{P}_1(n) = O(n \log x).$$

Mithin wird

$$B(x) = 4 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} n\,\mathsf{P}_1(n) + O(\log x) \sum_{n \leqq \sqrt{x}} n + O(\sqrt{x} \log x \cdot \sqrt{x}) + O(x \log x),$$

d. h. reichlich

$$B(x) = 4 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} n\,\mathsf{P}_1(n) + O(x^{\frac{3}{2}}). \tag{24}$$

Ebenso ergibt sich aus (19), wenn man die summatorische Funktion

$$\sum_{r \leqq n} \psi\left(\frac{x - r^2}{4}\right) = \mathsf{P}_2(n) \tag{25}$$

einführt,

$$C(x) = 4 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} n \, \mathsf{P}_2(n) + O(x^{\frac{3}{2}}). \tag{26}$$

Nach (23), (14) und (25), (14) ist

$$\mathsf{P}_1(n) = \sum_{r \leqq n} \sum_{m \leqq x - r^2} \frac{1}{m} R\left(\frac{x-r^2}{m}\right)$$

$$= \sum_{m \leqq x-1} \frac{1}{m} \sum_{r \leqq \operatorname{Min}(n, \sqrt{x-m})} R\left(\frac{x-r^2}{m}\right), \tag{27}$$

$$\mathsf{P}_2(n) = \sum_{r \leqq n} \sum_{m \leqq \frac{x-r^2}{4}} \frac{1}{m} R\left(\frac{x-r^2}{4m}\right)$$

$$= \sum_{m \leqq \frac{x-1}{4}} \sum_{r \leqq \operatorname{Min}(n, \sqrt{x-4m})} R\left(\frac{x-r^2}{4m}\right). \tag{28}$$

Zur Abschätzung der r-Summen in (27) und (28) benutze ich den folgenden Satz von J. G. van der Corput[9]):

„Es seien $\alpha - \frac{1}{2}$ und $\beta - \frac{1}{2}$ ganz, $\alpha < \beta$, $f(u)$ im Intervall $\alpha \leqq u \leqq \beta$ reell und zweimal differentiierbar, $f''(u)$ stets $\geqq \varrho$ oder stets $\leqq -\varrho$, wo ϱ eine positive, von u unabhängige Zahl $\leqq 1$ bezeichnet. Dann ist, mit absolut konstantem c,

$$\left| \sum_{\alpha < r < \beta} R(f(r)) \right| < c\left(\frac{|f'(\beta) - f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \right).“$$

Es sei erstens

$$\mu = \operatorname{Min}(n, \sqrt{x-m}), \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = [\mu] + \frac{1}{2}, \quad f(u) = \frac{x-u^2}{m}, \quad \varrho = \frac{2}{m}.$$

Dann wird

$$|f'(\beta) - f'(\alpha)| = \frac{2}{m}\left(\beta - \frac{1}{2}\right) \leqq \frac{2}{m}\mu \leqq \frac{2\sqrt{x}}{m}.$$

Also liefert der obige Satz für $m \geqq 2$

$$\left| \sum_{r \leqq \operatorname{Min}(n, \sqrt{x-m})} R\left(\frac{x-r^2}{m}\right) \right| < c_1\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{m}} + \sqrt{m} \right), \tag{29}$$

und hierin sei die absolute Konstante c_1 so groß, daß die Ungleichung auch für $m = 1$ gilt.

Zweitens sei

$$\mu = \operatorname{Min}(n, \sqrt{x-4m}), \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = [\mu] + \frac{1}{2}, \quad f(u) = \frac{x-u^2}{4m}, \quad \varrho = \frac{1}{2m}.$$

[9]) „Zahlentheoretische Abschätzungen“ [Math. Annalen **84** (1921), S. 53–79], S. 55.

Dann wird

$$|f'(\beta)-f'(\alpha)| = \frac{1}{2m}\left(\beta-\frac{1}{2}\right) \leqq \frac{\mu}{2m} \leqq \frac{\sqrt{x}}{2m}.$$

Nach dem van der Corputschen Satze gibt es also eine absolute Konstante c_2 mit

$$\sum_{r \leqq \mathrm{Min}(n, \sqrt{x-4m})} R\left(\frac{x-r^2}{4m}\right) \Big| < c_2\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{m}} + \sqrt{m}\right). \tag{30}$$

Aus (27), (29) und (28), (30) folgt

$$|\mathsf{P}_1(n)| < c_1 \sum_{m \leqq x} \frac{1}{m}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{m}} + \sqrt{m}\right) = O(\sqrt{x}),$$

$$|\mathsf{P}_2(n)| < c_2 \sum_{m \leqq x} \frac{1}{m}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{m}} + \sqrt{m}\right) = O(\sqrt{x}).$$

(24) und (26) geben jetzt

$$B(x) = O(\sqrt{x}) \sum_{n \leqq \sqrt{x}} n + O(x^{\frac{3}{2}}) = O(x^{\frac{3}{2}}),$$

$$C(x) = O(\sqrt{x}) \sum_{n \leqq \sqrt{x}} n + O(x^{\frac{3}{2}}) = O(x^{\frac{3}{2}}).$$

Setze ich dies in (20) ein, so folgt

$$A_5(x) = \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} x^{\frac{5}{2}} + O(x^{\frac{3}{2}}).$$

Damit ist die zu beweisende Abschätzung für $k=5$ bestätigt und allgemein folgt sie (nach der von Landau, loc. cit. [8]), § 3 im allgemeineren Rahmen durchgeführten Induktion $k \to k+1$) so:

Nach (6), (1) und (17) ist

$$A_{k+1}(x) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} \sum_{-\sqrt{x} \leqq n \leqq \sqrt{x}} (x-n^2)^{\frac{k}{2}} + \sum_{-\sqrt{x} \leqq n \leqq \sqrt{x}} O(x-n^2)^{\frac{k}{2}-1}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+1\right)} x^{\frac{k+1}{2}} + O\left(x^{\frac{k+1}{2}-1}\right)$$

$$= \frac{\pi^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+1\right)} x^{\frac{k+1}{2}} + O\left(x^{\frac{k+1}{2}-1}\right).$$

Es sei nunmehr dauernd $x \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$.

Beweis von Satz A. Für festes ϱ auf $0 \leqq \varrho < 1$ liefert eine Fourierentwicklung

$$(31) \qquad \sum_{n \leqq x}{}' n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i \varrho n} = \lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{M} \int_0^x u^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i(\varrho+m)u}\, du\,.$$

Hierin integriere ich, wenn $|\varrho + m| > 0$ ist, a mal partiell, wobei $1 \leqq a \leqq \frac{k}{2} - 1$. Das ergibt, wegen

$$e^{-2\pi i m x} = (-1)^m,\ ^{10})$$

$$(32) \qquad \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^x u^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i(\varrho+m)u}\, du$$

$$= (-1)^{m+1} e^{-2\pi i \varrho x} \sum_{\nu=1}^{a} \frac{x^{\frac{k}{2}-\nu}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\nu+1\right)(2\pi i)^\nu (\varrho+m)^\nu} + O\left(\frac{x^{\frac{k}{2}-1-a}}{|\varrho+m|^{1+a}}\right);$$

denn nach dem zweiten Mittelwertsatze der Integralrechnung ist

$$(33) \qquad \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-a\right)(2\pi i)^a (\varrho+m)^a} \int_0^x u^{\frac{k}{2}-1-a} e^{-2\pi i(\varrho+m)u}\, du = O\left(\frac{x^{\frac{k}{2}-1-a}}{|\varrho+m|^{1+a}}\right).$$

Ich setze jetzt

$$a = \left[\frac{k-1}{4}\right], \qquad \varrho = \frac{p}{q}.$$

Das Restglied in (32) liefert für die Entwicklung (31) einen Fehler von der Größenordnung

$$O\left(x^{\frac{k}{2}-1-a}\right) \sum_{|\varrho+m|>0} \frac{1}{|\varrho+m|^{1+a}};$$

für $\varrho = 0$, d. h. $q = 1$, ist dies

$$O\left(x^{\frac{k}{2}-1-a}\right),$$

---

[10]) Nur hier benutze ich, daß $x \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$ ist. Setzt man daher $e^{-2\pi i m x}$ statt $(-1)^m$ in (5) ein, so gelten die Sätze A und B für beliebiges $x > 0$; für ganzes x tritt hierbei

$$\frac{1}{2}(A_k(x+0) + A_k(x-0))$$

an Stelle von $A_k(x)$.

für $\varrho > 0$, d. h. $q > 1$,

$$O\left(x^{\frac{k}{2}-1-a}\right)\left(\frac{1}{\varrho^{1+a}}+\frac{1}{(1-\varrho)^{1+a}}\right).$$

Wegen

$$|S_{p,q}| \leqq \sqrt{2q}$$

ist also der Einfluß des Restgliedes in (32) auf die Entwicklung (4)

$$(34)\quad O\left(x^{\frac{k}{2}-1-a}\right)+O\left(x^{\frac{k}{2}-1-a}\right)\sum_{2\leqq q\leqq\sqrt{x}} q^{-\frac{k}{2}+1+a}\sum_{p=1}^{q-1}\left(\frac{1}{p^{1+a}}+\frac{1}{(q-p)^{1+a}}\right).$$

Hierin kann man die p-Summe ohne weiteres streichen, für $k \geqq 7$ auch die q-Summe (da dann $-\frac{k}{2}+1+a<-1$ ist). Wegen $\frac{k}{2}-1-a \leqq \frac{k}{4}$ ist der Ausdruck (34) für $k \geqq 7$

$$(35)\qquad O\left(x^{\frac{k}{4}}\right).$$

Für $k=5$ oder 6 ist $a=1$. Der Ausdruck (34) wird dann

$$O(x^{\frac{1}{2}})+O(x^{\frac{1}{2}})\sum_{q\leqq\sqrt{x}} q^{-\frac{1}{2}} = O(x^{\frac{3}{4}}) = O(x^{\frac{5}{4}}),$$

$$O(x)+O(x)\sum_{q\leqq\sqrt{x}} q^{-1} = O(x\log x) = O(x^{\frac{6}{4}}).$$

(34) ist also für $k \geqq 5$ von der Größenordnung (35). Mit anderen Worten: das Restglied in (32) stört nicht. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes ergibt sich jetzt aus (4), (31) und (32)

$$A_k(x) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^x u^{\frac{k}{2}-1}\,du$$

$$+\pi^{\frac{k}{2}}\sum_{q\leqq\sqrt{x}}\sum_{p=0}^{q-1}{}'\left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^k e^{-\frac{2\pi i p x}{q}}\sum_{\nu=1}^{a}\frac{x^{\frac{k}{2}-\nu}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\nu+1\right)(2\pi i)^\nu}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{m=-M\\ m\neq-\frac{p}{q}}}^{M}\frac{(-1)^{m+1}}{\left(\frac{p}{q}+m\right)^\nu}$$

$$+O\left(x^{\frac{k}{4}}\log x\right).$$

Dies ist der Peterssonsche Ausdruck, mit dem einzigen Unterschiede, daß q nur bis $\sqrt{x}$ läuft. Läßt man aber diese Beschränkung fallen, so entsteht ein Fehler von erlaubter Größenordnung

$$O\sum_{q>\sqrt{x}}\sum_{p=1}^{q-1} q^{-\frac{k}{2}}\sum_{\nu=1}^{a} x^{\frac{k}{2}-\nu}\frac{q^{\nu}}{p^{\nu}} = O\sum_{\nu=1}^{a} x^{\frac{k}{2}-\nu}\sum_{q>\sqrt{x}} q^{-\frac{k}{2}+\nu}\log q$$

$$= O\sum_{\nu=1}^{a} x^{\frac{k}{2}-\nu+\frac{1}{2}\left(-\frac{k}{2}+\nu+1\right)}\log x = O\sum_{\nu=1}^{a} x^{\frac{k}{4}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\log x$$

$$= O\left(x^{\frac{k}{4}}\log x\right).$$

Beweis von Satz B. Aus (3) ergibt sich durch Summation über $n \leqq x$

$$(36)\quad A_k(x) - 1 = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\sum_{q=1}^{\infty}{\sum_{p=0}^{q-1}}'\left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^k\sum_{n\leqq x} n^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{2\pi i n p}{q}} \qquad (5 \leqq k \leqq 8).$$

Hierauf wende ich (31) und (32) mit $a = 1$ für $k = 5, 6$ und $a = 2$ für $k = 7, 8$, ferner mit $\varrho = \frac{p}{q}$ an — ohne mich zunächst um das Restglied in (32) zu kümmern. Dann entstehen, wie aus dem Beweise von Satz A unmittelbar abzulesen ist, die vier Ausdrücke der Behauptung ohne Restglied, links mit der Korrektur -1.

Nunmehr teile ich in (36)

$$\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\sum_{q=1}^{\infty} = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(\sum_{q\leqq x} + \sum_{q>x}\right) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

Das Restglied in (32) liefert für $\sum_1$ einen Fehler

$$O\left(x^{\frac{k}{2}-1-a}\right) + O\left(x^{\frac{k}{2}-1-a}\right)\sum_{2\leqq q\leqq x} q^{-\frac{k}{2}+1+a}.$$

Für $k = 5, 7$ ist dies

$$O\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\sum_{2\leqq q\leqq x} q^{-\frac{1}{2}} = O(x),$$

für $k = 6, 8$

$$O(x) + O(x)\sum_{2\leqq q\leqq x} q^{-1} = O(x\log x).$$

Das Restglied in (32) wird durch die linke Seite von (33) gegeben. Dieser Ausdruck ist, primitiv abgeschätzt,

$$(37)\qquad O\left(\frac{x^{\frac{k}{2}-a}}{|\varrho+m|^a}\right).$$

Die Einwirkung von (37) auf $\sum_2$ ist

$$O\left(x^{\frac{k}{2}-a}\right)\sum_{q>x} q^{-\frac{k}{2}} \sum_{p=1}^{q-1} \frac{q^a}{p^a};$$

für $k = 5, 6, 7, 8$ ist dies

$$O(x \log x), \quad O(x \log x), \quad O(x), \quad O(x).$$

Damit sind die Fälle $k = 6, 7, 8$ erledigt. Für $k = 5$ muß ich etwas vorsichtiger rechnen. Ich wende hierbei einen Kunstgriff an, den auch Petersson (loc. cit. [5]), S. 137) benutzt, und nehme für $p \leqq \frac{q}{x}$ oder für $p \geqq q\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ das O-Glied (37), für $\frac{q}{x} < p < q\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ aber das O-Glied in (32). Das gibt dann wunschgemäß

$$O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\sum_{q>x} q^{-\frac{5}{2}}\left(\sum_{p\leqq\frac{q}{x}} \frac{q}{p} + \sum_{q\left(1-\frac{1}{x}\right)\leqq p<q} \frac{q}{q-p}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\sum_{q>x} q^{-\frac{5}{2}} \sum_{\frac{q}{x}<p} \frac{q^2}{p^2}$$

$$= O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\sum_{q>x} q^{-\frac{3}{2}} \sum_{p\leqq\frac{q}{x}} \frac{1}{p} + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\sum_{q>x} q^{-\frac{1}{2}} \sum_{\frac{q}{x}<p} \frac{1}{p^2}$$

$$= O(x) + O\left(\sum_{q>3x}\left(\frac{x}{q}\right)^{\frac{3}{2}} \log\frac{q}{x}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\sum_{q>x} q^{-\frac{1}{2}}\frac{x}{q}$$

$$= O(x) + O\int_{3x}^{\infty}\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{3}{2}} \log\frac{u}{x}\,du = O(x) + O(x)\int_{3}^{\infty} u^{-\frac{3}{2}} \log u\,du$$

$$= O(x).$$

Wiesbaden, den 5. Mai 1927.

(Eingegangen am 7. Mai 1927.)

Über algebraisch rektifizierbare transzendente Kurven.

Von

Willy Feller in Göttingen.

Die algebraisch rektifizierbaren Kurven, d. h. diejenigen Kurven, deren Bogenlänge als algebraische Funktion der Koordinaten darstellbar ist, waren schon Gegenstand eingehender Untersuchungen, namentlich von Darboux*, Humbert**, Koenigsberger***, Stäckel**** und Salkowski*****, und es ist eine ganze Reihe interessanter Sätze über diese Kurven bekannt. Allen diesen Untersuchungen sind aber bloß *algebraische* Kurven zugrunde gelegt, und nur weniges konnte auch für transzendente Kurven bewiesen werden†. Es schien daher, daß die transzendenten Kurven einer anderen Behandlung bedürfen. In dieser Arbeit sollen nun diese Untersuchungen auch für solche transzendente Kurven fortgeführt werden, welche Integrale algebraischer Differentialgleichungen sind. Es zeigt sich, daß alle wesentlichen diesbezüglichen Eigenschaften erhalten bleiben, und daß man ganz naturgemäß den Laguerreschen Richtungskurven analoge transzendente Kurven einführen kann, wodurch sich die diesbezüglichen Sätze in einem Punkte wesentlich vervollständigen lassen.

1. Ein Teil der in den genannten Arbeiten bewiesenen Sätzen beruht auf dem Satze von Abel††, daß man, falls eine Beziehung besteht von

* G. Darboux, Résolution de l'équation $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$ etc., Journ. d. Math. (4), **3** (1887), p. 305.

** G. Humbert, Sur les courbes algébriques planes rectifiables, Journ. d. Math. (4), **4** (1888), p. 133.

*** L. Koenigsberger, Über rektifizierbare Kurven, Math. Annalen **32** (1889), S. 589.

**** P. Stäckel, Über algebraisch rektifizierbare Raumkurven, Math. Annalen **43** (1893), S. 171. — Ders.: Über algebraische Raumkurven, Math. Annalen **45** (1894), S. 341.

***** E. Salkowski, Über algebraisch rektifizierbare Raumkurven, Math. Annalen **67** (1909), S. 445.

† Vgl. insbesondere Koenigsberger, loc. cit.

†† N. H. Abel, Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, Crelle's Journ. **4** (1829), Chap. II, § 1, p. 264.

der Form

$$\int y_1\,dx_1 + \int y_2\,dx_2 + \ldots + \int y_n\,dx_n = u + a_1 \log v_1 + \ldots + a_m \log v_m,$$

wobei die Größen $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $u, v_1, \ldots, v_m$ und eventuell auch $x_{\nu+1}, \ldots, x_n$ algebraische Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ sind, während die a_i beliebige Konstanten bedeuten, so kann man die Funktionen $u, v_1, \ldots, v_m$ rational ausdrücken durch die Größen $x_1, \ldots, x_\nu, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

Wir wollen daher zeigen, daß man diesen Satz verallgemeinern kann für den Fall, daß unter dem Integralzeichen auch solche transzendente Funktionen vorkommen, welche Integrale algebraischer Differentialgleichungen sind. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf eine unabhängige Veränderliche und ziehen zunächst bloß Differentialgleichungen erster Ordnung in Betracht. Es seien also die Funktionen $y, z, \ldots$ Integrale des Systems

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, z, \ldots), \\ z' &= g(x, y, z, \ldots), \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{1}$$

worin f, g usw. algebraische Funktionen bedeuten und die Akzente die Differentiation nach der unabhängigen Veränderlichen x angeben. Ferner sei

$$\omega = \omega(x, y, z, \ldots)$$

eine algebraische Funktion seiner Argumente, und es möge eine Beziehung der Form

$$\int \omega\,dx = u \tag{2}$$

bestehen, in welcher u eine algebraische Funktion der Größen $x, y, z, \ldots$ ist. Es wird behauptet, daß dann u als rationale Funktion der Größen $x, y, z, y', z', \ldots$ und ω dargestellt werden kann.

Nach der Voraussetzung genügt u einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten rationale Funktionen in $x, y, z, \ldots$ sind. Gehen wir nun zum allgemeineren Rationalitätsbereich der Größen

$$x, y, y', z, z', \ldots \text{ und } \omega \tag{R}$$

über, so wird die Funktion u definiert durch eine irreduzible Gleichung

$$u^n + r_1 u^{n-1} + \ldots + r_n = 0, \tag{3}$$

wobei die Koeffizienten

$$r_i = r_i(x, y, y', z, z', \ldots, \omega)$$

rationale Funktionen sind. Durch Differentiation ergibt sich hieraus die Gleichung

$$(n u' + r_1')u^{n-1} + ([n-1]r_1 u' + r_2)u^{n-2} + \ldots + (r_{n-1} u' + r_n') = 0, \tag{4}$$

in deren Koeffizienten noch die Ableitungen $y'', z'', \ldots, \omega'$ und u' auftreten. Es ist aber

$$u' = \omega$$

und auch alle übrigen Koeffizienten lassen sich rational durch die Größen (R) ausdrücken, und daher geht die Gleichung (4) über in eine Gleichung $(n-1)$-sten Grades im selben Rationalitätsbereiche wie die der Gleichung (3). Das ist aber mit der Irreduzibilität dieser nur dann vereinbar, falls die linke Seite der Gleichung (4) identisch verschwindet, d. h. falls

$$n u' + r_1' = 0, \tag{5}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Daraus ergibt sich aber in der Tat u als rationale Funktion der Größen (R).

Allgemein kann man sich die Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ bestimmt denken durch das System

$$y_i^{(p_i)} = f_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(p_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_\nu^{(p_\nu-1)}), \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu), \tag{1a}$$

in welchem die f_i wieder algebraische Funktionen sind. Besteht dann wieder eine Beziehung wie (2), wobei nun u und ω als algebraische Funktion derjenigen Größen aufgefaßt werden können, die im System (1a) rechts auftreten, so gelangt man durch eben dieselben Schlüsse, die vorhin angewandt wurden, zum folgenden Satz:

Wenn eine Beziehung besteht von der Form

$$\int \omega \, dx = u,$$

in welcher ω und u algebraische Funktionen der Größen $x, y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ und deren Ableitungen bedeuten, wobei die Größen $y_1, \ldots, y_\nu$ durch das System (1a) *bestimmt sind, so läßt sich u als rationale Funktion der Größen $x, y_1, \ldots, y_\nu$, deren Ableitungen und der Funktion ω darstellen.*

Dabei ist zu beachten, daß sich alle höheren Ableitungen der Funktionen y_i algebraisch ausdrücken lassen durch diejenigen, die im Systeme (1a) auf der rechten Seite auftreten und ebenso rational durch diejenigen, die in (1a) überhaupt vorkommen.

Zwecks späterer Anwendung sei erwähnt, daß sich die Verhältnisse ganz ähnlich gestalten, falls eine Beziehung besteht von der Form

$$\int \omega \, dx = a \log u, \tag{6}$$

worin die Größen ω und u ihre frühere Bedeutung beibehalten und a eine Konstante bedeutet.

Hier erhält man aus der Gleichung (3) die Gleichung n-ten Grades

$$\frac{n}{a} \omega u^n + \left(r_1' + \frac{n-1}{a} \omega r_1\right) u^{n-1} + \ldots + r_n' = 0, \tag{7}$$

aus welcher aber wegen der Irreduzibilität der Gleichung (3)

$$a r_1' + (n-1)\omega r_1 = n\omega r_1, \tag{8}$$

. . . . . .

folgt; es ist also

$$\omega = a\frac{r_1'}{r_1}, \tag{8a}$$

woraus sich wieder

$$u = r_1 \cdot \text{konst.} \tag{9}$$

ergibt. Daher gilt auch der zweite Teil des verallgemeinerten Abelschen Satzes:

Falls eine Beziehung besteht von der Form

$$\int \omega\, dx = a \log u,$$

worin allen vorkommenden Größen dieselbe Bedeutung zukommt wie im letzten Satze, so ist u als rationale Funktion der Größen $x, y_1, \ldots, y_r$, *deren Ableitungen und der Funktion* ω *darstellbar.*

2. Koenigsberger hat gezeigt, daß sich der Humbertsche Satz, wonach die Bogenlänge einer algebraisch rektifizierbaren Kurve einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt, direkt als Spezialfall des genannten Satzes von Abel ergibt. Es gelang ihm auch, diesen Satz für ebene transzendente Kurven zu verallgemeinern, jedoch auf einem Wege, der sich nicht auf Raumkurven übertragen läßt. Es zeigt sich aber, daß der Satz auch für Raumkurven erhalten bleibt und sich ohne weiteres aus der Verallgemeinerung des Abelschen Satzes ergibt.

Wir wollen uns *zunächst* auf solche Kurven beschränken, die einem kanonischen System von algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung*

$$y' = f(x, y, z), \qquad z' = g(x, y, z) \tag{10}$$

genügen, so daß also die Koordinaten Integrale von irreduziblen Gleichungen von höchstens zweiter Ordnung sind. Weiter unten wollen wir auch diese Einschränkung aufheben und beliebige Differentialgleichungen zulassen. Wenn nun eine solche Kurve algebraisch rektifizierbar ist, kann man den oben bewiesenen Satz anwenden und gelangt ähnlich wie Koenigsberger für algebraische Kurven zum Satz:

Die Bogenlänge s jeder algebraisch rektifizierbaren Kurve, welche ein

* Es ist klar, daß man, wenn eine der Koordinaten einer rektifizierbaren Kurve einer Differentialgleichung m-ter Ordnung genügt, auch für die andere eine Differentialgleichung von höchstens $(m+1)$-ter Ordnung aufstellen kann.

Integral von einem System algebraischer Differentialgleichungen erster Ordnung darstellt, genügt einer quadratischen Gleichung der Form

$$(11) \qquad (s - s_0)^2 = R(x, y, y', z, z')^2 [1 + y'^2 + z'^2],$$

wobei R rational ist. Die Bogenlänge läßt sich dann und nur dann rational in den Koordinaten und deren ersten Ableitungen ausdrücken, wenn das für die Wurzel $\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$ *der Fall ist.*

Die im Satze letztgenannte Eigenschaft kommt bei den ebenen algebraischen Kurven den *Laguerreschen Richtungskurven** zu. Es ist nun bemerkenswert, daß man diesen algebraischen Richtungskurven ganz analoge transzendente Kurven zur Seite stellen kann, bei denen nämlich die Quadratwurzel $\sqrt{1 + y'^2}$ oder eventuell auch im Raume $\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$ rational in den Koordinaten und deren Ableitungen ausdrückbar ist. In der Tat kann man, wie man leicht einsieht, in diesem und nur in diesem Falle den Tangenten der Kurve einen bestimmten Sinn beilegen bzw. die Entfernung eines Punktes in der Ebene von der Kurve der Größe und dem Vorzeichen nach bestimmen, ohne ihr geometrisches Wesen dadurch zu zerstören, und es wird sich zeigen, daß die Einführung dieser Kurven ganz naturgemäß ist. Um eine passende Bezeichnung zu haben, sollen diese Kurven als „*D-Kurven*" bezeichnet werden, wie es Stäckel gelegentlich für algebraische Raumkurven tat.

3. Wir haben nunmehr die Humbert-Stäckelschen Sätze über die Beziehung der rektifizierbaren Kurven zu ihren Evolventen zu übertragen und sodann ihre explizite Bestimmung zu leisten. Letzteres soll auf einem direkten und weniger umständlichen Wege geschehen, und es wird dabei der eigentliche innere Sinn der Sätze deutlich zutage treten.

Wir wollen nun die Kurve in parametrischer Form, durch das System

$$(12) \qquad \begin{aligned} x' = f_1(x, y, z, t), \quad y' = f_2(x, y, z, t), \\ z' = f_3(x, y, z, t) \end{aligned}$$

gegeben denken, in welchem f_1, f_2 und f_3 wieder algebraische Funktionen bedeuten, und die Akzente der Differentiation nach dem Parameter t angeben. Wegen der Äquivalenz der beiden Systeme (10) und (12) dürfen wir annehmen, und das ist von Wichtigkeit, daß durch Division der

* Laguerre, Sur l'application des intégrales elliptiques et ultra elliptiques à la théorie des courbes unicursales. Œuvres **2** (1905), p. 671. (Compt. Rend. 1883.) — Sur la géometrie de diréction, und andere Arbeiten. Œuvres **2** (1905), p. 592ff.

Siehe auch Humbert, Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques, Journ. de Math. (4), **3** (1887), p. 327.

zweiten und dritten der Gleichungen (12) mit der ersten der Parameter t ausfällt, daß also das System reduzibel ist. Weiter unten wird aber, beiläufig bemerkt, auch diese Einschränkung gehoben werden.

Die Evolventen (ξ, η, ζ) der Kurve (x, y, z) sind bekanntlich gegeben durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi - x &= -(s - s_0) \cdot \frac{x'}{s'}, \qquad \eta - y = -(s - s_0) \cdot \frac{y'}{s'}, \\ \zeta - z &= -(s - s_0) \cdot \frac{z'}{s'}. \end{aligned} \tag{13}$$

Diese Gleichungen sind in den Ableitungen homogen vom Grade Null, so daß in ihnen der Parameter t explizite nur scheinbar vorkommt. Wenn die Kurve (x, y, z) algebraisch rektifizierbar ist, kann man daher durch nochmalige Differentiation und Elimination hieraus die Ableitungen ξ', η' und ζ' als algebraische Funktionen allein von ξ, η und ζ darstellen. Es fragt sich also nur noch, ob auch die Umkehrung dieses Satzes gilt, d. h. ob auch alle Evoluten von Kurven, welche zwei algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen, algebraisch rektifizierbar sind.

Es sei also irgendeine Kurve (ξ, η, ζ) gegeben, welche dem System

$$\xi' = h_1(\xi, \eta, \zeta, t), \qquad \eta' = h_2(\xi, \eta, \zeta, t), \qquad \zeta' = h_3(\xi, \eta, \zeta, t) \tag{14}$$

genügt, von welchem zunächst wieder vorausgesetzt werden soll, daß es reduzibel ist bzw. daß durch Division der zweiten und dritten Gleichung mit der ersten der Parameter t ausfällt; denn sonst könnte die Evolute nach dem Gesagten a priori nicht algebraisch rektifizierbar sein.

Bezeichnet man nun die Richtungskosinus der Hauptnormale mit λ, μ und ν, und diejenigen der Binormale mit δ, ε und ϑ, so sind die Evoluten (x, y, z) gegeben durch die Gleichungen*

$$\begin{aligned} x - \xi &= \varrho \{\lambda + \delta \cot(\varphi - \varphi_0)\}, \\ y - \eta &= \varrho \{\mu + \varepsilon \cot(\varphi - \varphi_0)\}, \\ z - \zeta &= \varrho \{\nu + \vartheta \cot(\varphi - \varphi_0)\}, \end{aligned} \tag{15}$$

worin ϱ den ersten Krümmungshalbmesser und $\varphi - \varphi_0$ den von einem beliebigen Punkt (t_0) aus gemessenen Torsionswinkel bedeutet, d. h. den Winkel, dessen Differential gleich ist dem Winkel zweier unendlich benachbarten Oskulationsebenen. Wird zur Abkürzung

$$A = \eta' \zeta'' - \zeta' \eta'', \qquad B = \zeta' \xi'' - \xi'' \zeta', \qquad C = \xi' \eta'' - \eta' \xi'' \tag{16}$$

gesetzt, so ist

---

* Vgl. z. B. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Kap. I, § 18: 2. Aufl., S. 27.

(17) $$\varrho = \frac{(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

und

(18) $$\varphi - \varphi_0 = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\tau} = \int_{t_0}^{t} \begin{vmatrix} \xi' & \xi'' & \xi''' \\ \eta' & \eta'' & \eta''' \\ \varphi' & \varphi'' & \varphi''' \end{vmatrix} \frac{(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}}{A^2+B^2+C^2}\, dt,$$

wobei $\sigma - \sigma_0$ die Bogenlänge und τ den Torsionshalbmesser bedeutet.

Aus den Gleichungssystemen (13) und (15) folgt die wichtige Gleichung

(19) $$s - s_0 = \pm \frac{\varrho}{\sin(\varphi - \varphi_0)},$$

deren linke Seite sich auf die Evolute und die rechte Seite sich auf die Evolvente bezieht. Ist nun die Evolute (x, y, z) algebraisch rektifizierbar, so ist die linke Seite der Gleichung eine algebraische Funktion von x, y und z. Dasselbe gilt auch vom Krümmungshalbmesser ϱ, denn der Parameter t fällt auch hier wegen der Voraussetzung über die Reduzibilität des Systems (19) wieder aus, und auch die Koordinaten ξ, η und ζ drücken sich, wie gesagt, algebraisch in x, y und z aus.

Es ist daher in diesem Falle $\sin(\varphi - \varphi_0)$ eine algebraische Funktion der Größen x, y und z, und daraus kann man weiter folgern, daß er auch von den Koordinaten ξ, η und ζ algebraisch abhängen muß. Das ist also allenfalls eine notwendige Bedingung für die gesuchten Evolventen. Wenn sie aber erfüllt ist, so folgen, da der Parameter wieder ausfällt, aus den Gleichungen (15) die Koordinaten x, y und z der Evolute als algebraische Funktionen von ξ, η und ζ und daher die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ als ebensolche von x, y und z, und endlich folgt aus der Gleichung (19) — da man im allgemeinen ξ, η und ζ algebraisch in x, y und z ausdrücken kann — die Bogenlänge $s - s_0$ als algebraische Funktion der Koordinaten: die Evolute ist also algebraisch rektifizierbar. Allerdings kann dabei für gewisse Werte der Konstanten φ_0, insbesondere für ebene Evoluten ein Ausnahmefall eintreten, wenn die Gleichungen (15) nicht nach ξ, η und ζ auflösbar sind. In diesem Falle muß die Evolute nicht unbedingt rektifizierbar sein, es genügen dann aber die Koordinaten x, y und z offenbar einer algebraischen Gleichung. Dieser Ausnahmefall tritt ein, falls die Evolute eine ebene, algebraische, nicht aber algebraisch rektifizierbare Kurve ist. Die anderen Evoluten sind dann Schraubenlinien auf dem geraden Zylinder, dessen Querschnitt die ebene Evolute ist, so daß alle algebraisch rektifizierbar sind, wiewohl sie keine algebraischen Kurven sein können. Wir kommen noch auf diesen Ausnahmefall zu sprechen.

Zusammenfassend kann der Satz ausgesprochen werden:

Alle algebraisch rektifizierbaren Kurven, welche Integrale zweier algebraischer Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen, sind Evoluten von Kurven, welche selbst gleichartigen Differentialgleichungen genügen. Umgekehrt aber können die Evoluten solcher Kurven nur dann algebraisch rektifizierbar sein, wenn der Sinus des Torsionswinkels der Evolventen algebraisch von den Koordinaten abhängt, und zwar sind dann die Evoluten im allgemeinen wirklich rektifizierbar. Im Ausnahmefalle aber brauchen einzelne nicht rektifizierbar zu sein, sind dann jedoch algebraische Kurven, wenn auch die Differentialgleichungen der Evolvente irreduzibel waren.

Wir haben nun den Sinus des Torsionswinkels als Funktion der Koordinaten darzustellen, so zwar, daß das Integral (18) vermieden wird. Jede Evolute umhüllt ∞^1 Normalen der Kurve, und zwar ist der Winkel, den diese Normalen mit den zugehörigen Krümmungsachsen bilden, bis auf eine für jede Evolute verschiedene, aber bestimmte additive Konstante gleich dem Torsionswinkel*. Bezeichnet man nun mit α, β und γ der Reihe nach die Richtungskosinus der zu einer gewissen Evolute gehörigen Normalen, während λ, μ und ν bzw. δ, ε und ϑ wie vorhin die Richtungskosinus der Haupt- und Binormalen bedeuten sollen, so ergeben sich für den Torsionswinkel die beiden Gleichungen:

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu \tag{20a}$$

und

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \alpha\delta + \beta\varepsilon + \gamma\varphi = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}, \tag{20b}$$

in welchen den Größen A, B und C die alte Bedeutung aus den Gleichungen (16) zukommt. Daraus folgt aber, daß der Sinus des Torsionswinkels dann und nur dann algebraisch von den Koordinaten abhängt, wenn dies für die Richtungskosinus der zu einer Evolute gehörigen Nor-

* Es sei bemerkt, daß man diese Tatsache direkt aus den weiter unten folgenden Gleichungen entnehmen kann. Durch Differentiation der Gleichung (20b) nach der Bogenlänge σ und Umformung nach den Frenetschen Formeln folgt nämlich mit Rücksicht auf (28a)

$$-\sin(\varphi-\varphi_0)\frac{d\varphi}{d\sigma} = -\frac{1}{\tau}(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu) + \frac{l}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left(\frac{d\xi}{d\sigma}A + \frac{d\eta}{d\sigma}B + \frac{d\zeta}{d\sigma}C\right)$$
$$= -\frac{1}{\tau}\sin(\varphi-\varphi_0),$$

w. z. b. w.

malen der Fall ist. Es ist also nur noch die analytische Bestimmung der Richtungskosinus α, β und γ zu leisten. Nun ist vor allem

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{21}$$

oder

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \tag{21a}$$

und ferner nach der Definition

$$\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta' = 0\,. \tag{22}$$

Als dritte Relation kann man offenbar die Bedingung gebrauchen, daß die Normalen (α, β, γ) eine Kurve umhüllen. Die Geraden

$$\mathfrak{z} = a_1\mathfrak{x} + a_2 \tag{23a}$$

$$\mathfrak{y} = b_1\mathfrak{x} + b_2 \tag{23b}$$

(wobei die Größen a_1, a_2, b_1 und b_2 Funktionen des Parameters t sind) umhüllen aber dann und nur dann eine Kurve, falls

$$\begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix} = 0\,, \tag{24}$$

und zwar wird in diesem Falle die Einhüllende durch die Gleichungen (23a—b) und

$$\mathfrak{x} = -\frac{a_2'}{a_1'} = -\frac{b_2'}{b_1'} \tag{23c}$$

bestimmt. Für die Normalen (α, β, γ) gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\gamma}{\alpha}\,, & a_2 &= \zeta - \frac{\gamma}{\alpha}\xi\,, \\ b_1 &= \frac{\beta}{\alpha}\,, & b_2 &= \eta - \frac{\beta}{\alpha}\xi\,, \end{aligned} \tag{25}$$

und daher geht (24) über in die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \xi' \\ \beta & \beta' & \eta' \\ \gamma & \gamma' & \zeta' \end{vmatrix} = 0\,. \tag{26}$$

Nun ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (21) und (22) nach kurzer Rechnung die Beziehung

$$\begin{vmatrix} \beta' & \eta' \\ \gamma' & \zeta' \end{vmatrix} = 0 \tag{27}$$

und ebenso

$$\begin{vmatrix} \alpha' & \xi' \\ \gamma' & \zeta' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha' & \zeta' \\ \beta' & \eta' \end{vmatrix} = 0\,, \tag{27a}$$

so daß schließlich die gesuchten Relationen

$$\xi' : \eta' : \zeta' = \alpha' : \beta' : \gamma' \tag{28}$$

oder

$$\begin{aligned} \xi' &= L\alpha', & \alpha' &= l\xi', \\ \eta' &= L\beta', & \beta' &= l\eta', \\ \zeta' &= L\gamma', & \gamma' &= l\zeta' \end{aligned} \tag{28a}$$

folgen, wobei $L = \frac{1}{l}$ eine willkürliche Funktion bedeutet. Durch diese Gleichungen in Verbindung mit

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{21}$$

werden die Größen α, β, γ und L bestimmt.

Die Kurven, bei denen der Sinus des Torsionswinkels algebraisch von den Koordinaten abhängt, sind diejenigen, bei denen die Größen α, β und γ aus den Gleichungen (28a) als algebraische Funktionen der Koordinaten folgen. Dieser Satz gestattet aber eine sehr einfache und anschauliche Deutung: mit Rücksicht auf die Gleichung (25) können nämlich die Größen α, β und γ als Koordinaten einer *sphärischen Kurve* angesehen werden, und die Gleichungen (32a) besagen dann, daß die Tangenten dieser sphärischen Kurve und die der Kurve (ξ, η, ζ) in entsprechenden Punkten parallel sind. Durch Elimination kann man ein System von algebraischen Differentialgleichungen herstellen, welchem diese sphärische Kurve genügt, und letztere wird sogar algebraisch sein, wenn die ursprüngliche Kurve es war. Durch Überlegungen ganz anderer Art, wie auch durch umständliche Rechnungen, kam für *algebraische* Kurven schon Stäckel zu diesem Satze, und er bildet für ihn den Ausgangspunkt zur Bestimmung aller rektifizierbaren Kurven. Während aber seine Herleitung mehr heuristischer Natur ist, tritt hier der eigentliche innere Zusammenhang der sphärischen Kurven mit den zu untersuchenden Evolventen klar zutage.

Aus den Gleichungen (28a) erhält man alle Kurven, bei denen der Sinus des Torsionswinkels algebraisch von den Koordinaten abhängt, indem man für α, β, γ und L beliebige algebraische Funktionen von ξ, η und ζ einsetzt, die nur der Bedingungsgleichung (21) unterworfen sind, und aus dem so entstehenden System von Differentialgleichungen die Größen ξ, η und ζ berechnet. Es sind also im ganzen drei willkürliche Funktionen vorhanden, von denen aber eine bloß auf die Willkür der Wahl des Parameters zurückzuführen ist.

Die Differentialgleichungen dieser Kurven lauten daher:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\frac{\partial\beta}{\partial\xi} + \frac{\partial\beta}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial\beta}{\partial\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{d\xi}}{\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} + \frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial\alpha}{\partial\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{d\xi}}, \qquad \frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{\frac{\partial\gamma}{\partial\xi} + \frac{\partial\gamma}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial\gamma}{\partial\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{d\xi}}{\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} + \frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial\gamma}{\partial\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{d\xi}}. \tag{29}$$

Die algebraisch rektifizierbaren Kurven sind Evoluten der eben bestimmten, und daher als Einhüllende der Normalen (α, β, γ) durch die Gleichungen (23a—c) gegeben, wenn man darin für die Größen a_1, a_2, b_1 und b_2 ihre Werte aus den Gleichungen (25) einsetzt und noch die Beziehungen (28a) beachtet.

Alle algebraisch rektifizierbaren Kurven, welche algebraischen Differentialgleichungen genügen, ergeben sich durch Elimination der Größen ξ, η und ζ aus dem System*

$$x = \xi - L\alpha, \quad y = \eta - L\beta, \quad z = \zeta - L\gamma,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\gamma}{\alpha}, \tag{31}$$

worin α, β, γ und L beliebige, nur der Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{21}$$

unterworfene algebraische Funktionen der Größen ξ, η und ζ sind, welche ihrerseits durch die Differentialgleichungen

$$\xi' = L\alpha', \quad \eta' = L\beta', \quad \zeta' = L\gamma' \tag{28a}$$

definiert sind.

4. Es bleibt nun noch übrig, die bekannten Sätze über das punktweise Entsprechen der algebraischen Kurven und ihren Evoluten bzw. Evolventen her zu übertragen, und eben die Anwendung dieser Sätze auf die D-Kurven wird es am besten rechtfertigen, daß wir den Richtungskurven analoge transzendente Kurven eingeführt haben.

Die Bogenlänge ist immer darstellbar in der Form

$$s - s_0 = \pm R\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) \cdot \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, \tag{11}$$

und so ersieht man, daß aus den Gleichungen (13) der Evolventen die Koordinaten ξ, η und ζ immer als rationale Funktionen der Größen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ folgen. Allein in den Gleichungen der Evoluten

$$x = \xi + \varrho\{\lambda + \delta \cot(\varphi - \varphi_0)\},$$
$$y = \eta + \varrho\{\mu + \varepsilon \cot(\varphi - \varphi_0)\}, \tag{15}$$
$$z = \zeta + \varrho\{\nu + \vartheta \cot(\varphi - \varphi_0)\}$$

* Nachträglich läßt sich nun auch verifizieren, daß diese Kurven algebraisch rektifizierbar sind. Es ist nämlich

$$s - s_0 = L,$$

und die Größen ξ, η und ζ ergeben sich im allgemeinen als algebraische Funktionen der Koordinaten x, y und z. Der vorhin besprochene Ausnahmefall tritt dann ein, wenn dies unmöglich ist, wenn also die Größen α, β, γ und L so als Funktionen der Koordinaten ξ, η und ζ gewählt wurden, daß die Funktionaldeterminante verschwindet.

heben sich nicht alle Irrationalitäten auf. Die hier auftretenden Richtungskosinus der Haupt- und Binormalen sind gegeben durch die Gleichungen

$$\lambda = \varrho \cdot \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} = \varrho \cdot \frac{\sigma'\xi'' - \xi'\sigma''}{\sigma'^3} \tag{31}$$

und

$$\delta = \varrho \begin{vmatrix} \frac{d\eta}{d\sigma} & \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} \\ \frac{d\zeta}{d\sigma} & \frac{d^2\zeta}{d\sigma^2} \end{vmatrix} = \frac{\varrho}{\sigma'^3} \begin{vmatrix} \eta' & \eta'' \\ \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix}, \tag{32}$$

bzw. durch die Gleichungen, welche sich aus diesen durch Buchstabenvertauschung ergeben.

Im ersten Gliede: $\varrho\lambda$ bzw. $\varrho\mu$ und $\varrho\nu$ tritt keine Irrationalität auf, und weil für ebene Evoluten nur dieses Glied von Null verschieden ist, so sieht man, daß sich ihre Koordinaten immer als rationale Funktionen darstellen lassen. Das zweite Glied in der Klammer ist gleich einer rationalen Funktion, multipliziert mit dem Ausdruck

$$\frac{d\sigma}{d\xi} \cot(\varphi - \varphi_0) = \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2} \cdot \cot(\varphi - \varphi_0); \tag{33}$$

sollen also *alle* Evoluten rational von den Evolventen abhängen, so muß sich sowohl $\cot(\varphi - \varphi_0)$ wie auch die Quadratwurzel von $\frac{d\sigma}{d\xi}$ rational in den Koordinaten und deren Ableitungen ausdrücken lassen und die Kurve muß somit allenfalls eine D-Kurve sein. Es soll nun mit Stäckel gezeigt werden, daß diese Bedingung auch hinreichend ist. Nach der Voraussetzung ist der Sinus des Torsionswinkels eine algebraische Funktion der Koordinaten, mithin kann nach der Gleichung (18) gesetzt werden:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\tau} = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\sigma}{d\xi} \cdot d\xi = \arcsin F(\xi, \eta, \zeta) = -i \log \Phi(\xi, \eta, \zeta), \tag{34}$$

wobei sowohl F wie Φ algebraische Funktionen bedeuten, und zwar besteht zwischen ihnen die Beziehung

$$F = -\frac{i}{2}\left(\Phi - \frac{1}{\Phi}\right). \tag{35}$$

Daher ist nach dem oben bewiesenen zweiten Satz Φ und mithin auch F darstellbar in der Form

$$F(\xi, \eta, \zeta) = r_1\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d\zeta}{d\xi}\right) + r_2\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d\zeta}{d\xi}\right) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2}, \tag{36}$$

worin mit r_1 und r_2 wieder rationale Funktionen bezeichnet wurden. Daraus ist ersichtlich, daß, falls die Kurve eine D-Kurve ist, sowohl der Sinus wie auch der Kosinus rationale Funktionen der Koordinaten und deren Ableitungen sein müssen. Es ist also in der Tat für alle D-Kurven der Ausdruck (33) rational, und wir dürfen den Satz aussprechen:

Die Koordinaten der Evolventen aller algebraisch rektifizierbaren Kurven sind als rationale Funktionen der Koordinaten der Evolute und deren ersten Ableitungen darstellbar. Umgekehrt aber hängen alle Evoluten einer Kurve dann und nur dann rational von ihr ab, falls sie eine D-Kurve ist. Speziell die ebenen Evoluten hängen immer rational von ihren Evolventen ab.

Der letzte Satz läßt sofort den Zusammenhang zwischen der Evolutenbildung und den D-Kurven in der Ebene vermuten. In der Tat besteht für die algebraischen Richtungskurven der noch auf Laguerre zurückgehende Satz, daß die Evoluten aller Richtungskurven wieder Richtungskurven sind, wie auch der Humbertsche Satz, daß die Evolventen aller algebraisch rektifizierbaren Richtungskurven wieder Richtungskurven sind. Geometrisch sind beide Sätze evident, und dennoch ist insbesondere der letztgenannte Satz noch unbefriedigend, weil er eben dem Umstand nicht gerecht wird, daß die Evolvente jeder Richtungskurve von gerichteten Geraden umhüllt wird, sondern diese Eigenschaft mit der algebraischen Rektifizierbarkeit in Zusammenhang bringt. Indem hier auch der Begriff der transzendenten D-Kurven eingeführt wurde, kann der allgemeine Satz ausgesprochen werden, der die erwähnten als spezielle Fälle schon einschließt:

Sowohl die Evolventen wie auch die Evoluten aller D-Kurven in der Ebene sind wieder D-Kurven.

Es gilt nämlich die Relation

$$s - s_0 = \varrho, \tag{37}$$

welche die Bogenlänge der Evolute mit dem Krümmungshalbmesser der Evolvente verbindet. Der letztere ist bekanntlich gleich einer rationalen Funktion der Koordinaten und deren Ableitungen multipliziert mit der Quadratwurzel $\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}$, so daß er bei den D-Kurven und nur bei diesen rational wird. Ist nun die Evolute eine D-Kurve, so drücken sich ihre Koordinaten rational in denen der Evolvente und deren Ableitungen aus; somit ist $\frac{ds}{dx} = \frac{d\varrho}{dx} = \varrho'$ eine rationale Funktion sowohl der Evolute wie auch der Evolvente, und diese muß daher, wie man leicht einsehen kann, in der Tat eine D-Kurve sein, einerlei, ob algebraisch oder nicht und ob es die Evolute war. — Bei dem Beweise des zweiten Teiles

des Satzes sei die Kurve (ξ, η) zunächst ein Integral einer irreduziblen Differentialgleichung erster Ordnung; für algebraische Kurven wurde ja dieser Teil des Satzes schon bewiesen und auf höhere Kurven kann man unseren Beweis ohne weiteres übertragen. Zwei Fälle sind zu unterscheiden, je nachdem, ob die Evolute eine algebraische Kurve wird oder algebraisch rektifizierbar (aber nicht algebraisch). Im zweiten Falle drücken sich, wie wir schon wissen, die Koordinaten der Evolvente rational in denen der Evolute und deren Ableitungen aus, so daß nicht nur die Wurzel von $\frac{ds}{dx}$, sondern auch die Bogenlänge selbst eine rationale Funktion ist. Im ersten Falle folgt aus den allgemeinen Gleichungen der Evolventen

$$\xi = x - \frac{s}{s'} x' = r_1\left(x, \frac{s}{s'}\right),$$

$$\eta = y - \frac{s}{s'} y' = r_2\left(x, y, \frac{s}{s'}\right),$$

wobei r_1 und r_2 rational sind, da sich ja bei algebraischen Kurven die Ableitungen rational in den Koordinaten ausdrücken (als Parameter wurde hier gleich die Abszisse x gewählt). Daher folgt, wenn die Evolvente eine D-Kurve ist:

$$(38) \qquad \varrho' \equiv s' = \frac{P_0(x,y)\cdot\left(\frac{s}{s'}\right)^n + P_1(x,y)\cdot\left(\frac{s}{s'}\right)^{n-1} + \ldots + P_n(x,y)}{Q_0(x,y)\cdot\left(\frac{s}{s'}\right)^m + Q_1(x,y)\cdot\left(\frac{s}{s'}\right)^{m-1} + \ldots + Q_m(x,y)},$$

wobei die P_i und Q_i Polynome bedeuten. Nun darf aber die Bogenlänge s keiner algebraischen Gleichung genügen, deren Koeffizienten algebraische Funktionen der Koordinaten wären. Daher ist auch s' rational, und die Evolute ist in der Tat eine D-Kurve. Derselbe Beweis bleibt bis auf naturgemäße kleine Änderungen auch dann richtig, wenn die Kurven durch irreduzible Differentialgleichungen von höherer als der ersten Ordnung gegeben sind, und der Satz ist somit ganz allgemein bewiesen.

5. Man kann die ganze Theorie naturgemäß auf beliebige Kurven übertragen, wenn man die frühere Definition der algebraischen Rektifizierbarkeit etwas allgemeiner faßt, indem *jene Kurven algebraisch rektifizierbar genannt werden, deren Bogenlänge als algebraische Funktion der Koordinaten und deren Ableitungen darstellbar ist.*

Dabei sind im allgemeinen bloß jene Größen in Betracht zu ziehen, welche in dem in kanonischer Form gegebenen System der Differentialgleichungen der Kurve auf der rechten Seite auftreten; denn alle Ableitungen drücken sich algebraisch in diesen aus, und ebenso rational in denjenigen, die im System überhaupt vorkommen (und nach dem ver-

allgemeinerten Abelschen Satze gilt sogar die Umkehrung vom letzteren). Daher ist für algebraische Kurven, sowie auch für jene, welche Integrale von einem System von zwei algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung sind, die verallgemeinerte Definition der Rektifizierbarkeit äquivalent mit der ursprünglichen.

Es bieten sich nun keine Schwierigkeiten mehr, alle Sätze, welche für die zwei genannten Kurvenklassen bewiesen wurden, gemäß der neuen Definition allgemein zu fassen, wobei sich auch unsere Beweismethode ohne weiteres überträgt. Es soll jedoch nicht näher darauf eingegangen werden.

Göttingen, Juni 1926.

(Eingegangen am 14. Januar 1927.)

Anwendung der Weierstraßschen Methode zur Umkehrung der elliptischen Integrale auf die Bestimmung konjugierter Punkte im Sinne der Variationsrechnung.

Von

L. Sachs in Breslau.

Die vorliegende Arbeit bestimmt in einer Reihe von Fällen konjugierte Punkte im Sinne der Variationsrechnung. Das besondere Interesse, das sie vielleicht darbietet, liegt darin, daß durchweg schwierige und selten benutzte Kapitel aus der Theorie der elliptischen Funktionen zur Anwendung kommen: die bei Halphen[1]) im 9. Kapitel des 1. Bandes behandelten Differentiationen $\frac{\partial}{\partial g_2}$, $\frac{\partial}{\partial g_3}$, ferner die Weierstraßsche Methode[2]) zur Umkehrung eines Integrals

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \qquad R(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4,$$

durch die Formeln

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2} \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}, \qquad \sqrt{R}(x) = \sqrt{a_0} \cdot [\wp u - \wp(u+v)],$$

bei denen der Vorzug darin liegt, daß die linearen oder quadratischen Faktoren des Polynoms $R(x)$ nicht bekannt zu sein brauchen; g_2 und g_3, $\wp v$ und $\wp' v$ sind rational aus den Koeffizienten a zu bilden.

Die Auswahl der behandelten Probleme ist beeinflußt durch eine wichtige Stelle aus Whittakers Mechanik[3]), an der zuerst systematisch

[1]) Halphen, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, Paris 1896, T. 1, Chap. IX.

[2]) Weierstraß, Mathem. Werke, Berlin 1915, **6**, Abschn. 5, Kap. 14, auch Halphen, T. I, Chap. IV, p. 118, sowie Appell et Lacour, Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications, Paris 1897, p. 254.

[3]) Whittaker, Anal. Dynamik der Punkte und starren Körper, nach der 2. Auflage übersetzt von Dr. F. und K. Mittelstenscheid, Berlin 1924, Kap. 4, § 48, S. 86.

diejenigen Fälle der Zentralbewegung dargestellt werden, die auf elliptische Funktionen führen. Es scheint erwünscht, diese Aufgaben vollständig zu behandeln, auch nach der Richtung der dynamischen Stabilität hin. Die Frage, ob die betrachteten Bewegungen im Sinne von Philipp Frank[4]) dynamisch stabil oder instabil sind, führt auf die Untersuchung konjugierter Punkte im Sinne der Variationsrechnung, wenn man die Bahnkurven ansieht als Extremalen des Integrals der Wirkung[5]). Das Prinzip der kleinsten Wirkung fordere etwa

$$\delta \int \sqrt{U+h}\, ds = 0,$$

dann entsprechen die Ansätze

$$U = r^{-4},\ \pm r,\ \pm r^4,\ -r^6$$

den von uns behandelten Fällen.

Analytisch handelt es sich hierbei immer um die Untersuchung, ob eine Funktion $\Phi(t)$ auf einer gewissen t-Strecke ihre Werte zweimal annimmt, oder ob sie nur ein Teilgebiet ihrer Werte zweimal, die übrigen einmal oder endlich, ob sie jeden Wert nur einmal annimmt[6]). Dies entspricht den Eigenschaften der oszillierenden Stabilität, der beschränkten Stabilität und der Instabilität im Sinne von Frank.

Man sieht leicht, daß hier Ungleichungen von Bedeutung sein werden, und zwar sind es unscheinbare Ungleichungen, die aber bisweilen schwer zu beweisen sind; sie sind teilweise von Halphen bewiesen, teilweise in

---

[4]) Monatshefte für Mathematik und Physik 20, S. 172.

[5]) Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig 1925, Anmerkungen zu § 14 und 16, S. 391ff.

[6]) Nach Kneser, L. d. V., § 14 lautet die Bedingung für das Konjugiertsein zweier Punkte $P(t)$ und $P_1(t_1)$ unter Zugrundelegung der Darstellung:

$$x = \xi(t, a, b), \quad y = \eta(t, a, b),$$

daß

$$D(t_1, t) = \vartheta_1(t) \cdot \vartheta_2(t_1) - \vartheta_2(t)\,\vartheta_1(t_1) = 0$$

ist, falls

$$\vartheta_1(t) = \xi_t(t, a, b)\,\eta_a(t, a, b) - \xi_a(t, a, b)\,\eta_t(t, a, b),$$

$$\vartheta_2(t) = \xi_t(t, a, b)\,\eta_b(t, a, b) - \xi_b(t, a, b)\,\eta_t(t, a, b).$$

Setzt man also

$$\frac{\vartheta_1(t)}{\vartheta_2(t)} = Q(t),$$

so muß der zu P_1 konjugierte Punkt P die Gleichung erfüllen:

$$Q(t) = Q(t_1).$$

Mit der so definierten Funktion $Q(t)$ ist die von uns als $\Phi(t)$ bezeichnete Funktion abgesehen von einem von t unabhängigen Faktor identisch.

vorliegender Arbeit neu abgeleitet. Als Beispiel führe ich an die von Halphen ausführlich behandelte Frage nach dem Vorzeichen der Funktion

$$\omega x^2 - \eta x - \frac{g_2}{6}\omega \quad \text{für} \quad x = e_1, e_2, e_3.$$ [7])

Die Notwendigkeit, Ungleichungen dieser Art zu betrachten und die Anwendung der oben angegebenen analytischen Methoden kennzeichnen den besonderen Charakter der folgenden Untersuchungen.

§ 1.

$$U = r^{-4}, \quad h = -l < 0.$$ [8])

Die Differentialgleichung der Extremalen lautet

$$(1) \qquad d\varphi = \frac{c\,dr}{\sqrt{1 - c^2 r^2 - l r^4}} = \frac{c}{i\sqrt{l}} \frac{dr}{\sqrt{R}}, \qquad R = r^4 + \frac{c^2}{l} r^3 - \frac{1}{l}.$$

Hieraus ergibt sich unter Benutzung der in der Einleitung besonders hervorgehobenen Umkehrmethode von Weierstraß als Gleichung der zweifach unendlichen Extremalenschar:

$$(2) \qquad \begin{aligned} r &= \zeta\left(\frac{\omega_2}{2} + i\alpha\right) + \zeta\left(\frac{\omega_2}{2} - i\alpha\right) - \eta_2 = r(\alpha, c, b), \\ \varphi &= \frac{c}{\sqrt{l}}\alpha + b \qquad\qquad\qquad\quad = \varphi(\alpha, c, b), \end{aligned}$$

und zwar sind die Invarianten

$$(2a) \qquad g_2 = \frac{c^4 - 12l}{12 l^2}, \qquad g_3 = -\frac{c^2}{216 l^3}(c^4 + 36 l),$$

die Diskriminante

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 = -\frac{1}{16 l^5}(c^4 + 4l)^2 < 0,$$

sowie

$$(2b) \qquad e_2 = \wp\,\omega_2 = -\frac{c^2}{6l}.$$

Der Parameter α ist auf das Intervall

$$2c) \qquad -\frac{\omega_2'}{2i} < a < +\frac{\omega_2'}{2i}$$

beschränkt, innerhalb dessen $r \neq 0$ ist, während an den Grenzen r verschwindet, so daß hier der Pol ein singulärer Punkt im Sinne des Prinzips der kleinsten Aktion ist.

---

[7]) Halphen, Traité d. f. e., T. I, Chap. IX, Troisième application.

[8]) Bereits mittels der Jacobischen Funktionen behandelt von L. Koschmieder, Anwendung der ell. Funktionen auf die Bestimmung konjugierter Punkte bei Problemen der Variationsrechnung, Diss., Breslau 1913.

Mit Hilfe der Formeln für die Ableitungen der Weierstraßschen elliptischen Funktionen nach den Invarianten[9]) ergeben sich für die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial}{\partial c}$, $\frac{\partial}{\partial b}$ folgende Werte:

$$r_a = -i(\wp s - \wp d), \qquad \varphi_a = \frac{c}{\sqrt{l}},$$

$$r_c = \frac{2lc}{c^4+4l}(\wp s - \wp d)(\zeta 2i\alpha + e_2 \cdot 2i\alpha), \qquad \varphi_c = \frac{\alpha}{\sqrt{l}},$$

$$r_b = 0, \qquad \varphi_b = 1,$$

wo

$$s = \frac{\omega_2}{2} + i\alpha, \qquad d = \frac{\omega_2}{2} - i\alpha.$$

Daraus erhält man wegen

$$\vartheta_1(\alpha) = r_a\varphi_b - \varphi_a r_b = r_a, \qquad \vartheta_2(\alpha) = r_a\varphi_c - \varphi_a r_c:$$

$$\frac{\vartheta_2(\alpha)}{\vartheta_1(\alpha)} = \varphi_c - \frac{\varphi_a r_c}{r_a} = \frac{\alpha}{\sqrt{l}} - \frac{c}{\sqrt{l}} \cdot \frac{2lc^2}{c^4+4l} \frac{(\wp s - \wp d)(\zeta 2i\alpha + e_2 \cdot 2i\alpha)}{-i(\wp s - \wp d)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{l}}\left\{\alpha - \frac{2lc^2}{c^4+4l} \cdot i(\zeta 2i\alpha + e_2 \cdot 2i\alpha)\right\},$$

woraus schließlich mit Rücksicht auf

$$\zeta(iu \mid g_2, g_3) = -i\zeta(u \mid g_2, -g_3) = -i\bar{\xi}u,$$

$$e_2 = -\frac{c^2}{6l}, \qquad \frac{2lc^2 e_2}{c^4+4l} = -\frac{c^4}{3(c^4+4l)}, \qquad \frac{1}{2} + \frac{2lc^2 e_2}{c^4+4l} = \frac{c^4+12l}{6(c^4+4l)}$$

folgt:

$$(3) \qquad \frac{\vartheta_2(\alpha)}{\vartheta_1(\alpha)} = \frac{1}{6\sqrt{l}(c^4+4l)}\{2\alpha(c^4+12l) - 12lc^2\bar{\xi}(2\alpha)\}.$$

Der Funktion $\bar{\xi}u$ entsprechen die Invarianten

$$(3a) \qquad \bar{g}_2 = g_2 = \frac{c^4-12l}{12l^2}, \qquad \bar{g}_3 = -g_3 = \frac{c^2}{216l^3}(c^4+36l),$$

und es ist

$$(3b) \qquad \bar{\Delta} = +\Delta, \qquad \bar{\omega}_2 = \frac{\omega_2'}{i}, \qquad \bar{e}_2 = -e_2 = \frac{c^2}{6l};$$

ferner gilt wegen (2c)

$$(3c) \qquad -\bar{\omega}_2 < 2\alpha < +\bar{\omega}_2.$$

Aus den Werten von $\bar{g}_2$ und $\bar{e}_2$ entnimmt man

$$c^4 + 12l = 72l^2\left(\bar{e}_2^2 - \frac{1}{6}\bar{g}_2\right), \qquad 12lc^2 = 72l^2\bar{e}_2,$$

daher

$$\frac{6(c^4+4l)}{72l^2}\sqrt{l} \cdot \frac{\vartheta_2(\alpha)}{\vartheta_1(\alpha)} = 2\alpha\left(\bar{e}_2^2 - \frac{1}{6}\bar{g}_2\right) - \bar{e}_2\bar{\xi}2\alpha;$$

[9]) Vgl. Anmerkung [1]).

die in der Einleitung definierte Funktion $\Phi(\alpha)$ lautet mithin

$$\Phi(\alpha) = 2\alpha\left(\bar{e}_2^2 - \frac{1}{6}\bar{g}_2\right) - \bar{e}_2\,\bar{\xi}\,2\alpha, \tag{4}$$

ihr Verhalten im Intervall

$$-\overline{\omega}_2 < 2\alpha < \overline{\omega}_2 \tag{3c}$$

ist zu untersuchen.

Aus

$$\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} - 2\left(\bar{e}_2^2 - \frac{1}{6}\bar{g}_2\right) + 2\,\bar{e}_2\,\overline{\wp}\,2\alpha$$

folgt wegen

$$\bar{e}_2^2 - \frac{1}{6}\bar{g}_2 = \frac{c^4 + 12l}{72\,l^2} > 0, \qquad \overline{\wp}\,2\alpha \geqq \bar{e}_2 > 0,$$

daß $\Phi(\alpha)$ eine beständig wachsende Funktion ist; sie nimmt im Bereiche (3c) die Werte an:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(-\tfrac{\overline{\omega}_2}{2} + 0\right) &= -\overline{\omega}_2\left(\bar{e}_2^2 - \frac{1}{6}\bar{g}_2\right) + \bar{e}_2\,\bar{\eta}_2, \\
\Phi(\mp 0) \qquad &= \pm\infty, \\
\text{da} \qquad \bar{e}_2 > 0, &\quad \bar{\xi}(\mp 0) = \mp\infty, \\
\Phi\left(+\tfrac{\overline{\omega}_2}{2} - 0\right) = -\Phi\left(-\tfrac{\overline{\omega}_2}{2} + 0\right) &= \overline{\omega}_2\left(\bar{e}_2^2 - \frac{1}{6}\bar{g}_2\right) - \bar{e}_2\,\bar{\eta}_2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Wir weisen nunmehr nach, daß

$$\Phi\left(\tfrac{\overline{\omega}_2}{2}\right) = -\Phi\left(-\tfrac{\overline{\omega}_2}{2}\right) > 0$$

ist. Hierbei gelangen wir zu einer allgemein gültigen Ungleichung von der in der Einleitung erwähnten Art.

Halphen[10]) hat gezeigt, daß im Falle $\Delta > 0$ die Funktion

$$f(x) = \omega\,x^2 - \eta\,x - \frac{g_2}{6}\,\omega$$

für $x = e_1$, e_2 negativ und für $x = e_3$ positiv ist.

Eine entsprechende Ungleichung soll hier für $\Delta < 0$ hergeleitet werden.

Setzt man die Wurzeln der Gleichung

$$\wp'^2 u = 4\,\wp^3 u - g_2\,\wp u - g_3 = 0,$$

von denen unter der Voraussetzung $\Delta < 0$ eine $-\,e_2\,-$ reell, die beiden anderen $-\,e_1$ und $e_3\,-$ konjugiert-komplex sind,

$$e_1 = m + ni, \qquad e_2 = -2m, \qquad e_3 = m - ni,$$

und den Ausdruck

$$9\,m^2 + n^2 = H^2$$

[10]) Vgl. Anmerkung [7]).

sowie

$$\frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H} = k_1^2,$$

so ist, falls K_1 und E_1 die in der Jacobischen Theorie der elliptischen Funktionen auftretenden Transzendenten bezogen auf den Modul k_1 bedeuten,

(a) $$\omega_2 = \frac{K_1}{\sqrt{H}}, \qquad \eta_2 = -\frac{K_1}{\sqrt{H}}(H + e_2) + 2\sqrt{H}\cdot E_1 .$$ [11])

Die Invarianten der den Größen ω_2, η_2 entsprechenden $\wp$- bzw. ζ-Funktionen sind

$$g_2 = -4[e_2(e_1 + e_3) + e_1 e_3] = 4(3m^2 - n^2),$$
$$g_3 = 4 e_1 e_2 e_3,$$

also hat man

$$e_2^2 - \frac{1}{6} g_2 = 4m^2 - \frac{2}{3}(3m^2 - n^2) = \frac{6m^2 + 2n^2}{3}$$

und

(b) $$f(e_2) = \omega_2 e_2^2 - \eta_2 e_2 - \frac{1}{6} g_2 \omega_2 = \frac{6m^2 + 2n^2}{3}\cdot \omega_2 + 2m\eta_2 .$$

Wir betrachten nunmehr neben der Funktion $\wp(u/g_2, g_3)$ mit negativer Diskriminante Δ eine Funktion $\wp_a(u/g_{2a}, g_{3a})$ mit der Differentialgleichung

$$\wp_a'^2 u = 4(\wp_a u - e_{a1})(\wp_a u - e_{a2})(\wp_a u - e_{a3}),$$

wo

$$e_{a1} = \frac{H}{2} + \frac{e_2}{4} = \frac{H - m}{2}, \qquad e_{a2} = -\frac{e_2}{2} = m, \qquad e_{a3} = -\frac{H + m}{2}$$
$$(e_{a1} > e_{a2} > e_{a3}).$$

Die Diskriminante $\Delta_a = g_{2a}^3 - 27 g_{3a}^2$ ist positiv, und man hat

$$g_{2a} = -4[e_{a2}(e_{a1} + e_{a3}) + e_{a1} e_{a3}] = 4\left(m^2 + \frac{H^2 - m^2}{4}\right),$$
$$g_{3a} = 12m^2 + n^2,$$

also

$$e_{a2}^2 - \frac{1}{6} g_{a2} = \frac{6m^2 - (12m^2 + n^2)}{6} = -\frac{1}{6}(6m^2 + n^2).$$

---

[11]) L. Lévy, Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques, Paris 1898, leitet in Chap. VI Übergangsformeln von den Weierstraßschen zu den Jacobischen elliptischen Funktionen her. Hierbei sind, wie die genaue Durchrechnung zeigt, offenbar einige Fehler unterlaufen. Man erhält z. B. im Falle $\Delta < 0$:

$$\zeta u = -u(H + e_2) + \sqrt{H}\left\{2E(u\sqrt{H}, k_1) + \frac{\operatorname{cn}(u\sqrt{H}, k_1)[1 - 2k_1^2 \operatorname{sn}^2(u\sqrt{H}, k_1)]}{\operatorname{sn}(u\sqrt{H}, k_1)\operatorname{dn}(u\sqrt{H}, k_1)}\right\}$$

und für η_2 den obigen Wert. — Im übrigen lassen sich jedoch die von Lévy daselbst benutzten Ansätze bei dem vorliegenden Beweis recht erfolgreich verwerten.

Die Funktion

$$f_\alpha(x) = \omega_{\alpha 1} x^2 - \eta_{\alpha 1} x - \frac{1}{6} g_{2\alpha} \omega_{\alpha 1}$$

ist nach dem oben angegebenen Satz von Halphen an der Stelle $x = e_{\alpha 2}$ stets negativ, demnach

$$-\frac{1}{6} \omega_{\alpha 1} (6m^2 + n^2) - m \eta_{\alpha 1} < 0,$$

mithin

$$\text{(c)} \qquad \omega_{\alpha 1} \cdot \frac{6m^2 + n^2}{3} + 2m \eta_{\alpha 1} > 0.$$

Nun ist

$$\text{(d)} \qquad \omega_{\alpha 1} = \frac{K_1}{\sqrt{H}}, \qquad \eta_{\alpha 1} = \sqrt{H}\left[E_1 - e_{\alpha 1} \frac{K_1}{H}\right],$$ [12])

da

$$k_\alpha^2 = \frac{e_{\alpha 2} - e_{\alpha 3}}{e_{\alpha 1} - e_{\alpha 3}} = \frac{1}{2} - \frac{3 e_2}{4H} = k_1^2.$$

Aus (a) und (d) folgt:

$$\eta_2 - 2\eta_{\alpha 1} = \frac{K_1}{\sqrt{H}} [2 e_{\alpha 1} - H - e_2], \qquad \omega_2 = \omega_{\alpha 1},$$

und es ist

$$2 e_{\alpha 1} - H - e_2 = (H - m) - H + 2m = m = e_{\alpha 2},$$

also nach (b)

$$\text{(e)} \qquad f(e_2) = \omega_{\alpha 1} \left[\frac{6m^2 + 2n^2}{3} + 2m e_{\alpha 2}\right] + 2m \cdot 2\eta_{\alpha 1}.$$

Wegen

$$e_{\alpha 2} = m$$

gilt

$$\frac{6m^2 + 2n^2}{3} + 2m e_{\alpha 2} = \frac{2}{3}(6m^2 + n^2),$$

daher

$$\text{(f)} \qquad f(e_2) = \frac{2}{3} \omega_{\alpha 1} [6m^2 + n^2] + 2m \cdot 2\eta_{\alpha 1},$$

$$f(e_2) = 2\left[\omega_{\alpha 1} \cdot \frac{6m^2 + n^2}{3} + 2m \eta_{\alpha 1}\right] = 2 f_\alpha(e_{\alpha 2}) > 0$$

auf Grund von (c).

Damit ist gezeigt, daß für $\Delta < 0$

$$f(e_2) = \omega_2 e_2^2 - e_2 \eta_2 - \frac{g_2}{6} \omega_2 > 0$$

allgemein gilt.

Da nach (5) die beständig wachsende Funktion $\Phi(\alpha)$ für $-\overline{\omega}_2 < 2\alpha < 0$ von dem negativen Werte $-\Phi\left(\frac{\overline{\omega}_2}{2}\right)$ bis $+\infty$, und für $0 < 2\alpha < \overline{\omega}_2$

[12]) L. Lévy, Chap. VI, p. 88.

von $-\infty$ bis $\Phi\left(\frac{\overline{\omega}_2}{2}\right) > 0$ steigt, so müssen zwei Argumente $w_1 < 0$ und $w_2 > 0$ existieren, für die gilt:

$$\Phi(w_1) = \Phi\left(\frac{\overline{\omega}_2}{2}\right), \qquad \Phi(w_2) = \Phi\left(-\frac{\overline{\omega}_2}{2}\right) = -\Phi\left(\frac{\overline{\omega}_2}{2}\right),$$

und aus

$$\Phi(-\alpha) = -\Phi(\alpha)$$

folgt

$$w_1 = -w_2 = w.$$

Die Funktion $\Phi(\alpha)$ nimmt nur die zwischen $-\Phi\left(\frac{\overline{\omega}_2}{2}\right)$ und $+\Phi\left(\frac{\overline{\omega}_2}{2}\right)$ liegenden Werte zweimal an, alle übrigen nur einmal. Soll also zu einem Punkte $P_1(r_1, \varphi_1)$, der dem Parameter α_1 entspricht, ein konjugierter Punkt $P(r, \varphi; \alpha)$ vorhanden sein, so muß α_1 entweder dem Intervall I: $-\frac{\overline{\omega}_2}{2} < \alpha < -w$, oder II: $w < \alpha < \frac{\overline{\omega}_2}{2}$ angehören; α liegt dann in II oder I. Den entgegengesetzt gleichen Argumenten $-w$ und $+w$ entsprechen, wie aus der Extremalendarstellung hervorgeht, zwei bezüglich der Geraden $\varphi = b$ symmetrische Punkte R' und R der Bahn, während den Grenzwerten $-\frac{\overline{\omega}_2}{2}$ und $+\frac{\overline{\omega}_2}{2}$ der Pol entspricht.

Den Intervallen I und II sind daher zwei zur Geraden $\varphi = b$ symmetrische Teile der Bahn zugeordnet, und zwar I dem unteren $\varphi < b$, II dem oberen $\varphi > b$.

Durchläuft P_1 den unteren Teil vom Pol bis R', so wandert der konjugierte Punkt P von R zum Pol im gleichen Sinne. Den Bahnpunkten zwischen R' und R sind keine Konjugierten zugeordnet.

Die Bewegung $U = r^{-4}$, $h < 0$ ist also beschränkt stabil, wie bereits Koschmieder mit Hilfe Jacobischer Funktionen nachgewiesen hat[13]).

§ 2.

$U = r$.

Die Differentialgleichung der Extremalen ist

$$d\varphi = \frac{c\,dr}{r\sqrt{r^3 + hr^2 - c^2}}. \tag{1}$$

Die Funktion

$$f(r) = r^3 + hr^2 - c^2$$

hat stets eine reelle Nullstelle, ohne daß eine besondere Ungleichung zwischen c und h erfüllt zu sein braucht, da $f(0) = -c^2$, $f(+\infty) = +\infty$ ist.

Unter der Voraussetzung

$$h^3 + \frac{27c^2}{4}$$

[13]) Vgl. Anmerkung [8]).

sind die Extremalen dargestellt durch

$$(2)\qquad \begin{aligned} r &= \wp u - \wp v &&= r(u, c, b),\\ \varphi &= i\left[\ln\frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)} + 2(u\zeta v - \tilde{\omega}\zeta v + \tilde{\eta} v)\right] + b = \varphi(u, c, b), \end{aligned}$$

und zwar hat man

$$(2a)\qquad g_2 = \frac{4h^2}{3}, \qquad g_3 = 4\left(c^2 - \frac{2h^3}{27}\right),$$
$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 = 16 c^2 (4h^3 - 27 c^2),$$

$$(2b)\qquad \wp v = \frac{h}{3}, \qquad \wp' v = -2ic,$$

$$\tilde{\omega} = \omega_2 \text{ bzw. } \omega, \qquad \tilde{\eta} = \eta_2 \text{ bzw. } \eta, \qquad \text{je nachdem } \Delta \lessgtr 0.$$

Aus der Darstellung (2) folgt auf Grund einfacher Rechnungen, daß die Bahnkurve aus lauter kongruenten Zweigen besteht, daß die Geraden $\varphi(2n\tilde{\omega}) = \varphi(0) + 2n\psi$, falls $\psi = \pi - 2i(\tilde{\eta} v - \tilde{\omega}\zeta v)$, Asymptoten sind. Die wirkliche Bewegung erfolgt auf irgendeinem dieser Zweige; als solchen nehmen wir willkürlich den an, der dem Intervall

$$(2c)\qquad 0 < u < 2\tilde{\omega}$$

zugeordnet ist, also innerhalb der Geraden $\varphi(0) = b - \psi$, $\varphi(2\tilde{\omega}) = b + \psi$ und bezüglich der Geraden $\varphi = b$, wie leicht zu zeigen ist, symmetrisch liegt. Auf dieser Symmetralen $\varphi = b$ liegt das Perizentrum $B(r, = \wp\tilde{\omega} - \wp v)$.

Im Falle

$$h^3 = \frac{27 c^2}{4}, \qquad \Delta = 0$$

ergibt sich für die Extremalen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} r &= u^2 + \sqrt[3]{\frac{c^2}{4}} &&= r(u, c, b),\\ \varphi &= 2\left[\operatorname{arctg} u\sqrt[3]{\frac{2}{c}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{c}}\right] + b = \varphi(u, c, b), \end{aligned}$$

wo

$$(3a)\qquad -\infty < u < +\infty.$$

Es sind hier folgende Fälle möglich:

I. $h = -l < 0$:

$$g_2 = \frac{4l^2}{3}, \qquad g_3 = 4\left(c^2 + \frac{2l^3}{27}\right), \qquad \Delta = -16 c^2 (4l^3 + 27 c^2) < 0.$$

II. $h = 0$:

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = 4c^2, \qquad \Delta < 0.$$

III. $h > 0$:

a) $0 < h^3 < \frac{27c^2}{4}$: $g_2 > 0, \quad g_3 > 0, \quad \Delta < 0;$

b) $h^3 = \frac{27c^2}{4}$: $\Delta = 0;$

c) $\frac{27c^2}{4} < h^3 < \frac{27c^2}{2}$: $g_2 > 0, \quad g_3 > 0, \quad \Delta > 0;$

d) $h^3 = \frac{27c^2}{2}$: $g_2 > 0, \quad g_3 = 0, \quad \Delta > 0;$

e) $\frac{27c^2}{2} < h^3$: $g_2 > 0, \quad g_3 < 0, \quad \Delta > 0.$

In den Fällen, wo $\Delta \neq 0$ ist, erhält man mit Hilfe der Ableitungen nach den Invarianten[14]):

$$r_u = \wp' u, \qquad \varphi_u = i \cdot \frac{\wp' v}{\wp u - \wp v},$$

$$\Delta r_c = g_3' \left[\wp' u \left(3 g_2 \zeta u - \frac{9}{2} g_3 u\right) + 6 g_2 \wp^2 u - 9 g_3 \wp u - g_2^2\right], \qquad \left(g_3' = \frac{\partial g_3}{\partial c}\right)$$

$$\Delta \varphi_c = i g_3' \wp' v \left[\frac{-9 g_3 u}{2(\wp u - \wp v)} + 3 g_2 \left(\frac{\zeta u}{\wp u - \wp v} + \frac{\tilde{\omega} - u}{2}\right) + 18 \wp v \left(\zeta u - \tilde{\eta} + \frac{\wp' u}{2(\wp u - \wp v)}\right)\right],$$

$$r_b = 0, \qquad \varphi_b = 1.$$

Hieraus folgt, daß

$$\Delta \frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_1(u)} = \Delta \left(\varphi_c - \frac{r_c \varphi_u}{r_u}\right) = 144 c^2 \Phi(u)$$

ist, wo

$$\Phi(u) = 2 \wp v [\zeta u - \tilde{\eta} + \wp v (\tilde{\omega} - u)] + \frac{4 \wp v \wp^2 u - 4 \wp u \wp^2 v - 16 \wp^3 v + g_3}{\wp' u}. \tag{4}$$

Man erhält zunächst durch eine einfache Rechnung mit Rücksicht auf $r = \wp u - \wp v = \wp u - \frac{h}{3}$

$$\frac{d\Phi(u)}{du} = \frac{r}{18 c^2 \wp'^2 u} \cdot \Delta (r + h),$$

und es ist

$$r + h \gtrless r_1 + h,$$

falls $r_1 = \wp \tilde{\omega} - \wp v$ die positive Wurzel der Gleichung $r^3 + h r^2 - c^2 = 0$ ist. Hieraus folgt

$$r_1 + h = \frac{c^2}{r_1^2} > 0 \quad \text{für} \quad h \gtrless 0.$$

---

[14]) Vgl. Anmerkung [1]).

Die Funktion $\Phi(u)$ steigt daher monoton für $\Delta > 0$, sie hat fallende Tendenz im Falle $\Delta < 0$. Sie besitzt einen Pol an der Stelle $u = \tilde{\omega} \mp 0$, wo $\wp' u = \mp 0$ ist.

Nun gilt

$$\Phi(\tilde{\omega} \mp 0) = \frac{Z(\tilde{\omega})}{\mp 0},$$

wo

$$\begin{aligned} Z(u) &= 4\wp^2 u \wp v - 4\wp u \wp^2 v - 16\wp^3 v + g_3 \\ &= 4(\wp u - 2\wp v)(\wp u + 2\wp v)(\wp u + \wp v) - \wp'^2 u \end{aligned}$$

ist; daraus folgt:

$$\begin{aligned} Z(\tilde{\omega}) &= 4\left(\wp\tilde{\omega} - \frac{2h}{3}\right)\left(\wp\tilde{\omega} + \frac{2h}{3}\right)\left(\wp\tilde{\omega} + \frac{h}{3}\right) \\ &= 4\left(r_1 - \frac{h}{3}\right)(r_1 + h)\left(r_1 + \frac{2h}{3}\right). \end{aligned}$$

Im Falle $h = -l < 0$ ist wegen der obigen Ungleichung $r_1 + h = r_1 - l > 0$

$$Z(\omega_2) = 4\left(r_1 + \frac{l}{3}\right)(r_1 - l)\left(r_1 - \frac{2l}{3}\right) > 0,$$

und im Falle $h > 0$, $\Delta = 64c^2\left(h^3 - \frac{27c^2}{4}\right) \leqq 0$ hängt das Vorzeichen der Funktion $Z(\tilde{\omega})$ von der Differenz $r_1 - \frac{h}{3}$ ab.

Die Funktion $f(r) = r^3 + hr^2 - c^2$ steigt für $r > -\frac{2h}{3}$ monoton, sie nimmt für $r = \frac{h}{3}$ den Wert

$$f\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{4}{27}\left(h^3 - \frac{27c^2}{4}\right)$$

an, also ist

$$f\left(\frac{h}{3}\right) \gtrless 0 \quad \text{für} \quad \Delta \gtrless 0,$$

und man hat

$$f(r_1) = 0,$$

mithin ist

$$r_1 - \frac{h}{3} \leqq 0, \quad \text{je nachdem } \Delta \gtrless 0,$$

also für

$$h > 0, \quad \Delta \leqq 0 \qquad Z(\tilde{\omega}) \gtrless 0.$$

Damit ist gezeigt, daß

$$\text{für } \Delta < 0 \quad \Phi(\omega_2 \mp 0) = \mp\infty,$$

$$\text{für } \Delta > 0 \quad \Phi(\omega \mp 0) = \pm\infty$$

gilt. Weiter hat man wegen

$$\lim_{u \to 0} \wp' u = \infty, \qquad \lim_{u \to 0} \frac{\wp u}{\wp' u} = 0$$

und der leicht aus den Reihendarstellungen der Funktionen ζu, $\wp u$ und $\wp' u$ zu beweisenden Tatsache, daß

$$\lim_{u \to 0} \left(\zeta u + \frac{2 \wp^2 u}{\wp' u} \right) = 0$$

ist,

$$\Phi(0) = 2 \tilde{\omega} \wp v \left(\wp v - \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\omega}} \right),$$

$$\Phi(2 \tilde{\omega}) = - \Phi(0),$$

so daß nunmehr noch das Vorzeichen des Ausdrucks

$$\Phi(0) = 2 \tilde{\omega} \wp v \left(\wp v - \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\omega}} \right)$$

in den einzelnen Fällen zu bestimmen ist.

I. $h = -l < 0$:

Man hat

$$\Delta < 0, \quad g_3 > 0, \quad \wp v = -\frac{l}{3}, \quad g_2 = 12 \wp^2 v,$$

daher

$$\Phi(0) = \frac{2}{3} l \left[\frac{\eta_2}{\omega_2} + \sqrt{\frac{g_2}{12}} \right] \omega_2.$$

Es wird im folgenden gezeigt, daß für $\Delta < 0$, $g_3 > 0$ die Ungleichung besteht:

$$\frac{\eta_2}{\omega_2} \pm \sqrt{\frac{g_2}{12}} > 0.$$

Setzt man nämlich ähnlich wie in § 1 [15])

$$e_1 = -m + ni, \quad e_2 = 2m > 0 \text{ wegen } g_3 > 0, \quad e_3 = -m - ni,$$

so ist

(a) $$g_2 = 4(3m^2 - n^2),$$

ferner sei

$$e_{a1} = \frac{m + H}{2}, \quad e_{a2} = -m, \quad e_{a3} = \frac{m - H}{2}, \quad H^2 = 9m^2 + n^2.$$

Dann gilt nach § 1 [16])

$$\eta_2 = 2 \eta_{a1} + e_{a2} \omega_{a1}, \quad \omega_2 = \omega_{a1},$$

demnach ist

(b) $$\frac{\eta_2}{\omega_2} = \frac{2 \eta_{a1}}{\omega_{a1}} + e_{a2} = \frac{2 \eta_{a1}}{\omega_{a1}} - m.$$

---

[15]) Seite 500 ff.

[16]) Seite 502.

Nun besteht nach Halphen[17]) die Ungleichung

$$e_{\alpha 2} + \frac{\eta_{\alpha 1}}{\omega_{\alpha 1}} > 0,$$

also

$$\frac{\eta_{\alpha 1}}{\omega_{\alpha 1}} > -e_{\alpha 2}, \qquad \frac{\eta_{\alpha 1}}{\omega_{\alpha 1}} > m,$$

folglich

(c) $$\frac{\eta_2}{\omega_2} > m.$$

Andererseits ist

(d) $$\sqrt{\frac{g_2}{12}} = \sqrt{m^2 - \frac{n^2}{3}} < m,$$

mithin

(e) $$\frac{\eta_2}{\omega_2} > \sqrt{\frac{g_2}{12}} \geqslant -\sqrt{\frac{g_2}{12}}, \qquad \frac{\eta_2}{\omega_2} \mp \sqrt{\frac{g_2}{12}} > 0.$$

Damit ist für den vorliegenden Fall nachgewiesen, daß

$$\Phi(0) > 0$$

ist.

II./III. $h \geqq 0$.

Hier ist

$$\wp v = \frac{h}{3}, \qquad g_2 = 12\,\wp^2 v, \qquad \Delta \leqq 0$$

und

$$\Phi(0) = \frac{2}{3} h \tilde{\omega} \left[\sqrt{\frac{g_2}{12}} - \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\omega}} \right].$$

Nach (e) gilt

$$\frac{\eta_2}{\omega_2} - \sqrt{\frac{g_2}{12}} > 0,$$

also hat man im Falle II und III a, wo $h \geqq 0$, $\Delta < 0$ ist,

$$\Phi(0) \leqq 0.$$

In den Fällen III c bis III e jedoch ist $\Delta > 0$ und

$$\Phi(0) = \frac{2}{3} h \omega \left[\sqrt{\frac{g_2}{12}} - \frac{\eta}{\omega} \right].$$

Halphen hat für $\Delta > 0$ folgenden Satz bewiesen[18]):

Bei konstantem $g_2 > 0$ wächst $\frac{\eta}{\omega}$ monoton von $-\sqrt{\frac{g_2}{12}}$ bis $+\sqrt{\frac{g_2}{12}}$, falls g_3 von $-\sqrt{\frac{g_2}{12}}^3$ bis $+\sqrt{\frac{g_2}{12}}^3$ geht.

---

[17]) T. II, Chap. VI, p. 273.

[18]) T. I, Chap. IX, p. 315, Deuxième application.

Hiernach ist

$$\frac{\eta}{\omega} < \sqrt{\frac{g_2}{12}},$$

und der Klammerausdruck

$$\sqrt{\frac{g_2}{12}} - \frac{\eta}{\omega} > 0,$$

also für $h > 0$, $\Delta > 0$

$$\Phi(0) > 0.$$

Wir fassen die bisher erhaltenen Ergebnisse bezüglich des Verlaufs der Funktion $\Phi(u)$ im Intervall $0 < u < 2\tilde{\omega}$ zusammen.

Für $h < 0$, $\Delta < 0$ fällt $\Phi(u)$ monoton, und zwar ist

$$\Phi(0) > 0, \quad \Phi(\omega_2 \mp 0) = \mp\infty, \quad \Phi(2\omega_2) < 0.$$

Die Funktion fällt gleichfalls monoton für $h \geqq 0$, $\Delta < 0$; jedoch gilt hier

$$\Phi(0) \leqq 0, \quad \Phi(\omega_2 \mp 0) = \mp\infty, \quad \Phi(2\omega_2) \geqq 0.$$

Im Falle $h > 0$, $\Delta > 0$ steigt $\Phi(u)$ monoton, und man hat

$$\Phi(0) > 0, \quad \Phi(\omega \mp 0) = \pm\infty, \quad \Phi(2\omega) < 0.$$

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, daß im Falle $U = +r$, $h \geqq 0$ die Funktion $\Phi(u)$ diejenigen Werte, deren absoluter Betrag kleiner als $|\Phi(0)|$ ist, überhaupt nicht, alle übrigen genau einmal annimmt. Konjugierte Punkte sind also hier nicht vorhanden und die Bewegung ist oszillierend nicht stabil.

Beschränkte Stabilität dagegen liegt im Falle $U = r$, $h = -l < 0$ vor; denn die zwischen $-\Phi(0)$ und $+\Phi(0)$ liegenden Werte werden genau zweimal, alle übrigen einmal angenommen.

Die weiteren Betrachtungen verlaufen ganz entsprechend wie im Falle $U = r^{-4}$, $h < 0$ (§ 1).

Man hat hier wieder zwei Argumente w_1 und w_2, für die

$$0 < w_1 < \omega_2\colon \ \Phi(w_1) = \Phi(2\omega_2) = -\Phi(0), \quad \omega_2 < w_2 < 2\omega_2\colon \ \Phi(w_2) = \Phi(0)$$

gilt; ihre Symmetrie bezüglich ω_2 ist leicht nachzuweisen, ebenso die Tatsache, daß die Bahnpunkte R' und R, die ω_1 bzw. ω_2 zugeordnet sind, symmetrisch bezüglich der Geraden $\varphi = b$ liegen. R' liegt auf der unteren Hälfte der Bahnkurve, die dem Parameterintervall

$$0 \leqq u \leqq \omega_2$$

und den Amplituden

$$b - \psi \leqq \varphi \leqq b$$

zugeordnet ist, während R der oberen Hälfte angehört, für die

$$\omega_2 \leqq u \leqq 2\omega_2, \quad b \leqq \varphi \leqq b + \psi$$

gilt.

Das endgültige Ergebnis im Falle $U = r$, $h = -l < 0$ lautet:

Zu jedem Punkt $P(u)$, dessen Parameter einem der Intervalle

$$0 \leqq u \leqq w_1, \qquad w_2 \leqq u \leqq 2\omega_2$$

angehört, existiert ein konjugierter Punkt $P'(u')$, so daß u' dem anderen Intervalle angehört. Bahnpunkten, die Parameterwerten des Intervalls

$$w_1 \leqq u \leqq w_2$$

zugeordnet sind — sie liegen also zwischen R' und R — sind keine konjugierten zugeordnet.

Man kann übrigens ganz allgemein zeigen, daß im Falle $U = r^n$, $h = 0$ die Bewegung nicht stabil ist. Als Extremalendarstellung ergibt sich hier:

$$r = \left(\frac{c}{\cos\alpha}\right)^{\frac{2}{n+2}} = r(\alpha, c, b)\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq +\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\varphi = \frac{2}{n+2}\alpha + b = \varphi(\alpha, c, b);$$

daraus folgt

$$r_\alpha = -\frac{2}{n+2} c^{\frac{2}{n+2}} \cos^{-\frac{n+4}{n+2}}\alpha \sin\alpha, \qquad \varphi_\alpha = \frac{2}{n+2},$$

$$r_c = \frac{2}{n+2} c^{-\frac{n}{n+2}} \cos^{-\frac{2}{n+2}}\alpha, \qquad \varphi_c = 0,$$

$$r_b = 0, \qquad \varphi_b = 0,$$

Demnach gilt

$$\frac{\vartheta_2(\alpha)}{\vartheta_1(\alpha)} = -\frac{\varphi_\alpha r_c}{r_\alpha} = \frac{2}{n+2}\cdot\frac{1}{c}\cdot\operatorname{cotg}\alpha,$$

so daß für jeden Wert von n

$$\Phi(\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$$

ist, eine Funktion, die im Intervall

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq +\frac{\pi}{2}$$

monoton fallend jeden reellen Wert genau einmal annimmt.

Zu erledigen bleibt nunmehr noch der Fall $U = r$, $h^3 = \frac{27c^2}{4}$, wo $\Delta = 0$ ist. Wegen

$$c = \frac{2}{3} h \sqrt{\frac{h}{3}}$$

läßt sich die Darstellung (3) der Extremalen in eine zur Berechnung der partiellen Ableitungen r_u, φ_u usw. bequemere Form bringen, nämlich

$$r = u^2 + \frac{h}{3} = r(u, c, b),$$

(3*)

$$\varphi = 2\left[\operatorname{arctg} u\sqrt{\frac{3}{h}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{h}}\right] + b = \varphi(u, c, b).$$

Dann ist

$$r_u = 2u, \qquad \varphi_u = \frac{6c}{(u^2+h)(3u^2+h)},$$

$$r_c = \frac{1}{\sqrt{3h}}, \qquad \varphi_c = \frac{-2u}{(u^2+h)(3u^2+h)},$$

$$r_b = 0, \qquad \varphi_b = 1.$$

Hieraus folgt schließlich

$$\vartheta_2(u) = r_u\varphi_c - \varphi_u r_c = \frac{-2}{(u^2+h)(3u^2+h)}\left(2u^2 + c\sqrt{\frac{3}{h}}\right) = \frac{-4}{3(u^2+h)},$$

$$\vartheta_1(u) = r_u,$$

also

$$\frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_1(u)} = \frac{-2}{3u(u^2+h)},$$

und als die über die Existenz konjugierter Punkte entscheidende Funktion ergibt sich die ganze rationale

$$\Phi(u) = u^3 + uh,$$

die monoton steigend jeden Wert genau einmal annimmt. Also ist auch in diesem Sonderfall wie für alle übrigen Werte $h > 0$ die Bewegung nicht stabil.

§ 3.

$U = r^4$.

Die Differentialgleichung für die Extremalen lautet:

(1)
$$d\varphi = \frac{c\,dr}{r\sqrt{r^6 + hr^2 - c^2}} = \frac{c\,dr}{r\sqrt{f(r)}}.$$

Der Radikand $f(r)$ hat wegen $f(0) = -c^2$, $f(\infty) = \infty$ stets eine positive Nullstelle, ohne daß zwischen c und h eine einschränkende Bedingung in Form einer Ungleichung besteht. Der Sonderfall $h^3 = -l^3 = -\frac{27c^4}{4}$ führt auf elementare, die übrigen Fälle auf elliptische Funktionen, und zwar bestehen hier folgende Möglichkeiten:

I. $h = -l < 0$; $g_2 = 4l > 0$, $g_3 = 4c^3$, $\Delta = 64\left(l^3 - \frac{27c^4}{4}\right)$,

a) $l^3 > \frac{27c^4}{4}$: $\Delta > 0$,

b) $l^3 = \frac{27c^4}{4}$: $\Delta = 0$,

c) $l^3 < \frac{27c^4}{4}$: $\Delta < 0$,

II. $h=0;\quad \Delta<0,$

III. $h>0;\quad \Delta<0.$

In den Fällen mit nicht verschwindender Diskriminante Δ lautet die Darstellung der Extremalen:

$$r=\sqrt{\wp u}=r(u,c,b),$$

$$\varphi=\frac{i}{2}\left[\ln\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}+2\langle(\tilde\omega-u)\,\zeta v-\tilde\eta v\rangle\right]+b=\varphi(u,c,b), \tag{2}$$

wo

$$g_2=-4h,\quad g_3=4c^2;\qquad \wp v=0,\quad \wp' v=2ic, \tag{2a}$$

$$\tilde\omega=\omega \text{ oder } \omega_2,\quad \tilde\eta=\eta \text{ oder } \eta_2, \text{ je nachdem } \Delta\gtrless 0.$$

Wie im Falle $U=r$ zeigt man leicht, daß die Bahnkurve symmetrisch bezüglich der Geraden $\varphi=b$ ist und aus unendlich vielen kongruenten Zweigen besteht, deren Asymptoten die Geraden

$$\varphi=\varphi(0)+2n\psi=b+(2n-1)\psi$$

sind, falls

$$\psi=\frac{\pi}{2}-i(\tilde\omega\zeta v-\tilde\eta v).$$

Der wirklichen Bewegung entspreche das Intervall

$$0<u<2\tilde\omega; \tag{2b}$$

der untere Teil der Bahn ($0<u<\tilde\omega,\ b-\psi<\varphi<b$) wird durch die Gerade $\varphi=b$ von dem ihm bezüglich derselben symmetrischen oberen Teil ($\tilde\omega<u<2\tilde\omega,\ b<\varphi<b+\psi$) getrennt.

Die partiellen Ableitungen nach u, c und b sind hier, falls $\frac{dg_3}{dc}=g_3'$ gesetzt wird,

$$r_u=\frac{\wp' u}{2r},\qquad \varphi_u=-\frac{i\wp' v}{2\varrho}\quad(\varrho=r^2),$$

$$\Delta r_c=\frac{g_3'}{2r}\left[\wp' u\left(3g_2\zeta u-\frac{9}{2}g_3u\right)+6g_2\wp^2u-9g_3\wp u-g_2^2\right],$$

$$\Delta\varphi_c=\frac{i}{2}g_3'\wp' v\left[\frac{9}{2}g_3\frac{u}{\varrho}+3g_2\left(u-\tilde\omega-\frac{\zeta u}{\varrho}\right)-\frac{2g_2^2}{g_3}\left(\zeta u-\tilde\eta+\frac{\wp' u}{2\varrho}\right)\right],$$

$$r_b=0,\qquad \varphi_b=1.$$

Hieraus ergibt sich schließlich

$$\Phi(u)=\frac{1}{8c^2}\cdot\Delta\frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_1(u)}=\frac{1}{8c^2}\cdot\Delta\left(\varphi_c-\frac{r_c\varphi_u}{r_u}\right) \tag{3}$$

$$=3g_2(\tilde\omega-u)+\frac{2g_3^2}{g_3}(\zeta u-\tilde\eta)+\frac{9g_3^2-6g_2g_3\wp u+4g_2^2\wp^2u-g_2^3}{g_3\wp' u},$$

und man erhält

$$\frac{d\Phi(u)}{du}=\frac{\Delta}{2g_3\wp'^2u}(4\wp^2u-g_2)\gtrless 0\quad\text{für}\quad\Delta\gtrless 0;$$

denn es ist

$$4\wp^2 u - g_2 \geqq 4e^2 - g_2,$$

wo e die positive Wurzel der Gleichung

$$4e^3 - g_2 e - g_3 = 0$$

bedeutet, so daß

$$4e^2 - g_2 = \frac{g_3}{e} > 0$$

ist.

Die Funktion $\Phi(u)$ hat an der Stelle $u = \tilde{\omega}$ einen Pol wegen $\wp'\tilde{\omega} = \mp 0$, und zwar ist

$$\Phi(\tilde{\omega} \mp 0) = \frac{Z(\tilde{\omega})}{\mp 0}, \qquad Z(\tilde{\omega}) = 144\,(e^2 + h)\left(e^2 + \frac{h}{3}\right)\left(e^2 + \frac{4h}{3}\right).$$

Im Falle $h \geqq 0$ ist $Z(\tilde{\omega})$ ersichtlich positiv, für $h = -l < 0$ hat man

$$Z(\tilde{\omega}) = 144\,(\wp^2\tilde{\omega} - l)\left(\wp^2\omega - \frac{l}{3}\right)\left(\wp^2\omega - \frac{4l}{3}\right).$$

Bereits oben war nachgewiesen, daß

$$4e^2 - g_2 = 4(\wp^2\tilde{\omega} - l) > 0$$

ist; daher entscheidet über das Vorzeichen von $Z(\tilde{\omega})$ die Differenz

$$\wp^2\tilde{\omega} - \frac{4l}{3} = e^2 - \frac{g_2}{3}.$$

Sie ist positiv oder negativ, je nachdem die Funktion

$$f(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

an der Stelle $z = \sqrt{\frac{g_2}{3}}$ negativ oder positiv ist. Wir erhalten

$$f\left(\sqrt{\frac{g_2}{3}}\right) = \frac{g_2}{3}\sqrt{\frac{g_2}{3}} - g_3 \leqq 0 \quad \text{für} \quad \Delta \leqq 0,$$

also

$$Z(\tilde{\omega}) \gtrless 0,$$

je nachdem $\Delta \leqq 0$.

Damit hat man

$$\Phi(\omega \mp 0) = \pm\infty \quad \text{für} \quad h = -l < 0, \quad \Delta > 0,$$
$$\Phi(\omega_2 \mp 0) = \mp\infty$$

in allen Fällen, wo $\Delta < 0$ ist.

Weiter erhält man unter Benutzung der bereits in § 2 an entsprechender Stelle betrachteten Grenzwerte für $\wp' u$, $\frac{\wp u}{\wp' u}$, $\zeta u + \frac{2\wp^2 u}{\wp' u}$ an der Stelle $u = 0$:

$$\Phi(0) = -\frac{2g_2^2}{g_3}\,\tilde{\omega}\left[\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\omega}} - \frac{3g_3}{2g_2}\right],$$

ferner

$$\Phi(2\tilde{\omega}) = -\Phi(0);$$

es bleibt nunmehr noch das Vorzeichen des Ausdrucks

$$D = \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\omega}} - \frac{3\,g_3}{2\,g_2}$$

zu bestimmen.

(A) $$\Delta > 0,\ g_2 > 0,\ g_3 > 0: \quad D = \frac{\eta}{\omega} - \frac{3\,g_3}{2\,g_2}.$$

Auf Grund des in der Einleitung, Anmerkung [7]) erwähnten Satzes von Halphen gilt

$$\omega\left(e_1^2 - \frac{g_2}{6}\right) - \eta\, e_1 < 0,$$

also

(a) $$\frac{\eta}{\omega} > e_1 - \frac{g_2}{6\,e_1}.$$

Die Funktionen

$$\mathfrak{F}(g_3) = e_1 - \frac{g_2}{6\,e_1}, \qquad \mathfrak{G}(g_3) = \frac{3\,g_3}{2\,g_2}$$

steigen monoton im Intervall

$$0 \leqq g_3 \leqq \sqrt{\frac{g_2}{3}}^3;$$

denn es ist

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial g_3} = \frac{\partial e_1}{\partial g_3}\left(1 + \frac{g_2}{6\,e_1^2}\right) = \frac{1}{12\,e_1^2 - g_2}\left(1 + \frac{g_2}{6\,e_1^2}\right) > 0$$

wegen

$$4\,e_1^2 > g_2,$$

und zwar steigt $\mathfrak{F}(g_3)$ mit monotoner Rechtskrümmung, da

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial g^3} = \frac{\partial^2 e_1}{\partial g_3^2}\left(1 + \frac{g_2}{6\,e_1^2}\right) - \frac{g_2}{3\,e_1^3}\cdot\left(\frac{\partial e_1}{\partial g_3}\right)^2$$

$$= \frac{-24\,e_1}{(12\,e_1^2 - g_2)^3}\left(1 + \frac{g_2}{6\,e_1^2}\right) - \frac{g_2}{3\,e_1^3}\cdot\frac{1}{(12\,e_1^2 - g_2)^2} < 0.$$

Man hat

$$\mathfrak{F}(0) = \frac{1}{6}\sqrt{g_2}, \qquad \mathfrak{F}\left(\sqrt{\frac{g_2}{3}}^3\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}},$$

$$\mathfrak{G}(0) = 0, \qquad \mathfrak{G}\left(\sqrt{\frac{g_2}{3}}^3\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}.$$

Es gilt also im Inneren des Intervalls stets

(b) $$e_1 - \frac{g_2}{6\,e_1} > \frac{3\,g_3}{2\,g_2},$$

mithin nach obigem für $\Delta > 0,\ g_2 > 0,\ g_3 > 0$:

$$\frac{\eta}{\omega} > \frac{3\,g_3}{2\,g_2}, \quad D > 0.$$

Hiermit ist in Ergänzung der für $\frac{\eta}{\omega}$ von Halphen (vgl. Anmerkung[18])) undenen oberen Schranke $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}$ eine untere, $\frac{3g_3}{2g_2}$ nachgewiesen.

$$h = -l < 0, \quad g_2 > 0, \quad g_3 > 0, \quad \Delta < 0.$$

$$D = \frac{\eta_2}{\omega_2} - \frac{3g_3}{2g_2}.$$

zt man anknüpfend an § 2

$$e_1 = -m + ni, \quad e_2 = 2m > 0, \quad e_3 = -m - ni,$$

gilt

$$g_2 = 4(3m^2 - n^2) > 0, \quad g_3 = 8m(m^2 + n^2).$$

Auf Grund der in § 1 bewiesenen Ungleichung

$$\omega_2\left(e_2^2 - \frac{1}{6}g_2\right) - e_2\eta_2 > 0$$

$$\frac{\eta_2}{\omega_2} < \frac{e_2^2 - \frac{1}{6}g_2}{e_2},$$

l man hat

$$e_2^2 - \frac{1}{6}g_2 = \frac{2}{3}(3m^2 + n^2),$$

o

$$\frac{\eta_2}{\omega_2} < \frac{3m^2 + n^2}{3m} = m + \frac{n^2}{3m};$$

dererseits ist

$$\frac{3g_3}{2g_2} = \frac{3m(m^2 + n^2)}{3m^2 - n^2} = \frac{m + \frac{n^2}{m}}{1 - \frac{n^2}{3m^2}}$$

l

$$\frac{n^2}{3m^2} < 1, \quad \text{da} \quad g_2 > 0.$$

mnach ist

$$\frac{3g_3}{2g_2} > m + \frac{n^2}{m} \geqslant m + \frac{n^2}{3m},$$

hin für $\Delta < 0$, $g_2 > 0$, $g_3 > 0$

$$\frac{3g_3}{2g_2} > \frac{\eta_2}{\omega_2}, \quad D < 0.$$

$$h \geqq 0, \quad g_3 > 0, \quad \Delta < 0.$$

Bereits in § 2 war gezeigt worden, daß

$$\frac{\eta_3}{\omega_3} > m > 0$$

Im vorliegenden Falle ist $g_2 = -4h < 0$, also gilt

$$D = \frac{\eta_2}{\omega_2} - \frac{3g_3}{2g_2} > 0.$$

Im Sonderfalle $h = 0$ verschwindet der Koeffizient von D in dem für $\Phi(0)$ gefundenen Ausdruck.

Die Funktion $\Phi(u)$ zeigt demnach in den einzelnen Fällen folgendes Verhalten:

Ia. $h < 0$, $\Delta > 0$: Sie steigt monoton, und man hat

$$\Phi(0) < 0, \quad \Phi(\omega \mp 0) = \pm\infty, \quad \Phi(2\omega) > 0.$$

Ic. $h < 0$, $\Delta < 0$: $\Phi(u)$ hat fallende Tendenz; hier ist

$$\Phi(0) > 0, \quad \Phi(\omega_2 \mp 0) = \mp\infty, \quad \Phi(2\omega_2) < 0.$$

II/III. $h \geqq 0$, $\Delta < 0$: $\Phi(u)$ fällt zwar gleichfalls monoton, jedoch gilt hier

$$\Phi(0) \leqq 0, \quad \Phi(\omega_2 \mp 0) = \mp\infty, \quad \Phi(2\omega_2) \geqq 0.$$

(Bezüglich $h = 0$ vgl. auch § 2.)

Die Bewegung ist im Falle II und III ersichtlich nicht stabil. Für Ia und Ic dagegen liegt beschränkte Stabilität vor. Bezüglich der weiteren Betrachtung darf auf die an entsprechender Stelle im Falle $U = r$, $h < 0$ (§ 2) durchgeführte verwiesen werden.

Einer besonderen Untersuchung bedarf der Fall Ib:

$$h = -l = -\sqrt[3]{\frac{27c^4}{4}} \qquad (\Delta = 0).$$

Als Schargleichung ergibt sich:

$$r = \sqrt{u^2 + w^2} = r(u, w, b), \quad \text{falls} \quad w^3 = 2c,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{u}{w} - \sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{w}\sqrt{\frac{2}{3}} + b = \varphi(u, w, b).$$

Hieraus ergeben sich die Werte:

$$r_u = \frac{u}{r}, \qquad \varphi_u = \frac{w^3}{\varrho\,(2u^2 + 3w^2)} \qquad (\varrho = r^2),$$

$$r_\omega = \frac{w}{r}, \qquad \varphi_\omega = \frac{-u\,w^2}{\varrho\,(2u^2 + 3w^2)},$$

$$r_b = 0, \qquad \varphi_b = 1.$$

Daher ist

$$\frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_1(u)} = \varphi_w - \frac{r_w \varphi_u}{r_u} = -\frac{w^2(u^2 + w^2)}{\varrho \cdot u\,(2u^2 + 3w^2)} = -\frac{w^2}{u\,(2u^2 + 3w^2)}$$

und

$$\Phi(u) = u(3w^2 + 2u^2)$$

eine monoton im Intervall $-\infty < u < +\infty$ steigende Funktion, die jeden reellen Wert genau einmal annimmt; mithin ist im Falle Ib die Bewegung nicht stabil.

Die entsprechenden Untersuchungen in den Fällen $U = -r$, $-r^4$ und $-r^6$ bieten keine wesentlichen Schwierigkeiten. Besonders beachtens-

wert ist der Fall $U = -r^6$; hier lautet die Differentialgleichung der Extremalen:

$$d\varphi = \frac{c\,d\varrho}{2\varrho\sqrt{-\varrho^4 + h\varrho - c^2}} \qquad (\varrho = r^2),$$

und der Radikand ist ein irreduzibles Polynom vierten Grades, so daß die Bedeutung der besonders in der Einleitung hervorgehobenen Umkehrmethode von Weierstraß in diesem Beispiel in noch höherem Maße hervortritt als in dem in § 1 behandelten Falle $U = r^{-4}$.

In allen diesen drei Fällen ist wie in $U = r^{-4}$ die Betrachtung der Funktion $\Phi(t)$ für andere Geraden als die reelle Achse durchlaufende Variable t erforderlich. Man gelangt hierbei stets zu monoton fallenden Funktionen $\Phi(t)$, die jeden reellen Wert genau zweimal annehmen; demnach sind die betreffenden Bewegungen oszillierend stabil in Übereinstimmung mit den auf Grund anders gearteter Untersuchungen von Kober[19]) gefundenen Ergebnissen.

Wenn wir uns in der vorliegenden Arbeit auf die ausführliche Darstellung der Fälle $U = r^{-4}$, r und r^4 beschränkt haben, so liegt der wesentliche Grund hierfür in dem Auftreten der Ungleichungen zwischen den Weierstraßschen Transzendenten η, ω und Invarianten g_2 und g_3; die Behandlung der angedeuteten drei Fälle $-r$, $-r^4$, $-r^6$ führt nicht auf Betrachtungen ähnlicher Art.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, Herrn Geheimrat Kneser für die Anregung zu dieser Arbeit und das wohlwollende Interesse, das er ihr zuteil werden ließ, meinen ergebensten Dank auszusprechen.

[19]) H. Kober, Konjugierte kinetische Brennpunkte. Diss., Breslau 1910.

(Eingegangen am 18. März 1927.)

Über die Verteilung der Nullstellen und Pole von rationalen Funktionen konvergenter Folgen.

Von

Walter Saxer in Aarau.

Schon zahlreiche Autoren[1]) haben den Zusammenhang zwischen dem Konvergenzgebiete einer Folge von Polynomen und der Lage ihrer Nullstellen untersucht. Die in Betracht fallenden Arbeiten lassen sich in zwei Gruppen einteilen, die ihrerseits wieder in je zwei Klassen zerfallen.

I. Gruppe: Es werden allgemeine Polynomfolgen betrachtet.

a) Das Konvergenzgebiet sei endlich. Unter diesen allgemeinen Voraussetzungen hat sich Ostrowski in mehreren Arbeiten mit der oben erwähnten Problemstellung befaßt und dabei wertvolle Resultate gewonnen.

b) Die Folge konvergiere in der ganzen z-Ebene. Pólya, Lindwart und Montel haben unter dieser Voraussetzung den Zusammenhang zwischen der Lage der Nullstellen der Polynome und der Ordnung der Grenzfunktion untersucht, die in diesem Falle eine ganze Funktion ist.

II. Gruppe: Als Polynomfolge werden speziell die Abschnittspolynome einer in einem gewissen Kreise konvergenten Taylorreihe betrachtet.

a) Der Radius des Konvergenzkreises der betrachteten Taylorreihe sei endlich. Als Hauptresultat betr. den Zusammenhang zwischen der Lage der Nullstellen der Abschnittspolynome und dem Konvergenzkreise ist der Satz von Jentzsch zu erwähnen.

b) Die betrachtete Taylorreihe konvergiere in der z-Ebene und stellt somit eine ganze Funktion dar. Carlson hat neuerdings schöne Resultate gefunden, die zeigen, in welcher Weise die Lage der Nullstellen solcher Abschnittspolynome einer ganzen Funktion mit ihrer Ordnung verkettet sind.

Ich möchte an der Problemstellung I b anknüpfen und die bisherigen

[1]) Literatur-Verzeichnis siehe Anhang. Die dort angeführten Arbeiten werden im folgenden durch ihre Nummer zitiert.

Resultate betr. konvergente Folgen von Polynomen mit Hilfe der Montelschen Methode der normalen Funktionsfamilien auf konvergente Folgen *rationaler Funktionen* übertragen. Besonders möchte ich hervorheben, daß man unter Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz einer Folge von rationalen Funktionen in einem endlichen Kreise $|z| < \varrho$ und gewisser sehr allgemeiner Bedingungen betr. die Lage der Nullstellen und Pole der rationalen Funktionen nicht nur auf die Konvergenz in der ganzen z-Ebene, sondern sogar auf die Größe des Geschlechtes der meromorphen Grenzfunktion der Folge schließen kann.

Die Anregung zu dieser Arbeit habe ich von Herrn Pólya erhalten. Er hat mir auch im Laufe der Untersuchung mehrere Ratschläge erteilt, insbesondere stammen die Beispiele 7 und 8 des § 4 von ihm. Ich möchte ihm an dieser Stelle für sein dieser Arbeit entgegengebrachtes Interesse herzlich danken.

§ 1.

Satz I. Eine Folge rationaler Funktionen $R_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)}$ sei gegeben; $\varphi_n(z)$ und $\psi_n(z)$ sind Polynome n-ten Grades; $n = 1, 2, 3, \ldots$. Über diese Folge treffen wir die nachstehenden Voraussetzungen:

1. Die Folge konvergiert für $|z| < \varrho$, wobei ϱ eine endliche positive Zahl bedeutet, gleichmäßig gegen die nicht identisch verschwindende Funktion $F(z)$.

2. Bezeichnen wir mit $\alpha_{\nu n}$ resp. $\beta_{\nu n}$ die Nullstellen, resp. die Pole der Funktion $R_n(z)$, so gebe es eine solche positive Zahl k, daß die Ungleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_{\nu n}|^k} < M, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\beta_{\nu n}|^k} < M$$

für sämtliche Werte n erfüllt sind, wobei M eine endliche positive Zahl bedeutet.

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Folge notwendigerweise in der ganzen z-Ebene, und zwar gleichmäßig in irgendeinem endlichen Gebiete gegen eine meromorphe Funktion vom Geschlechte[2]) $\leqq [k]$. *Wenn k eine ganze Zahl darstellt, so ist die Grenzfunktion $F(z)$ gleich dem Produkt einer Funktion vom Geschlecht $\leqq k-1$ und der Funktion $e^{c_k z^k}$, wobei c_k eine Konstante bedeutet.*

Unter der Bezeichnung „gleichmäßige Konvergenz einer Folge rationaler Funktionen in einem beliebigen Gebiete“ verstehen wir[3]) die folgende

---

[2]) Über den Begriff „Geschlecht einer meromorphen Funktion“ siehe [6], II. Teil

[3]) Vgl. z. B. [5], S. 282.

Eigenschaft: Eine Folge rationaler Funktionen $R_n(z)$ konvergiert gleichmäßig in einem abgeschlossenen Gebiete der z-Ebene gegen die meromorphe Funktion $F(z)$, wenn sie in jedem Punkte dieses Gebietes gleichmäßig gegen die meromorphe Funktion $F(z)$ konvergiert. Eine Folge rationaler Funktionen $R_n(z)$ konvergiert in einem Punkte z_0 der z-Ebene gleichmäßig gegen die meromorphe Funktion $F(z)$, wenn es ein festes r $(r > 0)$ und zu jeder beliebig gewählten, positiven Zahl ε eine solche endliche, ganze, positive Zahl N gibt, so daß für

$$|z - z_0| < r \quad \text{und} \quad n > N$$

$$|R_n(z) - F(z)| < \varepsilon \quad \text{oder} \quad \left|\frac{1}{R_n(z)} - \frac{1}{F(z)}\right| < \varepsilon$$

ist, je nachdem $F(z)$ sich in dem Punkte z_0 regulär verhält oder einen Pol besitzt[4]).

Aus dem Satz I schließen wir den

Satz II. Eine Folge rationaler Funktionen $R_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)}$ ($\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$ sind Polynome vom Grade n; $n = 1, 2, \ldots$) mit nachstehenden Voraussetzungen sei gegeben:

1. Die Folge konvergiert für $|z| < \varrho$, wobei ϱ eine endliche positive Zahl bedeutet, gleichmäßig gegen die nicht identisch verschwindende Funktion $F(z)$.

2. Die Nullstellen $\alpha_{\nu n}$ resp. die Pole $\beta_{\nu n}$ der Funktionen $R_n(z)$ liegen in einem der folgenden Gebiete:

a) In je einem Winkelraume mit einem Öffnungswinkel $< \pi$ und mit dem Nullpunkt als Scheitel. Dabei dürfen diese beiden Winkelräume, abgesehen vom Scheitel, keine gemeinsamen Punkte besitzen.

b) In je einer Halbebene, die keine gemeinsamen Punkte besitzen und auch den Nullpunkt nicht enthalten.

c) In je k kongruenten Winkelräumen mit einem Öffnungswinkel $< \frac{\pi}{k}$

---

[4]) Zweckmäßiger als diese Definition erwies sich diejenige von Ostrowski, die man durch stereographische Projektion der w-Ebene ($w = F(z)$) auf die Riemannsche Kugel erhält. Das Zentrum der Kugel falle mit dem Nullpunkt der w-Ebene zusammen und der Nordpol sei das Projektionszentrum. Wir bezeichnen nach Ostrowski mit $|w_1, w_2|$ die Kugeldistanz der stereographischen Bilder der Punkte w_1, w_2. Gehört dann zum abgeschlossenen Konvergenzbereich G und jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $N(\varepsilon, G)$, so daß für einen beliebigen Punkt z in G

$$|R_n(z), F(z)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > N,$$

dann bezeichnen wir die Folge $R_n(z)$ als gleichmäßig konvergent im abgeschlossenen Bereiche G.

Diese Definition hat den Vorzug, keine Fallunterscheidungen machen zu müssen. Vgl. [7], S. 232.

und mit dem Nullpunkt als Scheitel, die durch Rotation eines dieser Winkelräume um den Winkel $\frac{2\pi}{k}$ entstehen. Beide Gruppen von Winkelräumen decken sich, abgesehen vom Nullpunkte, in keinem Punkte.

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Folge notwendigerweise in der ganzen z-Ebene, und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Gebiete, gegen eine meromorphe Funktion $F(z)$ von endlichem Geschlecht. Dasselbe ist

$$\begin{aligned} &\leqq 1 \text{ im Falle a),} \\ &\leqq 2 \text{ „ „ b),} \\ &\leqq k \text{ „ „ c).} \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit α_ν resp. β_ν die Nullstellen, resp. die Pole der Grenzfunktion $F(z)$, so sind zudem noch die folgenden Reihen konvergent:

$$\begin{aligned} &\sum_\nu \left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right| \text{ und } \sum_\nu \left|\frac{1}{\beta_\nu}\right| \text{ im Falle a),} \\ &\sum_\nu \left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^2 \text{ „ } \sum_\nu \left|\frac{1}{\beta_\nu}\right|^2 \text{ „ „ b),} \\ &\sum_\nu \left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^k \text{ „ } \sum_\nu \left|\frac{1}{\beta_\nu}\right|^k \text{ „ „ c).} \end{aligned}$$

Die Voraussetzung in beiden Sätzen, daß der Grad der beiden Polynome $\varphi_n(z)$ und $\psi_n(z)$ des Zählers und Nenners der n-ten Funktion $R_n(z)$ gleichzeitig n betrage, ist irrelevant. Wäre sie nicht erfüllt, so könnte man durch Einfügung von Polynomen mit dem Grenzwert 1 resp. durch Weglassen einzelner Glieder der Folge diese Voraussetzung herstellen.

Beide Sätze fußen auf bestimmten Voraussetzungen über die Nullstellen, resp. Pole. Man könnte allgemeiner beliebige a und b Stellen betrachten mit Hinsicht auf die von R. Nevanlinna[5]) aufgestellten Sätze über das Geschlecht einer meromorphen Funktion.

Satz I gestattet die folgende *Umkehrung*:

Jede meromorphe Funktion von der Ordnung[6]) $< k$ läßt sich als Grenzfunktion $F(z)$ einer im Kreise $|z| < \varrho$ gleichmäßig konvergenten Folge rationaler Funktionen darstellen, deren Nullstellen $\alpha_{\nu n}$ resp. Pole $\beta_{\nu n}$ (eine allfällige Nullstelle oder ein eventueller Pol im Nullpunkt ausgeschlossen) die Ungleichung befriedigen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{1}{\alpha_{\nu n}}\right|^k < M, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{1}{\beta_{\nu n}}\right|^k < M.$$

Dabei bedeutet M eine endliche, positive Zahl.

---

[5]) Vgl. [6], II. Teil.

[6]) Über den Begriff „Ordnung einer meromorphen Funktion“ siehe [6], S. 23.

Aus Satz I und seiner Umkehrung ergibt sich die nachstehende neue *Definition für die Ordnung einer meromorphen Funktion*: Wir bezeichnen eine meromorphe Funktion $F(z)$ von der Ordnung λ, wenn es eine solche im Kreise $|z|<\varrho$ gleichmäßig gegen $F(z)$ konvergierende Folge rationaler Funktionen

$$R_n(z)=\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1-\frac{z}{\alpha_{\nu n}}}{1-\frac{z}{\beta_{\nu n}}}\right)$$

gibt, deren Nullstellen $\alpha_{\nu n}$ resp. Pole $\beta_{\nu n}$ die Ungleichung befriedigen:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{1}{\alpha_{\nu n}}\right|^{\lambda+\varepsilon}+\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{1}{\beta_{\nu n}}\right|^{\lambda+\varepsilon}<M.$$

wobei M eine feste, positive Zahl und ε eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl bedeuten; für λ ist die kleinste aller derjenigen Zahlen zu wählen, welche diese Bedingung erfüllen.

Aus Satz I und dessen Umkehrung ist ohne weiteres ersichtlich, daß die hier vorgeschlagene Definition der Ordnung mit derjenigen von Borel äquivalent ist, und folglich auch mit derjenigen von R. Nevanlinna[7]).

§ 2.

Beweis des Satzes I und dessen Umkehrung.

Gemäß Voraussetzung 1. soll die Grenzfunktion $F(z)$ nicht identisch verschwinden. Diese Voraussetzung ist für die Gültigkeit des Satzes I notwendig, wie die Polynomfolge

$$P_n(z)=\left\{\left(1+\frac{z-1}{n}\right)^n\right\}^{N(n)}\sim e^{(z-1)N(n)}$$

beweist, wobei die Zahl $N(n)$ so gewählt wird, daß

$$\lim_{n=\infty}N(n)=\infty \quad \text{und damit} \quad \lim_{n=\infty}P_n(z)=0 \quad \text{für} \quad |z|<1.$$

Gleichzeitig soll der Ausdruck $\frac{N(n)\,n}{(n-1)^\lambda}$ für ein passendes, endliches, positives λ konvergent sein. Diese Folge divergiert in jedem Punkte der Halbebene $R(z)\geqq 1$.

Weil also $F(z)$ nicht identisch verschwinden soll, darf man ohne Einschränkung annehmen, daß

$$\varphi_n(0)=1, \qquad \psi_n(0)=1.$$

Denn $R_n(z)$ und damit auch die Funktion $F(z)$ können im Nullpunkte

[7]) Vgl. [6], S. 42.

dank Voraussetzung 2. weder eine Nullstelle noch einen Pol besitzen. $R_n(z)$ hat also die Form

$$(1) \qquad R_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1 - \frac{z}{\alpha_{\nu n}}}{1 - \frac{z}{\beta_{\nu n}}} \right).$$

Die Folge $R_n(z)$ soll laut Voraussetzung 1. im Kreise $|z| < \varrho$ gleichmäßig gegen eine Funktion $F(z)$ konvergieren. $F(z)$ muß deshalb nach einem klassischen Satze im Kreise $|z| < \varrho$ sich ebenfalls analytisch verhalten. Da $R_n(0)$ und $F(0) \neq 0, \infty$, verhalten sich auch die logarithmischen Ableitungen der Funktionen $R_n(z)$ und $F(z)$ in der Umgebung des Nullpunktes regulär analytisch. Zudem konvergieren in einer genügend kleinen Umgebung des Nullpunktes die Funktionen $\frac{R_n'(z)}{R_n(z)}$ gleichmäßig gegen die Funktion $\frac{F'(z)}{F(z)}$. Es gilt also

$$\lim_{n=\infty} \frac{R_n'(z)}{R_n(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} \quad \text{für} \quad |z| < r,$$

wobei r eine endliche positive Zahl bedeutet.

Man findet

$$\frac{R_n'(z)}{R_n(z)} = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{\nu n} - z} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\beta_{\nu n} - z}$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{\nu n}} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\beta_{\nu n}} + z\left[-\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha_{\nu n}}\right)^2 + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\beta_{\nu n}}\right)^2 \right] + \cdots.$$

$\frac{F'(z)}{F(z)}$ besitze in der Umgebung des Nullpunktes die Taylor-Entwicklung

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots.$$

Dann gilt nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatze die Gleichung

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \left[-\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha_{\nu n}}\right)^{\mu+1} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\beta_{\nu n}}\right)^{\mu+1} \right] = c_\mu.$$

Wir schreiben nun Gleichung (1) in etwas anderer Form.

$$(3) \qquad R_n(z) =$$

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{\nu n}} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\beta_{\nu n}}] + \cdots + \frac{z^{k-1}}{k-1}\left[-\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{\nu n}^{k-1}} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\beta_{\nu n}^{k-1}} \right]}{\prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_{\nu n}}\right) e^{\frac{z}{\alpha_{\nu n}} + \frac{z^2}{2\alpha_{\nu n}^2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{(k-1)\alpha_{\nu n}^{k-1}}}}$$

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\beta_{\nu n}}\right) e^{\frac{z}{\beta_{\nu n}} + \frac{z^2}{2\beta_{\nu n}^2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{(k-1)\beta_{\nu n}^{k-1}}}}.$$

Die Funktionsfolge $e^{z\left[-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{a_{\nu n}}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\beta_{\nu n}}\right]+\ldots+\frac{z^{k-1}}{k-1}\left[-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{a_{\nu n}^{k-1}}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\beta_{\nu n}^{k-1}}\right]}$ konvergiert dank Gleichung (2) in der ganzen z-Ebene gegen die Funktion $F^*(z)=e^{c_1 z+\ldots+\frac{c_{k-1}z^{k-1}}{k-1}}$. Es bleibt also lediglich die Funktionsfolge $F_n(z)=\frac{G_n(z)}{H_n(z)}$, wobei

$$G_n(z)=\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\alpha_{\nu n}}\right)e^{\frac{z}{\alpha_{\nu n}}+\ldots+\frac{z^{k-1}}{(k-1)\alpha_{\nu n}^{k-1}}}$$

und

$$H_n(z)=\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\beta_{\nu n}}\right)e^{\frac{z}{\beta_{\nu n}}+\ldots+\frac{z^{k-1}}{(k-1)\beta_{\nu n}^{k-1}}}$$

zu diskutieren. Für diese beweisen wir den Satz:

Aus der Folge $F_n(z)$ läßt sich eine in jedem endlichen Gebiete der z-Ebene gleichmäßig konvergente Teilfolge herausgreifen. Die Grenzfunktion $\overline{F}(z)$ dieser Teilfolge ist eine meromorphe Funktion vom Geschlecht $\leqq[k]$. Wenn k eine ganze Zahl darstellt, so ist die Grenzfunktion $\overline{F}(z)$ gleich dem Produkt einer Funktion vom Geschlecht $\leqq k-1$ und der Funktion $e^{c_k z^k}$, wobei c_k eine Konstante bedeutet.

Für den Beweis dieses Satzes bemerken wir, daß sowohl die Funktionen $G_n(z)$ als auch die Funktionen $H_n(z)$ für $|z|<r$ von der Funktion e^{cr^k} gleichmäßig majorisiert werden, wobei r einen beliebigen endlichen Wert besitzen darf und c eine endliche positive Konstante bedeutet. Denn gemäß einem aus der Theorie der ganzen Funktionen bekannten Satze [8]) gilt für einen beliebigen Wert u die Ungleichung

$$\left|(1-u)e^{\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^{k-1}}{k-1}}\right|<e^{a|u|^k},$$

wobei a eine endliche positive Konstante bedeutet. Deshalb schließen wir

$$|G_n(z)|<e^{ar^k\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{1}{\alpha_{\nu n}}\right|^k} \quad \text{und} \quad |H_n(z)|<e^{ar^k\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{1}{\beta_{\nu n}}\right|^k}.$$

Gemäß Voraussetzung 2. sind die Reihen $\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{1}{\alpha_{\nu n}}\right|^k$ und $\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{1}{\beta_{\nu n}}\right|^k$ gleichmäßig beschränkt, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Beide Funktionsfolgen $G_n(z)$ und $H_n(z)$ bilden deshalb je eine normale Funktionsfamilie [9]). Dank dieser Eigenschaft ist es gemäß der Definition der nor-

[8]) Vg. [9], S. 51–52.

[9]) Vgl. [5], S. 234–236.

malen Funktionsfamilien möglich, sowohl aus der Folge $G_n(z)$ als auch aus der Folge $H_n(z)$ je eine in jedem endlichen Gebiete der z-Ebene gleichmäßig konvergente Teilfolge mit denselben Indizes herauszugreifen. Die Grenzfunktionen dieser beiden Teilfolgen sind somit ganze Funktionen und zwar von der Ordnung $\leqq k$. Zudem erfüllen ihre Nullstellen α_ν und Pole β_ν nach einem bekannten Satze von Hurwitz dank Voraussetzung 2. die folgenden Ungleichungen:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^k < M, \qquad \sum_{\nu=1}^{N}\left|\frac{1}{\beta_\nu}\right|^k < M,$$

wobei N irgendeine ganze positive Zahl bedeutet.

Aus diesen Ungleichungen folgt die Konvergenz der beiden Reihen $\sum_\nu\left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^k$ und $\sum_\nu\left|\frac{1}{\beta_\nu}\right|^k$, womit der obige Satz bewiesen ist.

Jetzt kombinieren wir dieses Ergebnis mit Voraussetzung 1. Nach einem klassischen Satze aus der Funktionentheorie folgt, daß die in der Voraussetzung 1. erwähnte Grenzfunktion $F(z)$ mit der Funktion $F(z) = \overline{F}(z)\,F^*(z)$ identisch sein muß. Zudem folgt, daß die Funktionsfolge $R_n(z)$ in irgendeinem endlichen Gebiete gleichmäßig gegen die Funktion $F(z)$ konvergiert. Wäre dies nicht der Fall, so müßte es nach den soeben gemachten Bemerkungen betr. die normalen Funktionsfamilien möglich sein, aus der Folge $R_n(z)$ eine in irgendeinem endlichen Gebiete gleichmäßig konvergente Teilfolge herauszugreifen, deren Grenzfunktion nicht mit $F(z)$ übereinstimmen würde, was unmöglich ist.

Beweis der Umkehrung des Satzes I. Derselbe ist offenbar geleistet, wenn man den analogen Satz für die ganzen Funktionen beweist, welcher lautet:

Jede ganze Funktion der Ordnung $< k$ läßt sich als Grenzfunktion $G(z)$ einer im Kreise $|z| < \varrho$ gleichmäßig konvergenten Folge von Polynomen darstellen, deren Nullstellen $\alpha_{\nu n}$ (eine allfällige Nullstelle im Nullpunkte ausgeschlossen) die Ungleichung befriedigen

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{1}{\alpha_{\nu n}}\right|^k < M.$$

Dieser Satz wurde von Lindwart[10]) und Montel[11]) bewiesen. Beide Autoren stützten sich bei ihrem Beweise auf die Taylorentwicklung der betreffenden ganzen Funktionen und benützten den Zusammenhang zwischen der Größenordnung ihrer Koeffizienten und der Ordnung der ganzen Funk-

[10]) Vgl. [1].
[11]) Vgl. [5], S. 278–279.

tionen. Da aus der Taylorreihe einer meromorphen Funktion die Taylorreihen ihres Zählers und Nenners nicht unmittelbar entnommen werden können, ist an dieser Stelle vielleicht naturgemäßer von der Produktdarstellung der Grenzfunktion $G(z)$ auszugehen. Es sei

$$G(z) = e^{\sum_{q=1}^{p} c_q z^q} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right) e^{\frac{z}{\alpha_\nu} + \ldots + \frac{z^p}{p\alpha_\nu^p}},$$

wobei $p \leqq k$, und

$$P_n(z) = \prod_{q=1}^{p} \left(1 + \frac{c_q z^q}{n}\right)^n \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right) \left(1 + \frac{z}{\alpha_\nu N}\right)^N \cdots \left(1 + \frac{z^p}{p\alpha_\nu^p N}\right)^N,$$

wobei $N = N(n)$ eine genügend stark wachsende ganzzahlige Funktion von n bedeutet, und so gewählt wird, daß

$$G(z) = \lim_{n=\infty} P_n(z).$$

Das Polynom $\prod_{q=1}^{p} \left(1 + c_q \frac{z^q}{n}\right)^n$ besitzt p Gruppen zu je qn Nullstellen mit dem absoluten Betrage $\left(\frac{n}{c_q}\right)^{\frac{1}{q}}$. Wenn $k \geqq p \geqq q$, dann ist die Summe $q c_q^{\frac{k}{q}} n^{1-\frac{k}{q}}$ konvergent. Das Polynom $\prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{z^\mu}{\alpha_\nu^\mu \mu N}\right)^N$, wobei $1 \leqq \mu \leqq p$, besitzt $\mu n N$ Nullstellen, wovon je μN Nullstellen den absoluten Betrag $\mu^{\frac{1}{\mu}} \alpha_\nu N^{\frac{1}{\mu}}$ besitzen. Die Summe $\mu^{1-\frac{k}{\mu}} \sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^k N^{-\frac{k}{\mu}+1}$ ist für $k \geqq p \geqq \mu$ ebenfalls beschränkt. Beide Polynome treten aber nur dann auf, wenn $k \geqq p$, womit der obige Satz bewiesen ist.

Verallgemeinerung des Satzes I. Die Voraussetzung 1. kann offenbar dahin verallgemeinert werden, daß die gleichmäßige Konvergenz der Folge $R_n(z)$ in irgendeinem Gebiete, das ohne Einschränkung der Allgemeinheit als Kreis angenommen werden darf, genügt. Das Zentrum dieses Kreises braucht also nicht mit dem Nullpunkt der z-Ebene zusammenzufallen. Denn laut Voraussetzung kann die Grenzfunktion $F(z)$ weder identisch verschwinden, noch identisch ∞ sein. Deshalb kann ein solcher Punkt z_0 gewählt werden, in dessen Umgebung sich die Funktion $F(z)$ und damit auch die Funktionen $R_n(z)$ bei genügend großem Index regulär analytisch verhalten. Setzen wir

$$z^* = z - z_0,$$

so verhalten sich die Funktionen $R_n(z^*)$ in der Umgebung des Null-

punktes der z^*-Ebene regulär analytisch. Zudem ist die Folge $R_n(z^*)$ im Kreise $|z^*| < \varrho^*$ gleichmäßig konvergent, wobei ϱ^* eine endliche, positive Zahl bedeutet. Endlich erfüllen die Nullstellen $\alpha^*_{\nu n}$ resp. Pole $\beta^*_{\nu n}$ folgende Beziehungen

$$\alpha^*_{\nu n} = \alpha_{\nu n} - z_0, \qquad \beta^*_{\nu n} = \beta_{\nu n} - z_0,$$

das heißt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{1}{\alpha^*_{\nu n}} \right|^k = \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{1}{\alpha_{\nu n} - z_0} \right|^k = \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{1}{\alpha_{\nu n}} \right|^k \left| \frac{1}{1 - \frac{z_0}{\alpha_{\nu n}}} \right|^k < C \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{1}{\alpha_{\nu n}} \right|^k < CM$$

und ebenso

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{1}{\beta^*_{\nu n}} \right|^k < CM.$$

Es liegen somit genau die Voraussetzungen des Satzes I vor. Die Folge $R_n(z^*)$ ist also in der ganzen z^*-Ebene und damit auch z-Ebene konvergent und besitzt die im Hauptsatz I erwähnten Eigenschaften.

§ 3.

Beweis und Diskussion des Satzes II.

Zunächst eine Bemerkung über die Voraussetzungen. Wie schon in den im Anhang genannten Arbeiten hervorgehoben wurde, muß man von der Grenzfunktion $F(z)$ ausdrücklich verlangen, daß sie nicht identisch verschwinde. Im andern Fall gilt der Satz nicht mehr, wie die Folge

$$R_n(z) = (z - z_0)^n$$

zeigt.

Fall a). Für den Beweis dieses Falles wählen wir das Koordinatensystem so, daß die imaginäre Achse in keinen der beiden Winkelräume zu liegen kommt, in welchem sich die Nullstellen resp. die Pole der Funktionen $R_n(z)$ befinden. Diese Annahme ist dank der Voraussetzungen über die Größe der Öffnungswinkel der Winkelräume und ihrer gegenseitigen Lage gestattet. Ebenso darf man ohne Einschränkung annehmen, daß $F(0) \neq 0, \infty$. $\frac{F'(z)}{F(z)}$ verhält sich deshalb regulär analytisch in der Umgebung des Nullpunktes und wir können dieselben Schlüsse wie beim Beweis des Satzes I wiederholen, wonach

$$\lim_{n=\infty} \left[-\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha_{\nu n}} \right) + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\beta_{\nu n}} \right) \right] = c_0 \qquad \text{(vgl. Gl. (2)).}$$

Setzen wir

$$\alpha_{\nu n} = |\alpha_{\nu n}| e^{i\vartheta_{\nu n}} \quad \text{und} \quad \beta_{\nu n} = |\beta_{\nu n}| e^{i\psi_{\nu n}},$$

wobei

$$-\frac{\pi}{2}+\varepsilon \leqq \vartheta_{\nu n} \leqq \frac{\pi}{2}-\varepsilon, \quad \frac{\pi}{2}+\varepsilon \leqq \varphi_{\nu n} \leqq \frac{3\pi}{2}-\varepsilon$$

(ε bedeutet hierbei eine positive, genügend kleine Zahl).

Man findet

$$\lim_{n=\infty}\left[-\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{1}{\alpha_{\nu n}}\right|\cos\vartheta_{\nu n}+\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{1}{\beta_{\nu n}}\right|\cos\varphi_{\nu n}\right]=R(c_0).$$

$R(c_0)$ bedeutet den Realteil von c_0. Sämtliche $\cos(\vartheta_{\nu n})$ sind positiv und größer als eine bestimmte, endliche, nicht verschwindende Zahl c_1. Ebenso sind sämtliche $\cos(\varphi_{\nu n})$ negativ und ihrem absoluten Betrage nach größer als eine bestimmte endliche, nicht verschwindende Zahl c_2. Deshalb schließen wir

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{1}{\alpha_{\nu n}}\right| < \left|\frac{R(c_0)}{c_1}\right| \leqq M$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{1}{\beta_{\nu n}}\right| < \left|\frac{R(c_0)}{c_2}\right| \leqq M;$$

M bedeutet die größere der beiden Zahlen $\left|\frac{R(c_0)}{c_1}\right|$ und $\left|\frac{R(c_0)}{c_2}\right|$.

Es sind also die Voraussetzungen für die Anwendung des Satzes I erfüllt für $k=1$ und damit ist der Fall a) des Satzes II bewiesen.

Diskussion des Falles a). Für die Gültigkeit dieses Satzes ist die Voraussetzung ganz wesentlich, daß das Konvergenzgebiet den gemeinsamen Scheitelpunkt als innern Punkt besitze, wie die Beispiele 1 und 2 des § 4 zeigen. Sobald jedoch keine rationalen Funktionen, sondern Polynome vorausgesetzt werden, kann Fall a) des Satzes II wesentlich verallgemeinert werden[12]). Es genügt in diesem Falle, daß das Konvergenzgebiet innere Punkte außerhalb des Nullstellen-Winkelraumes besitze, damit die Konvergenz der Folge in der ganzen z-Ebene gegen eine ganze Funktion vom Geschlechte $\leqq 1$ geschlossen werden darf.

Liegen die Nullstellen der Polynome speziell auf einer Halbgeraden, so braucht man deshalb über die Lage des Konvergenzgebietes gar keine Bedingungen zu stellen. (Spezialfall von Laguerre.)

In der Voraussetzung 2. des Falles a), Satz II, wurde gefordert, daß die beiden Winkelräume, abgesehen vom gemeinsamen Scheitelpunkt, keine gemeinsamen Punkte besitzen dürfen. Auch diese Voraussetzung ist wesentlich, wie die Betrachtung des folgenden Spezialfalles zeigt, der im Fall a) des Satzes II enthalten ist.

---

[12]) Vgl. [3].

Eine Folge rationaler Funktionen $R_n(z)$ mit nachstehenden Voraussetzungen sei gegeben:

1. wie bei Satz II, Fall a),

2. die Nullstellen $\alpha_{\nu n}$ resp. die Pole $\beta_{\nu n}$ der Funktionen $R_n(z)$ liegen auf je einer voneinander verschiedenen und vom Nullpunkt ausgehenden Halbgeraden.

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Folge in der ganzen z-Ebene, und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Gebiete, gegen eine meromorphe Funktion $F(z)$ vom Geschlechte $\leqq 1$. Bezeichnen wir mit α_ν resp. β_ν die Nullstellen, resp. die Pole der Grenzfunktion, so sind zudem die Reihen $\sum_\nu \left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|$ und $\sum_\nu \left|\frac{1}{\beta_\nu}\right|$ konvergent. Z. B. können die Nullstellen auf der positiven und die Pole auf der negativen Halbachse liegen.

Wenn die beiden Halbgeraden, auf denen die Nullstellen und Pole der rationalen Funktionen liegen, zusammenfallen, kann man nichts mehr über die Konvergenz der Folge aussagen, wie die Beispiele 3 und 4 von § 4 zeigen. Aber auch unter Voraussetzung der Konvergenz der Folge in der ganzen z-Ebene kann man nichts mehr über das Geschlecht der meromorphen Funktion aussagen, gegen welche die Folge konvergiert, wie die Beispiele 5 und 6 von § 4 beweisen.

Beweis und Verallgemeinerung des Falles b) von Satz II. Aus den Voraussetzungen folgt, daß die Begrenzungsgeraden der Halbebenen einander parallel gehen. Man darf ohne Einschränkung diese Geraden als Parallele zu der imaginären Achse betrachten. Die Nullstellen $\alpha_{\nu n}$ der Funktionen $R_n(z)$ sollen sich in der Halbebene rechts der imaginären Achse befinden und einen Realteil $R(\alpha_{\nu n}) \geqq d_1$ besitzen. Die Pole seien in der Halbebene links der imaginären Achse mit einem Realteil $R(\beta_{\nu n}) \leqq d_2$. d_1 und d_2 bedeuten zwei positive, nicht verschwindende Zahlen. Gemäß der Gleichung (2) schließen wir dann

$$\lim_{n=\infty}\left[-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{R(\alpha_{\nu n})}{|\alpha_{\nu n}|^2}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{R(\beta_{\nu n})}{|\beta_{\nu n}|^2}\right]=R(c_0).$$

$R(\alpha_{\nu n})$ und $R(\beta_{\nu n})$ besitzen verschiedene Vorzeichen. Daraus folgt, daß die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{R(\alpha_{\nu n})}{|\alpha_{\nu n}|^2} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{R(\beta_{\nu n})}{|\beta_{\nu n}|^2}$$

gleichmäßig beschränkt sind. Es sei

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{R(\alpha_{\nu n})}{|\alpha_{\nu n}|^2}<M, \qquad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{R(\beta_{\nu n})}{|\beta_{\nu n}|^2}<M.$$

Dank unsern Voraussetzungen schließen wir

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_{\nu n}|^2} < \frac{M}{d_1}, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\beta_{\nu n}|^2} < \frac{M}{d_2}.$$

d_1 und d_2 sind nicht verschwindende Zahlen. Deshalb kann der Satz I angewendet werden.

Verallgemeinerung des Falles b) von Satz II. Der Mittelpunkt des Konvergenzkreises braucht nicht mit dem Nullpunkt zusammenzufallen. Es genügt, wenn er sich nicht in einer der beiden Halbebenen befindet. Im Falle von Polynomen[13]) liegen also die Nullstellen in einer Halbebene, der Kreis, in welchem die Folge konvergiert, beliebig in der andern Halbebene, und der obige Satz kann geschlossen werden. Das Beispiel 7 in § 4 zeigt, daß der Nullstellen-Winkelraum wirklich keinen größeren Öffnungswinkel als π besitzen darf, wenn die Grenzfunktion endliches Geschlecht besitzen soll.

Beweis des Falles c) des Satzes II. Wir betrachten die Folge

$$R^*(z^k) = R(z)\,R(\omega z)\ldots R(\omega^{k-1} z) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1 - \frac{z^k}{\alpha_{\nu n}^k}}{1 - \frac{z^k}{\beta_{\nu n}^k}} \right),$$

wobei ω die k-te Einheitswurzel bedeutet. Diese Folge ist ebenfalls im Kreise $|z| < \varrho$ gleichmäßig konvergent. Wir setzen

$$z^k = z^*$$

und erhalten

$$R_n^*(z^*) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1 - \frac{z^*}{\alpha_{\nu n}^k}}{1 - \frac{z^*}{\beta_{\nu n}^k}} \right).$$

Die Folge $R_n^*(z^*)$ ist im Kreise $|z^*| < \varrho^k$ gleichmäßig konvergent. Die Nullstellen $\alpha_{\nu n}^k$ der Funktionen $R_n^*(z^*)$ befinden sich in einem Winkelraume mit einem Öffnungswinkel $< \pi$ und dem Nullpunkte als Scheitel. Dasselbe ist mit den Polen $\beta_{\nu n}^k$ der Funktionen $R_n^*(z^*)$ der Fall. Zudem enthalten diese beiden Winkelräume keine gemeinsamen Punkte. Es liegen also die Voraussetzungen des Falles a), Satz II, vor, wonach die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_{\nu n}|^k} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\beta_{\nu n}|^k}$$

[13]) Vgl. [4], Satz II.

gleichmäßig beschränkt sind. Damit kann der Satz I angewendet werden und der Beweis für Fall c), Satz II, ist geleistet.

Da die Voraussetzung, daß das Konvergenzgebiet den Scheitel der Winkelräume als innern Punkt enthalte, für den Fall a) des Satzes II notwendig ist, so gilt dies a fortiori für den Fall c). Daß auch bei Polynomfolgen diese Voraussetzung gefordert werden müsse, um die Konvergenz in der ganzen z-Ebene zu schließen, geht aus dem Beispiel 8 (§ 4) hervor.

§ 4.

Beispiele.

Beispiel 1. Wir setzen:

$$R_n(z) = \frac{1+z+z^2+\ldots+z^n}{\left(1-\frac{z}{n}\right)^n}.$$

Diese Folge ist in jedem Kreise $|z| \leqq \varrho < 1$ gleichmäßig konvergent und in jedem Punkte $|z| \geqq 1$ divergent. Die Nullstellen dieser rationalen Funktionen befinden sich auf dem Einheitskreis und die Pole auf der positiven, reellen Halbachse. Zudem besitzen die letzteren bei genügend großem Index einen beliebig hohen absoluten Betrag. Wählt man also einen beliebigen Punkt $|z| > 1$ in der rechten Halbebene, so befinden sich die Nullstellen und Pole der Funktionen $R_n(z)$ in je einem sich gegenseitig ausschließenden Winkelraume mit einem Öffnungswinkel $< \pi$ und diesem Punkte als Scheitel. Diese Folge ist bloß im Einheitskreise konvergent. Satz II, Fall a) kann nicht angewendet werden, da der Scheitel der beiden Winkelräume nicht im vorausgesetzten Konvergenzgebiete liegt.

Beispiel 2. Wir setzen:

$$R_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1 - z\left(1 + \frac{i}{\nu^\lambda}\right)}{1 - z\left(1 - \frac{i}{\nu^\lambda}\right)} \right);$$

i bedeutet die imaginäre Einheit, λ eine positive, endliche Zahl > 1. Die Nullstellen der Funktionen $R_n(z)$ befinden sich auf der Peripherie des in der unteren Halbebene liegenden Halbkreises mit dem Radius $\frac{1}{2}$ und dem Punkte $z = \frac{1}{2}$ als Zentrum und häufen sich im Punkte $z = 1$. Ebenso befinden sich die Pole der Funktionen $R_n(z)$ auf der Peripherie des in der oberen Halbebene liegenden Halbkreises mit demselben Zentrum und Radius und häufen sich auch im Punkte $z = 1$. Schließt man dessen Umgebung mit einem Kreis von beliebig kleinem Radius aus, so zeigt eine leichte Diskussion, daß diese Folge in jedem endlichen Gebiete gleichmäßig

konvergiert. Im Punkte $z = 1$, dem Scheitel der beiden Winkelräume mit beliebig kleinem Öffnungswinkel, verhält sie sich divergent.

Beispiel 3. Wir setzen:

$$R_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1 - \frac{z}{(2\nu+1)^{\frac{1}{2\nu+1}}}}{1 - \frac{z}{(2\nu)^{\frac{1}{2\nu}}}} \right).$$

Die Nullstellen und Pole dieser rationalen Funktionen befinden sich auf der positiven, reellen Halbachse und häufen sich im Punkte $z = 1$. Schließt man dessen Umgebung durch einen Kreis mit beliebig kleinem Radius aus, so konvergiert die Folge gleichmäßig in irgendeinem endlichen Gebiete. Im Punkte $z = 1$ verhält sie sich divergent.

Beispiel 4. Wir setzen:

$$R_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1 - \frac{z}{\alpha_\nu}}{1 - \frac{z}{\beta_\nu}} \right),$$

wobei

$$\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{q}{p} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\beta_\nu} = \frac{q}{p} + \frac{1}{e^\nu};$$

q und p sind ganze positive Zahlen, welche die Ungleichung erfüllen $p > q > 1$. Sie seien so gewählt, daß die Werte α_ν die rationalen Zahlen > 1 durchlaufen. Da keine Potenz von e rational ist, liegen dann die Pole in irrationalen Zahlen. Bemerkt man, daß die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta_\nu} - \frac{1}{\alpha_\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{e^\nu}$ konvergiert, so folgt daraus die absolute Konvergenz der Reihe

$$\log F(z) = z \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta_\nu} - \frac{1}{\alpha_\nu} \right) + \frac{z^2}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta_\nu^2} - \frac{1}{\alpha_\nu^2} \right) + \dots \quad \text{für} \quad |z| < 1.$$

Die obige Folge von rationalen Funktionen, deren Nullstellen und Pole auf der positiven reellen Achse $z > 1$ liegen, ist also in jedem Kreise $|z| \leqq \varrho < 1$ gleichmäßig konvergent und am Teil der reellen Achse $z > 1$ sicher divergent.

Beispiel 5. Wir setzen:

$$R_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1 - \frac{z}{(2\nu)^{\frac{1}{k}}}}{1 - \frac{z}{(2\nu+1)^{\frac{1}{k}}}}.$$

k bedeutet irgendeine positive ganze Zahl $\geqq 1$. Diese Folge konvergiert in der ganzen z-Ebene gegen die Funktion

$$G(z) = \frac{e^{z\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2\nu+1)^{\frac{1}{k}}}-\frac{1}{(2\nu)^{\frac{1}{k}}}\right)\right]+\ldots+\frac{z^k}{k}\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\nu+1}-\frac{1}{2\nu}\right)\right]} \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{(2\nu)^{\frac{1}{k}}}\right)e^{\frac{z}{(2\nu)^{\frac{1}{k}}}+\ldots+\frac{z^k}{k\,(2\nu)^{\nu}}}}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{(2\nu+1)^{\frac{1}{k}}}\right)e^{\frac{z}{(2\nu+1)^{\frac{1}{k}}}+\ldots+\frac{z^k}{k\,(2\nu+1)}}},$$

welche beliebig hohes Geschlecht besitzen kann.

Beispiel 6. Es sei $0 < a_1 < a_2 < a_3 \ldots$, $\lim a_n \to \infty$ und der Konvergenzexponent der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei unendlich. Man bestimme $b_1, b_2, b_3, \ldots$ so, daß

$$0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \ldots < b_n < a_n < \ldots$$

und die Reihe $\sum (a_n - b_n)$ konvergiert. Die Folge mit dem allgemeinen Glied

$$R_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu - z}{b_\nu - z} = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1 + \frac{a_\nu - b_\nu}{b_\nu - z}\right)$$

konvergiert in der ganzen z-Ebene gegen eine meromorphe Funktion von unendlich hoher Ordnung.

Beispiel 7. Bemerkung: Wenn α eine beliebige positive Zahl, wobei $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, so gilt

$$\lim_{m=\infty} P_m(z) = \lim_{m=\infty}\left[1 + \frac{(1+im^\alpha)z}{2m}\right]^m\left[1 + \frac{(1-im^\alpha)z}{2m}\right]^m = e^z.$$

Denn

$$P_m(z) = \left\{1 + \frac{z}{m}\left[1 + \frac{z(1+m^{2\alpha})}{4m}\right]\right\}^m.$$

Die Nullstellen der Polynome $P_m(z)$ besitzen die Werte

$$\frac{2m(-1+im^\alpha)}{1+m^{2\alpha}} \quad \text{resp.} \quad \frac{-2m(1+im^\alpha)}{1+m^{2\alpha}}.$$

Ihre Argumente betragen deshalb $\pm\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_m\right)$, wobei

$$\varepsilon_m > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{m=\infty} \varepsilon_m = 0.$$

Setzt man:

$$e^{e^z} = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{e^z}{n}\right)^n = \lim_{n=\infty} \frac{e^{\frac{zn}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}}\left(e^{-\frac{z}{2}}\sqrt{n} + \frac{e^{\frac{z}{2}}}{\sqrt{n}}\right)^n,$$

so können die Funktionen $e^{\frac{zn}{2}}$ gemäß der vorhergehenden Bemerkung durch die Polynome $P_{m_n}^n\left(\frac{z}{2}\right)$ approximiert werden, wobei m_n passend gewählt wird. Zudem gilt:

$$e^{-\frac{z}{2}}\sqrt{n}+\frac{e^{\frac{z}{2}}}{\sqrt{n}}=\lim_{N_n=\infty}\left[\sqrt{n}\left(1-\frac{z}{2N_n}\right)^{N_n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{z}{2N_n}\right)^{N_n}\right]=\lim_{N_n=\infty}Q_{N_n}(z).$$

Die Nullstellen der Polynome $Q_{N_n}(z)$ befinden sich in der rechten Halbebene. Die Zahlen m_n und N_n können ersichtlich so gewählt werden, daß

$$e^{e^z}=\lim_{n=\infty}\frac{\left[P_{m_n}\left(\frac{z}{2}\right)\right]^m[Q_{N_n}(z)]^n}{n^{\frac{n}{2}}}.$$

Die Funktion e^{e^z} wird also als Grenzfunktion einer in jedem endlichen Gebiete gleichmäßig konvergenten Polynomfolge dargestellt, deren Nullstellen $\alpha_{\nu n}$ die Ungleichung erfüllen

$$-\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\arc(\alpha_{\nu n})<\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\quad\text{wenn}\quad n>N(\varepsilon),$$

wobei $N(\varepsilon)$ eine endliche, positive, ganze Zahl bedeutet und ε eine beliebig kleine positive Zahl. Es liegt hier eine grundsätzlich verschiedene Art der Verteilung der Nullstellen der Polynome einer konvergenten Folge vor gegenüber derjenigen, wie sie Carlson[14]) für die Abschnittspolynome einer eine ganze transzendente Funktion von der Ordnung >0 darstellenden Taylorreihe festgestellt hat.

Beispiel 8. Die Funktionsfolge $F_n(z)=1+e^{nz}$ ist in der offenen linken Halbebene konvergent und strebt in der offenen rechten Halbebene gegen unendlich. Setzt man

$$1+e^{nz}=e^{\frac{nz}{2}}\left(e^{-\frac{nz}{2}}+e^{\frac{nz}{2}}\right),$$

so können die Funktionen $e^{\pm\frac{nz}{2}}$ wieder durch Polynome $\left[P_{m_n}\left(\pm\frac{z}{2}\right)\right]^n$ approximiert werden. Dabei sind die Zahlen m_n so zu wählen, daß gleichzeitig

$$1=\lim_{n=\infty}\left[P_{m_n}\left(\frac{z}{2}\right)\right]^n\left\{\left[P_{m_n}\left(-\frac{z}{2}\right)\right]^n+\left[P_{m_n}\left(\frac{z}{2}\right)\right]^n\right\}\quad\text{für}\quad R(z)<0$$

und

$$\infty=\lim_{n=\infty}\left[P_{m_n}\left(\frac{z}{2}\right)\right]^n\left\{\left[P_{m_n}\left(-\frac{z}{2}\right)\right]^n+\left[P_{m_n}\left(\frac{z}{2}\right)\right]^n\right\}\quad\text{für}\quad R(z)>0.$$

[14]) Vgl. [8].

Nach der vorhergehenden Bemerkung liegen die Nullstellen der Polynome $\left[P_{m_n}\left(\frac{z}{2}\right)\right]^n$ in der linken Halbebene. Gemäß einer bekannten Überlegung von Hermite und Biehler[15]) folgt daraus, daß die Nullstellen der Polynome $\left[P_{m_n}\left(-\frac{z}{2}\right)\right]^n + \left[P_{m_n}\left(\frac{z}{2}\right)\right]^n$ sich auf der imaginären Achse befinden. Es liegt also eine z. B. im Kreise $|z+1|<1$ konvergente Folge von Polynomen $P_n(z)$ vor, deren Nullstellen die Argumente $\pm\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_n\right)$ besitzen, wobei $\varepsilon_n \geqq 0$ und $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$.

Dieses Beispiel zeigt somit die Unmöglichkeit der Verallgemeinerung des Satzes II im Falle von Polynomen in dem am Schlusse des § 3 erwähnten Sinne.

Aarau, den 8. September 1926.

---

[15]) Vgl. z. B. [10], S. 88, Aufgabe 25.

Literaturverzeichnis.

[1] Lindwart, Egon: Über eine Methode von Laguerre zur Bestimmung des Geschlechts einer ganzen Funktion. Inaug.-Diss., Göttingen 1914.

[2] Pólya, G.: Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **34**, 2. Sem. 1913.

[3] Pólya, G.: Über Annäherung durch Polynome, deren sämtliche Wurzeln in einen Winkelraum fallen. Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, Jahrg. 37, S.-Sem. 1914.

[4] Lindwart, E., u. G. Pólya: Über einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Polynomen und der Verteilung ihrer Wurzeln. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **37**, S.-Sem. 1914.

[5] Montel, P.: Sur les familles normales de fonctions analytiques. Annales de l'École Normale Supérieure **33** (1916), p. 223–302.

[6] Nevanlinna, R.: Zur Theorie der meromorphen Funktionen. Acta Mathematica **46** (1925), S. 2–99.

[7] Ostrowski, A.: Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes. Math. Zeitschr. **24** (1925), S. 215–258.

[8] Carlson, F.: Sur les fonctions entières. Comptes-rendus de l'Académie de Paris **179** (1924), p. 1583.

[9] Borel, E.: Leçons sur les fonctions entières, Paris 1900, p. 51–52.

[10] Pólya, G., u. G. Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I. Berlin: Julius Springer 1925.

[11] Ostrowski, A.: Über vollständige Gebiete gleichmäßiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburger Universität, **1**, 1922.

(Eingegangen am 10. September 1926.)

Über ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre.

Von

Reinhold Baer in Freiburg i. Br.

In seiner Abhandlung „Über die Grundlegung der Mengenlehre“ I Math. Zeitschrift 25 (1926), S. 683 ff. gibt Herr P. Finsler das folgend Axiomensystem der Mengenlehre[1]):

I. Axiom der Beziehung.

Für beliebige Mengen — d. s. Elemente eines durch dieses Axiomen system zu bestimmenden Systems Σ — M und N ist stets eindeutig ent schieden, ob zwischen M und N die ε-Beziehung besteht oder nicht, d. h ob $M \varepsilon N$ oder $M \varepsilon N$ wahr ist[2]).

Auf Grund von I. lassen sich folgende Begriffsbildungen vornehmen[3]):

Zu jeder Menge M gehört ein System Σ_M der *in M wesentliche Mengen*, das folgenden Postulaten genügt:

1. $M \eta \Sigma_M$.
2. Gilt $A \eta \Sigma_M$ und $B \varepsilon A$, so gilt auch $B \eta \Sigma_M$.
3. Ist T_M ein System, das 1. und 2. erfüllt[4]), so folgt aus $A \eta \Sigma$ auch $A \eta \mathsf{T}_M$, d. h. Σ_M ist in T_M als Teilsystem enthalten.

Jede Menge A, die $A \eta \Sigma_M$ erfüllt, heißt dann *in M wesentlich*.

II. Axiom der Identität.

Dann und nur dann ist $M = M'$ — wo M und M' Mengen sind — wenn Σ_M und $\Sigma_{M'}$ isomorph sind[5]), *d. h. wenn es eine eineindeutige Ab bildung der Elemente von Σ_M auf die von $\Sigma_{M'}$ gibt, bei der*

[1]) loc. cit. S. 691.

[2]) Wir ersetzen die von Herrn Finsler benutzte Schreibweise $N \beta M$ durch d in der Literatur übliche: $M \varepsilon N$, d. h. M ist Element von N. Gelegentlich werden w die Zugehörigkeit einer Menge A zu einem System Σ, das keine Menge ist — He Finsler bezeichnet solche Systeme auch als Gesamtheiten — durch $A \eta \Sigma$ symbolisiere

[3]) Vgl. loc. cit. S. 693.

[4]) In der Finslerschen Terminologie ein vollständiges System.

[5]) In der Finslerschen Terminologie heißen M und M' isomorph, Σ_M und $\Sigma_{M'}$ beziehungstreu aufeinander abgebildet. Vgl. loc. cit. S. 694.

1. *M auf M' abgebildet wird,*

2. *wenn A_i das Bild A_i' $(i = 1, 2)$ hat, aus $A_1 \varepsilon A_2$ auch $A_1' \varepsilon A_2'$ folgt, und umgekehrt.*

Die Axiome I. und II. geben eine *allgemeine Charakterisierung* dessen, was unter einer *Mengenlehre* zu verstehen ist; d. h. wir sind dann und nur dann berechtigt, von einer Mengenlehre zu sprechen, wenn wir ein System Σ haben, zwischen dessen Elementen eine ε-Beziehung definiert ist, die I. und II. genügt.

Im allgemeinen[6]) wird allerdings in der Mengenlehre ein *schwächeres Gleichheitsaxiom* benutzt als II.; die zunächst folgenden Betrachtungen werden auch für dieses gültig bleiben.

Wir beweisen den folgenden allgemeinen

Satz[7]): *Sei Σ ein System von Mengen, das* I. *und* II. *genügt; dann ist entweder*

Σ widerspruchsvoll,

d. h. es gibt zwei Mengen A und B in Σ derart, daß $A \varepsilon B$ und $A \varepsilon B$ gleichzeitig bestehen, oder aber

Σ ist einer Erweiterung fähig,

d. h. es gibt ein System Σ^* von Mengen, das

1. *ebenfalls* I. *und* II. *genügt;*

2. *wenn A und B gleichzeitig in Σ und Σ^* enthalten sind, so besteht $A \varepsilon B$ dann und nur dann in Σ^*, wenn es in Σ besteht;*

3. *es gibt eine Menge in Σ^*, die nicht in Σ enthalten ist.*

Zum Beweis betrachten wir das System N aller und nur der Mengen A aus Σ, die $A \varepsilon A$ erfüllen. Es bestehen jetzt zwei Möglichkeiten:

1. Entweder gibt es eine N entsprechende Menge N in Σ, so daß also aus $A \eta \mathsf{N}$ auch $A \varepsilon N$ folgt und umgekehrt;

2. oder es gibt keine solche Menge N in Σ.

Im ersten Falle haben wir die alte Russellsche Antinomie vor uns. Denn entweder es gilt $N \varepsilon N$; dann folgt aus der Definition von N, daß $N \eta \mathsf{N}$ gilt, und hieraus, daß $N \varepsilon N$ gilt; gilt aber $N \varepsilon N$, so folgt ebenso $N \eta \mathsf{N}$ und also $N \varepsilon N$; es sind also $N \varepsilon N$ und $N \varepsilon N$ gleichzeitig wahr, d. h. Σ ist widerspruchsvoll.

---

[6]) Vgl. A. Fraenkel, Die Gleichheitsbeziehung in der Mengenlehre, Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik **157** (1926), S. 79 ff. — H. Vieler, Untersuchungen über Unabhängigkeit und Tragweite der Axiome der Mengenlehre usw., Inaug.-Diss. Marburg 1926, besonders S. 7–16.

[7]) Vgl. E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Math. Annalen **65** (1908), S. 264, Nr. 10, Theorem.

Im zweiten Falle bilden wir ein System Σ^*, indem wir eine im obigen Sinne $\mathfrak{N}$ entsprechende Menge N zu Σ hinzufügen; es gilt dann gewiß $N \notin N$; es muß ja auch $N \eta N$ gelten, da N in Σ gar nicht vorkommt.

N kann auch mit keinem A aus Σ identisch sein (Axiom II), da dieses A ja gerade die Eigenschaften von N haben müßte — nämlich zu allen und nur den B in der ε-Beziehung $B \varepsilon A$ zu stehen, die $B \notin B$ erfüllen [8]) —, ein solches A aber in Σ nicht vorkommt.

Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Unser Satz besagt, daß man „Mengenlehren" beliebig „vergrößern" kann, daß aber gewissermaßen als „obere Grenze" aller Mengenlehren sich eine widerspruchsvolle findet, daß also ein „Limes" über *alle möglichen widerspruchsfreien Mengenlehren, d. h. ihre Vereinigung, nicht* wieder zu einer *widerspruchsfreien Mengenlehre* führt.

Herr P. Finsler vervollständigt seine Axiomatik durch das folgende

III. Axiom der Vollständigkeit.

Die Mengen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung der Axiome I *und* II *keiner Erweiterung mehr fähig ist, d. h. es ist nicht möglich, zu den Mengen noch weitere Dinge hinzuzunehmen, so daß auch in dem so entstehenden neuen System die Axiome* I *und* II *erfüllt sind.*

Es ist offenbar, daß dieses III. Axiom mit dem von uns aus den Axiomen I und II hergeleiteten Satz in Widerspruch steht, d. h. daß *die Axiome* I *bis* III *nicht gleichzeitig ohne Widerspruch erfüllbar sind.*

Merkwürdigerweise führt Herr P. Finsler auch einen *Widerspruchfreiheitsbeweis* für sein Axiomensystem [9]), bei dem er aber notwendigerweise den oben von uns skizzierten Fehlschluß — Vereinigung *aller* möglichen Mengenlehren — begeht.

Herrn P. Finsler war sogar der von uns aufgezeigte Widerspruch bekannt [10]); er versucht ihn folgendermaßen zu widerlegen:

„*Die angegebene Definition von N ist nicht einwandfrei, sie enthält einen inneren Widerspruch. Wenn nämlich N ein ‚neues', d. h. nicht zum Gesamtsystem Σ gehöriges Ding sein soll* (dies ist es aber!), *so darf es auch keinem den Axiomen* I *und* II *genügenden System angehören* (dies tut es aber!). *Da es aber andererseits mit Σ zusammen doch ein solches System bilden soll* (nicht: bilden soll, sondern: bildet!), *so widersprechen*

[8]) Dies ist ja gegenüber Isomorphie invariant.

[9]) Vgl. loc. cit. § 11, S. 698.

[10]) Vgl. loc. cit. S. 700, vorletzter Absatz.

sich die Forderungen (allerdings I. bis III.; denn N wird ja nicht gefordert, sondern konstruiert!), *es gibt kein Ding N, das ihnen genügt, und daher ist auch die Erweiterung des Systems nicht ausführbar*[11])."

Daß diese Widerlegung ihr Ziel verfehlt, geht daraus hervor, daß bei ihr die *Widerspruchslosigkeit* des Axiomensystems *vorausgesetzt* wird, welche doch gerade in Frage steht.

Zur Geschichte des Vollständigkeitsaxioms möchte ich bemerken, daß Hilbert sich über die nur begrenzte Möglichkeit seiner Benutzung unzweideutig ausgesprochen hat; er schreibt[12]):

„*Die Erfüllbarkeit des Vollständigkeitsaxioms ist wesentlich durch die Voranstellung des Archimedischen Axioms bedingt; in der Tat läßt sich zeigen, daß zu einem System von Punkten, Geraden und Ebenen, welche die Axiome* I *bis* IV *erfüllen, stets noch auf mannigfache Weise solche Elemente hinzugefügt werden können, daß in dem durch Zusammensetzung entstehenden Systeme die Axiome* I *bis* IV *ebenfalls sämtlich gültig sind; d. h. das Vollständigkeitsaxiom würde einen Widerspruch einschließen, wenn man den Axiomen* I *bis* IV *nicht noch das Archimedische Axiom hinzufügte.*"

Für die Mengenlehre würde sich diese von Hilbert geforderte Begrenzung so auswirken, daß ein Vollständigkeitsaxiom erst anwendbar ist, wenn durch andere vorhergehende Axiome die Mengenlehre bereits nach „oben" begrenzt ist, d. h. die Möglichkeiten der Mengenbildung eingeschränkt sind. Das ist aber in dem Axiomensystem von Herrn P. Finsler nicht der Fall. Fragt man noch, was die Axiome I und II allein leisten, so ist zu bemerken, daß sie *keine Existenzforderungen* enthalten, also dem *mengentheoretischen Relativismus*[13]) Tür und Tor öffnen, den Herr P. Finsler gerade erledigen wollte. Man muß allerdings auch zugeben, daß gerade durch unseren Satz dieser mengentheoretische Relativismus wenigstens nach „oben" gesichert ist.

Freiburg i. Br., den 31. Januar 1927.

---

[11]) Vgl. loc. cit. S. 700, letzter Absatz; die nicht kursiv gedruckten, eingeklammerten Stellen stammen von mir.

[12]) Vgl. z. B. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl. (1903), S. 17.

[13]) Vgl. Th. Skolem, Skrifter utgit af Videnskapsselskapet i Kristiania 1920, I. Mat.-nat. Klasse, 1. Bind, Nr. 4. — Th. Skolem, Wissenschaftliche Vorträge, V. Kongreß der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors (1923), S. 217—232. — J. v. Neumann, Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik **154** (1925), S. 219—240, bes. Teil II, § 3 und § 5.

(Eingegangen am 3. Februar 1927.)

Erwiderung auf die vorstehende Note des Herrn R. Baer.

Von

Paul Finsler in Zürich.

Die vorstehende Note des Herrn R. Baer betrifft die für die Grundlegung der Mengenlehre und für die Aufklärung der Antinomien wichtige Frage, ob in der Mengenlehre ein Vollständigkeitsaxiom ohne besondere Einschränkungen erfüllbar ist. Herr Baer glaubt, dies sei nicht der Fall; insbesondere sei das in meiner Abhandlung „Über die Grundlegung der Mengenlehre", Math. Zeitschrift 25 (1926), S. 691 aufgestellte Axiomensystem nicht widerspruchsfrei, da jedes den Axiomen I und II genügende System einer Erweiterung fähig sei, so daß also das Vollständigkeitsaxiom III nicht zugleich erfüllt werden könnte. Diese Ansicht ist jedoch, wie ich im folgenden näher ausführen möchte, nicht haltbar.

Zunächst ist wohl klar: Wenn sich zwei Folgerungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegenseitig widersprechen, so darf man nicht ohne weiteres sagen: $\mathfrak{B}$ ist ein Fehlschluß, weil es mit $\mathfrak{A}$ in Widerspruch steht, sondern es folgt zunächst nur, daß entweder $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ falsch sein muß. Ob nun $\mathfrak{A}$ oder ob $\mathfrak{B}$ zu verwerfen ist, kann nur dann einwandfrei entschieden werden, wenn in $\mathfrak{A}$ oder in $\mathfrak{B}$ ein direkter Fehler oder eine Lücke angegeben wird, d. h. ein Fehler, der nicht erst aus dem Bestehen der anderen Folgerung abgeleitet wird.

Nun sagt aber Herr Baer, die Vereinigung *aller* möglichen Mengenlehren (d. h. aller Systeme von Mengen, die den Axiomen I und II genügen) sei ein Fehlschluß, weil sie mit dem von ihm aufgestellten Satze in Widerspruch steht. Ein direkter Fehler oder eine Lücke in meinen Schlüssen, welche die Existenz des Vereinigungssystems ergeben, ist nicht aufgezeigt. Ich halte auch meinen Beweis vollständig aufrecht[1]).

[1]) Ich benutze die Gelegenheit, um ein Versehen in meiner Abhandlung zu berichtigen. Damit Satz 5 (S. 695) gültig bleibt, ist die S. 694 gegebene Definition des Begriffs „isomorph" durch die folgende zu ersetzen:

Die Mengen M und M' heißen *isomorph*, wenn sich die Systeme Σ_M und $\Sigma_{M'}$ der in M bzw. M' wesentlichen Mengen umkehrbar eindeutig und beziehungstreu auf-

Herr R. Baer scheint, nach seiner Ausdrucksweise zu schließen, die Auffassung zu haben, daß ein System von Mengen zwar existieren, aber doch widerspruchsvoll sein kann, so nämlich, daß es dem Axiom I genügt und gleichzeitig doch wieder nicht genügt. Die Existenz eines solchen Systems ist aber logisch unmöglich.

Umgekehrt folgt nun aus dieser Unmöglichkeit gerade die Widerspruchsfreiheit des Vereinigungssystems aller Mengen. Man erkennt dies am einfachsten, wenn man die Festsetzung trifft, daß isomorphe Mengen, auch wenn sie verschiedenen Systemen angehören, stets als identisch betrachtet werden sollen. Da die Mengen rein ideelle Dinge sind, über die nichts anderes festgesetzt ist bzw. nichts anderes festgesetzt sein soll (nur solche Dinge gelten als Mengen), so ist diese Festsetzung zulässig. Dann aber besteht das gewünschte Vereinigungssystem einfach aus der Gesamtheit aller dieser Mengen, d. h. aus allen, die logisch existieren. Wäre nun dieses System widerspruchsvoll, so würde dies heißen, daß die existierenden Mengen zusammen nicht existieren, und dies ist absurd.

Wenn also der Satz des Herrn Baer richtig wäre, so wäre das Ergebnis eine Antinomie, ein direkter logischer Widerspruch. Da dies aber nicht denkbar ist, so muß irgendwo ein Fehler oder eine Lücke vorhanden sein. Diese Lücke findet sich nun tatsächlich in der Schlußfolgerung des Herrn Baer; sie besteht darin, daß für die Menge N, mit welcher das System Σ erweitert werden soll, kein Existenzbeweis gegeben ist. Diese Lücke besteht unabhängig von der Frage, ob das gesamte Axiomensystem widerspruchsfrei ist oder nicht.

Die Existenz der Menge N ist nicht selbstverständlich. Wenn man eine Menge (oder sonst ein Ding) „konstruieren“ will, so muß man sich überlegen, ob die Konstruktion auch ausführbar ist. Es gibt Konstruktionen, oder besser gesagt Konstruktionsvorschriften, die von zirkelhafter Natur sind und die sich deshalb nicht ausführen lassen [2]). Auch die für die Menge N gegebene Konstruktionsvorschrift (oder die Definition von N, was hier im wesentlichen dasselbe bedeutet) ist in gewissen Fällen von zirkelhafter Natur; sie nimmt Bezug auf ein System von Mengen, und zu diesen Mengen müßte unter Umständen definitionsgemäß auch die Menge N selbst gehören. Eine solche Beziehung von N auf sich selbst kann aber unerfüllbar sein.

---

einander abbilden lassen, und zwar so, daß dabei die Elemente von M auf die Elemente von M' abgebildet werden.

Zu Σ_M gehören die Elemente von M, aber im allgemeinen nicht, wie bei Baer, die Menge M selbst.

[2]) Beispiel: Man schreibe auf eine Tafel eine Zahl, die um 1 größer ist als die größte auf der Tafel angeschriebene Zahl.

Die Tatsache, daß dieser Zirkel in gewissen Fällen wirklich unerfüllbar ist, daß also die oben angegebene Lücke sicher nicht ausgefüllt werden kann, folgt nun allerdings auf Grund der Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems. Aber diese Widerspruchsfreiheit wurde bewiesen und steht deshalb hier nicht mehr in Frage. Außerdem ist es selbstverständlich, daß man hier auf das Vereinigungssystem aller Mengen Bezug nehmen muß, denn für ein System von Mengen, welches dem Vollständigkeitsaxiom nicht genügt, ist die Möglichkeit einer Erweiterung trivial.

Nimmt man aber für Σ das System aller Mengen und will dann noch eine neue Menge hinzufügen, so muß man sagen, daß es eine solche nicht gibt. Jeder Versuch, eine solche Menge zu definieren oder zu konstruieren, führt auf einen unerfüllbaren Zirkel. Ein Ding N, das nicht zum Gesamtsystem aller Mengen gehört, das also von allen Mengen verschieden ist, und das trotzdem selbst eine Menge ist, ist logisch unmöglich. Man hat auch nicht die Wahl, entweder das System aller Mengen oder das Ding N als nicht existierend zu verwerfen, weil die Nichtexistenz der existierenden Mengen absurd ist, während umgekehrt die Existenz der fraglichen Menge N auf keine Weise bewiesen werden kann.

Die Frage, in welchen Fällen man eine Menge N finden kann, die einem gegebenen System $\mathfrak{N}$ von Mengen entspricht, wann man also ein System Σ in bestimmter Weise erweitern kann, bedarf einer besonderen Untersuchung. Eine solche ist im dritten Kapitel meiner oben erwähnten Abhandlung durchgeführt.

Die von Herrn Baer angeführte Bemerkung Hilberts über das Vollständigkeitsaxiom darf nicht wörtlich aufgefaßt werden. Sie war wohl wörtlich gemeint, und dies ist zu einer Zeit, wo die logischen und mengentheoretischen Paradoxien noch ungeklärt oder nicht untersucht waren, sehr verständlich. Der logische Sachverhalt ist jedoch der folgende:

Ergänzt man die Hilbertschen Axiomgruppen I bis IV durch das Vollständigkeitsaxiom, läßt aber das Archimedische Axiom beiseite, so erhält man eine Geometrie, die logisch nicht widerspruchsvoll ist, die aber einen so paradoxen Charakter zeigt, daß man bei ihr ebenso leicht zu scheinbaren Widersprüchen gelangt, wie dies bei der nicht eingeschränkten Mengenlehre der Fall ist.

Für die Grundlegung der Mengenlehre wäre es aber unzweckmäßig, von vornherein eine Beschränkung vorzunehmen, da es sich hier gerade darum handelt, das Wesen der Paradoxien zu untersuchen und aufzuklären.

Zürich, den 4. Juni 1927.

(Eingegangen am 6. Juni 1927.)

Bemerkungen zu der Erwiderung von Herrn P. Finsler.

Von

Reinhold Baer in Freiburg i. Br.

Zu der Erwiderung des Herrn P. Finsler ist folgendes zu bemerken:

Die Annahme, daß meine Konstruktion der Menge N (vgl. S. 537 u. 538) „zirkelhafter Natur“ sei, scheint auf einem Mißverständnis zu beruhen; denn diese Konstruktion gründet sich *ausschließlich* auf die in einem vorgelegten Mengensystem Σ bereits vorhandenen Mengen, zu denen eben die *neue* Menge N *nicht* gehört, wie ausdrücklich (a. a. O.) nachgewiesen wird.

Auffallend ist weiter die Bemerkung, daß die von mir zitierten Hilbertschen Ausführungen über das Vollständigkeitsaxiom (vgl. S. 539) „nicht wörtlich“ zu verstehen seien. Nach der Auffassung des Herrn P. Finsler soll vielmehr der „logische Sachverhalt“ der sein, daß es — algebraisch gesprochen — einen *größten* reellen oder geordneten Körper im Sinne von Artin-Schreier* gibt, während doch *jeder* reelle Körper durch Adjunktion eines transzendenten Elementes** zu einem größeren reellen — wenn auch nicht immer archimedisch geordneten — Körper erweitert werden kann.

* E. Artin und O. Schreier, Hamburger Abhandlungen **5** (1926), S. 85–99.

** Im Sinne von E. Steinitz, Journal für die reine und angewandte Mathematik **137** (1910), S. 183.

Freiburg i. Br., den 29. Juni 1927.

(Eingegangen am 30. Juni 1927.)

Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge[1]).

Von

Emanuel Sperner in Hamburg.

Gegeben sei eine endliche Menge $\mathfrak{M}$ von n Elementen. Von zwei Untermengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Menge $\mathfrak{M}$ heißt $\mathfrak{A}$ Teilmenge von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ Obermenge von $\mathfrak{A}$, wenn alle Elemente von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ vorkommen. Ordnung einer Untermenge von $\mathfrak{M}$ heißt die Anzahl ihrer Elemente.

Ein System Σ von Untermengen heißt ausgezeichnet, wenn keine der in Σ vorkommenden Untermengen Teilmenge einer anderen solchen ist. Die Anzahl der in Σ vorkommenden Untermengen heißt Grad von Σ.

Es gilt nun der Satz:

Ist Σ ein ausgezeichnetes System von Untermengen der Menge $\mathfrak{M}$, so ist der Grad von Σ immer $\leqq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$[2]), wenn n die Ordnung von $\mathfrak{M}$ ist;

und zwar gilt das Gleichheitszeichen

1. *bei geradem n nur in einem Falle, nämlich wenn Σ besteht aus sämtlichen Untermengen der Ordnung $\frac{n}{2}$,*
2. *bei ungeradem n in genau zwei Fällen, nämlich*
   a) *wenn Σ besteht aus sämtlichen Untermengen der Ordnung $\frac{n+1}{2}$,*
   b) *wenn Σ besteht aus sämtlichen Untermengen der Ordnung $\frac{n-1}{2}$.*

In den letztgenannten Spezialfällen ist offenbar Σ ein ausgezeichnetes System von Untermengen, und sein Grad ist wirklich $= \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Es bleibt

---

[1]) Die Entstehung dieser Arbeit verdanke ich einer Anregung von Herrn O. Schreier in Hamburg.

[2]) $\left[\frac{n}{2}\right]$ bedeutet wie üblich jene natürliche Zahl k, für die $0 \leqq \frac{n}{2} - k < 1$; $\binom{n}{k}$ ist der Binomialkoeffizient $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

also noch zu beweisen, daß für jedes andere ausgezeichnete Σ der Grad $< \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ ist.

Um dies zu zeigen, beweisen wir erst folgenden Hilfssatz:

m voneinander verschiedene Untermengen k-ter Ordnung der Menge $\mathfrak{M}$ besitzen wenigstens $m+1$ voneinander verschiedene Teilmengen der Ordnung $k-1$, wofern $k > \frac{n+1}{2}$ ist.

Jedenfalls besitzt jede der m Untermengen k-ter Ordnung k Teilmengen von der Ordnung $k-1$, also alle m Untermengen $m \cdot k$ Teilmengen, die natürlich im allgemeinen nicht alle voneinander verschieden sind. Eine Teilmenge $(k-1)$-ter Ordnung kann aber offenbar nur höchstens $(n-k+1)$-mal vorkommen, da eine Untermenge $(k-1)$-ter Ordnung überhaupt nur $n-k+1$ Obermengen k-ter Ordnung besitzt. Ist daher r die Anzahl der untereinander verschiedenen unter den $m \cdot k$ Teilmengen, so ist jedenfalls

$$r \geqq \frac{m \cdot k}{n-k+1}.$$

Nun ist aber wegen $k > \frac{n+1}{2}$ auch

$$k > n-k+1$$

und also

$$\frac{k}{n-k+1} > 1.$$

Daher ist

$$r \geqq m+1,$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Der Bedingung $k > \frac{n+1}{2}$ genügen bei geradem n die Ordnungen $\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \ldots, n$, bei ungeradem n die Ordnungen $\frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \ldots, n$. Wir behaupten aber nun, *daß bei ungeradem n der Hilfssatz auch noch im Falle $k = \frac{n+1}{2}$ Geltung hat, wofern nur dann $m < \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ ist.*

Es gilt jedenfalls auch in diesem Falle wie oben

$$r \geqq \frac{m \cdot k}{n-k+1},$$

und da

$$k = n-k+1$$

ist, also

$$r \geqq m.$$

Sind nun $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_m$ die m Untermengen $\frac{n+1}{2}$-ter Ordnung, so gibt es also sicher m Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$ von der Ordnung $\frac{n-1}{2}$, die alle voneinander verschieden sind. Der Minimalfall $r = m$ könnte aber nur dann eintreten, wenn jedes der $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ genau k-mal als Teilmenge eines $\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ auftreten würde. Es gibt nun eine Untermenge $\mathfrak{A}'$ $\frac{n-1}{2}$-ter Ordnung, die sich von einem gewissen $\mathfrak{A}_i$ aus der Reihe $i = 1, 2, \ldots, m$ nur um ein einziges Element unterscheidet, aber von sämtlichen $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ verschieden ist. Denn erstens gibt es gewiß Untermengen $\frac{n-1}{2}$-ter Ordnung, die von sämtlichen $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ verschieden sind, weil ja $m < \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ vorausgesetzt war; und zweitens kann man jede Untermenge $\frac{n-1}{2}$-ter Ordnung erzeugen, indem man ein beliebiges $\mathfrak{A}_i$ aus der Reihe $i = 1, 2, \ldots, m$ nimmt und sukzessive immer ein Element abändert. Es sei $\mathfrak{A}_k$ $(0 < k \leqq m)$ diejenige Untermenge, die sich von $\mathfrak{A}'$ nur um ein Element unterscheidet. $\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{A}'$ besitzen dann offenbar eine gemeinsame Obermenge $\mathfrak{B}'$ von der Ordnung $\frac{n+1}{2}$. Kommt nun $\mathfrak{B}'$ in der Reihe $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_m$ vor, dann ist gewiß, weil $\mathfrak{A}'$ Teilmenge von $\mathfrak{B}'$ ist,

$$r > m.$$

Ist aber $\mathfrak{B}'$ keines der $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_m$, dann kann $\mathfrak{A}_k$ als Teilmenge von $\mathfrak{B}'$ nur noch höchstens $(k-1)$-mal als Teilmenge der $\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ auftreten. Also ist auch dann der Minimalfall nicht erreicht und es gilt wiederum

$$r > m.$$

Ganz analog dem Bisherigen läßt sich nun weiter beweisen:

m voneinander verschiedene Untermengen k-ter Ordnung der Menge $\mathfrak{M}$ besitzen wenigstens $m+1$ voneinander verschiedene Obermengen der Ordnung $k+1$, wofern $k < \frac{n-1}{2}$ ist, und diese Aussage gilt auch noch bei ungeradem n im Falle $k = \frac{n-1}{2}$, wenn nur dann $m < \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ ist[3]).

Nunmehr sind wir in der Lage, den eingangs behaupteten Satz zu beweisen.

[3]) Man kann diesen Hilfssatz auch sofort aus dem ersten folgern durch Betrachtung komplementärer Untermengen, wobei $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ komplementär heißen, wenn $\overline{\mathfrak{A}}$ besteht aus sämtlichen Elementen, die in $\mathfrak{A}$ nicht enthalten sind.

Es sei also Σ ein ausgezeichnetes System von Untermengen von $\mathfrak{M}$. Wir schließen gleich die Fälle aus, daß

1. bei geradem n Σ bestehe aus lauter Untermengen der Ordnung $\frac{n}{2}$,
2. bei ungeradem n
   a) Σ bestehe aus lauter Untermengen der Ordnung $\frac{n+1}{2}$,
   b) Σ bestehe aus lauter Untermengen der Ordnung $\frac{n-1}{2}$,

alles Fälle, für die der ausgesagte Satz evident ist.

Wir werden zeigen, daß es dann immer eine Folge von Untermengensystemen

$$\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_r$$

gibt mit den zugehörigen Gradzahlen

$$g_0, g_1, g_2, \ldots, g_r$$

und mit folgenden Eigenschaften:

1. $\Sigma = \Sigma_0$,
2. $r \geqq 1$,
3. $g_0 < g_1 < g_2 < \ldots < g_{r-1} \leqq g_r$, wobei im Falle $r = 1$ stets gilt $g_0 < g_1$,
4. jedes Σ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, r)$ ist ein ausgezeichnetes System,
5. Σ_r besteht aus lauter Untermengen gleicher Ordnung, und zwar bei geradem n der Ordnung $\frac{n}{2}$, bei ungeradem n der Ordnung $\frac{n-1}{2}$.

Wegen 4. und 5. gilt dann offenbar

$$g_r \leqq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

und daher wegen 2. und 3.

$$g_0 < \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Nach 1. ist aber g_0 der Grad von Σ.

Die Existenz einer solchen Folge ist aber sofort dargetan. Es sei nämlich k die höchste Ordnung, die bei den in $\Sigma = \Sigma_0$ vorkommenden Untermengen auftritt, und m Untermengen aus Σ_0 mögen diese Ordnung haben. Ist dann $k > \frac{n}{2}$, so ersetzen wir die m Untermengen der Ordnung k durch ihre sämtlichen Teilmengen der Ordnung $k-1$, deren Anzahl nach dem Hilfssatz $\geqq m+1$ ist. Das so erhaltene neue System Σ_1 von Untermengen ist wieder ausgezeichnet, wie man sofort sieht. Außerdem ist $g_1 > g_0$. Mit Σ_1 verfahren wir nun wieder so und erhalten Σ_2 und so fort, solange die höchste auftretende Ordnung $> \frac{n}{2}$ bleibt, etwa bis Σ_l,

welches also nur noch Untermengen enthält von einer Ordnung $\leqq \frac{n}{2}$. (Es kann natürlich noch $\mathfrak{S}_l = \mathfrak{S}_0$ sein.) Nunmehr sei h die niedrigste Ordnung, die bei den in $\mathfrak{S}_l$ vorkommenden Untermengen auftritt, und t Untermengen aus $\mathfrak{S}_l$ mögen diese Ordnung haben. Ersetzen wir diese t Untermengen durch ihre sämtlichen Obermengen der Ordnung $h+1$, so erhalten wir wieder ein ausgezeichnetes System $\mathfrak{S}_{l+1}$. So fahren wir fort, bis wir zu einem $\mathfrak{S}_r$ kommen, das bei geradem n nur Untermengen der Ordnung $\frac{n}{2}$, bei ungeradem n nur Untermengen der Ordnung $\frac{n-1}{2}$ enthält. (Ist $l > 0$, so kann natürlich auch $r = l$ sein[4]).) Infolge der gemachten Einschränkungen über $\mathfrak{S}$ ist aber $r \geqq 1$, und die Eigenschaften 3. und 4. sind aus dem Bildungsverfahren der Folge evident. Damit ist alles bewiesen.

[4]) Nur in diesem Falle $r = l$ kann $g_{r-1} = g_r$ eintreten, nämlich, wenn bei ungeradem n $\mathfrak{S}_{l-1}$ besteht aus sämtlichen Untermengen der Ordnung $\frac{n+1}{2}$. Dann ist aber auch wegen der obigen Einschränkungen über $\mathfrak{S}$ $r > 1$.

(Eingegangen am 13. Februar 1927.)

Über Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungssysteme im reellen Gebiet.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Beispiele für Nichtexistenz.

Die Variablen und Funktionen sind in dieser Arbeit durchweg als reellwertig gedacht. Unter einem „Integral" der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \tag{1}$$

wo f eine stetige Funktion ihrer vier Argumente ist, soll eine *stetige* Funktion $z = z(x, y)$ verstanden werden, die der Differentialgleichung genügt und *stetige* partielle Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ hat. Entsprechend ist der Integralbegriff bei einem System partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x} = f_\nu\left(x, y, z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

zu verstehen. Die Forderung der Stetigkeit erheben wir deshalb, weil über die eventuelle Existenz von Lösungen mit unstetigen Ableitungen heute noch so gut wie nichts ausgesagt werden kann[1]).

Dabei werden wir uns auf das Gebiet $x \geqq 0$ beschränken, so daß für $x = 0$ die partiellen Ableitungen nach x nur als vordere zu verstehen sind, und als Nebenbedingung werden wir verlangen, daß die Integrale z bzw. z_ν

[1]) R. Hedrick behauptet in seiner Göttinger Dissertation (Über den analytischen Charakter der Lösungen von Differentialgleichungen, 1901) die Nichtexistenz, falls f analytisch ist. Er bedient sich aber bei Einführung neuer Variablen gewisser Rechenregeln, die bei unstetigen Ableitungen nicht gelten, setzt also unbewußt doch die Stetigkeit der Ableitungen voraus.

für $x = 0$ vorgeschriebene Funktionen $\varphi(y)$ bzw. $\varphi_\nu(y)$ mit stetiger Ableitung sind (Cauchysche Randbedingung). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf dabei $\varphi(y) = 0$ bzw. $\varphi_\nu(y) = 0$ angenommen werden, da der allgemeine Fall sich auf diesen reduziert, wenn man $z - \varphi(y)$ bzw. $z_\nu - \varphi_\nu(y)$ als neue Unbekannte einführt. Wir werden deshalb nur Integrale suchen, die für $x = 0$ verschwinden und für hinreichend kleine positive x (und gewisse y) existieren.

In der Theorie der Differentialgleichung (1) führt man gewöhnlich den Existenzbeweis unter der Voraussetzung, daß f analytisch ist, mit Hilfe der Majorantenmethode. Sodann entwickelt man die Charakteristikentheorie meist zu dem Zweck, das allgemeine Integral nun wirklich explizit zu finden. In Wahrheit liefert aber die Charakteristikentheorie auch einen Existenzbeweis, der von der Funktion f viel weniger verlangt, nämlich nur die Existenz und Stetigkeit gewisser erster und zweiter Ableitungen. Die Frage, ob man mit noch geringeren Voraussetzungen, etwa bloßer Stetigkeit von f, auskommt, bleibt zunächst offen, und erst recht kann man über *Systeme* von Differentialgleichungen gar nichts aussagen, weil es da kein Analogon zur Charakteristikentheorie gibt.

In diesem Paragraphen soll durch einige sehr einfache Beispiele gezeigt werden, daß diese Dinge bei partiellen Differentialgleichungen ganz anders liegen, als man in Analogie zu bekannten Sätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen erwarten sollte. Noch 1906 hat Arzelà geglaubt, für die Gleichung (1) die Integralexistenz bei bloßer Stetigkeit von f beweisen zu können; er hat aber bald bemerkt, daß der Beweis mißglückt war[2]). Daß er mißglücken *mußte*, weil der Satz falsch ist, lehrt unten das erste Beispiel. Für Differentialgleichungen zweiter Ordnung hat schon E. E. Levi analoge Beispiele angegeben[3]).

I. Als erstes Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} + F(x+y); \tag{3}$$

dabei sei F eine stetige aber nicht differenzierbare Funktion. *Die Differentialgleichung* (3) *hat kein Integral, welches für* $x = 0$ *verschwindet und für hinreichend kleine positive* x *existiert* (übrigens hat sie überhaupt kein Integral). Führt man nämlich neue unabhängige Variable ein, indem man

$$x = \xi, \qquad x + y = \eta$$

[2]) C. Arzelà, Condizioni di esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali, Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti ser. 5, $\mathbf{15}_1$ (1906), p. 417–423. — Sulle equazioni a derivate parziali, Ibid. p. 670.

[3]) E. E. Levi, Sul problema di Cauchy, Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti ser. 5, $\mathbf{16}_2$ (1907), p. 105–112.

setzt, so geht die Differentialgleichung (3) über in[4])

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = F(\eta).$$

Hieraus folgt, da z für $x = 0$, also für $\xi = 0$, verschwinden soll,

$$z = \xi F(\eta),$$

und, indem man zu den ursprünglichen Variablen x, y zurückkehrt:

$$z = x F(x + y). \tag{4}$$

Daher könnte allenfalls die Funktion (4) das gesuchte Integral sein. Diese ist es aber nicht, weil sie gar keine Ableitungen hat, und damit ist die Nichtexistenz gezeigt.

II. Nunmehr betrachten wir das System von n Differentialgleichungen mit n Unbekannten

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial x} &= \frac{\partial z_1}{\partial y} + F(x+y), \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} &= \frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{\partial z_2}{\partial y}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial x} &= \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + \frac{\partial z_n}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

wo F eine stetige Funktion ist. *Das System* (5) *hat dann und nur dann ein System von Integralen* $z_1, \ldots, z_n$, *die für* $x = 0$ *verschwinden und für hinreichend kleine positive* x *existieren, wenn die Funktion* F *eine stetige* n*-te Ableitung besitzt.* Setzt man nämlich wieder

$$x = \xi, \quad x + y = \eta,$$

so geht das System (5) über in:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial \xi} &= F(\eta), \\ \frac{\partial z_2}{\partial \xi} &= \frac{\partial z_1}{\partial \eta}, \\ &\cdots\cdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial \xi} &= \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

[4]) Bei dieser Umformung nach den üblichen Regeln der Differentialrechnung wird die Stetigkeit der partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ benutzt. Auch die geringere Voraussetzung, daß z ein vollständiges Differential im Sinne von Stolz hat (geometrisch: Tangentialebene) würde genügen; doch legen wir auf diese Verallgemeinerung keinen großen Wert.

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$z_1 = \xi F(\eta).$$

Die zweite Gleichung verlangt dann die Existenz der Ableitung $F'(\eta)$, und es folgt:

$$z_2 = \frac{\xi^2}{2} F'(\eta).$$

Geht man jetzt zur dritten Gleichung usw., so ergibt sich sukzessive die Notwendigkeit, daß die Ableitungen von F bis zur $(n-1)$-ten existieren, und man erhält:

$$z_\nu = \frac{\xi^\nu}{\nu!} F^{(\nu-1)}(\eta) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

oder, indem man zu den Variablen x, y zurückkehrt,

$$z_\nu = \frac{x^\nu}{\nu!} F^{(\nu-1)}(x+y) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Allenfalls die Funktionen (7) könnten also die gesuchten Integrale sein. Damit nun z_n noch stetige Ableitungen erster Ordnung hat, muß auch die n-te Ableitung von F existieren und stetig sein. Diese für die Integralexistenz notwendige Bedingung ist aber auch hinreichend, weil man dann sofort verifiziert, daß die Funktionen (7) wirklich Integrale sind.

III. Noch viel überraschender ist folgendes System von zwei Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial x} = \dfrac{\partial z_1}{\partial y} + \dfrac{\partial z_2}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x} = a\dfrac{\partial z_1}{\partial y} + \dfrac{\partial z_2}{\partial y} + F(x+y), \end{cases} \tag{8}$$

wo F wieder stetig sei und wo z_1, z_2 für $x = 0$ verschwinden und für hinreichend kleine positive x existieren sollen; a ist eine Konstante. *Hier ist, wenn $a > 0$, für die Integralexistenz keine weitere Bedingung erforderlich. Wenn aber $a = 0$, so lautet die notwendige und hinreichende Bedingung: F hat eine stetige zweite Ableitung; wenn $a < 0$, lautet sie sogar: F ist analytisch.*

Zum Beweis dieser Behauptungen bemerken wir, daß für positive a durch die Formeln

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{2a}\left(\displaystyle\int_{x+y}^{x+y+x\sqrt{a}} F(t)\,dt - \int_{x+y-x\sqrt{a}}^{x+y} F(t)\,dt \right), \\ z_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \displaystyle\int_{x+y-x\sqrt{a}}^{x+y+x\sqrt{a}} F(t)\,dt \end{cases} \tag{9}$$

ein Integral der verlangten Art dargestellt wird, wie sich sofort verifizieren läßt. Übrigens ist es das einzige, was aber hier weniger interessiert.

Für $a = 0$ führen wir das System (8) durch die Transformation

$$x = \xi, \quad x + y = \eta$$

über in:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial \xi} = \frac{\partial z_2}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial z_2}{\partial \xi} = F(\eta). \end{cases} \tag{10}$$

Hieraus folgt sogleich:

$$z_2 = \xi F(\eta),$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \xi} = \xi F'(\eta), \quad \text{also} \quad z_1 = \frac{\xi^2}{2} F'(\eta),$$

oder, indem man zu den Variablen x, y zurückkehrt,

$$\begin{cases} z_1 = \frac{x^2}{2} F'(x + y), \\ z_2 = x F(x + y). \end{cases} \tag{11}$$

Damit z_1 stetige partielle Ableitungen hat, muß also die zweite Ableitung F'' existieren und stetig sein; diese notwendige Bedingung ist auch hinreichend, weil dann die Formeln (11) offenbar wirklich das gesuchte Integralsystem darstellen.

Endlich für $a < 0$ setzen wir $a = -b^2$, wo $b > 0$ ist. Sodann führen wir durch die Formeln

$$bx = \xi, \quad x + y = \eta \tag{12}$$

neue unabhängige Variable und durch die Formeln

$$b z_1 - \frac{1}{b} \int_c^\eta F(t)\, dt = \zeta_1, \qquad z_2 = \zeta_2 \tag{13}$$

neue unbekannte Funktionen ein. Dadurch geht das System (8) über in die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \zeta_2}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial \zeta_2}{\partial \xi} = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}. \tag{14}$$

Daher ist $\zeta_1 + i\zeta_2$ für genügend kleine positive x, also für genügend kleine positive ξ (und gewisse η) eine analytische Funktion von $\xi + i\eta$, die nach (13) für $x \to 0$, also für $\xi \to 0$, gegen die reelle Funktion von η

$$-\frac{1}{b} \int_c^\eta F(t)\, dt \tag{15}$$

konvergiert. Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip ist sie über die Linie $\xi = 0$ analytisch fortsetzbar und also auch für $\xi = 0$ noch analytisch. *Also ist die Funktion* (15) *und folglich auch* $F(t)$ *analytisch.* Daß diese für die Integralexistenz notwendige Bedingung auch hinreicht, folgt aus allgemeinen Existenzsätzen, wird aber auch dadurch bewiesen, daß dann die Formeln (9) auch für $a < 0$ einen Sinn haben und augenscheinlich wieder ein (reelles) Integral des Differentialgleichungssystems (8) darstellen.

§ 2.

Ein Hilfssatz.

Bei analytischen Differentialgleichungssystemen wird die Integralexistenz durch die Majorantenmethode bewiesen. Bei nicht analytischen besteht nach den obigen Beispielen keine Aussicht, einen einigermaßen allgemeinen Existenzbeweis zu führen; man wird sich mit speziellen Klassen begnügen müssen. Zunächst soll der folgende Hilfssatz bewiesen werden.

Hilfssatz. *Wenn die Funktionen* $f(x,y)$, $g(x,y)$ *und ihre partiellen Ableitungen* f_y', g_y' *im Bereich*

$$(B) \qquad 0 \leqq x \leqq a, \quad |y| + Kx \leqq b$$

stetig sind und den Ungleichungen genügen:

$$|f(x,y)| \leqq K, \qquad |f_y'(x,y)| \leqq L,$$

$$|g(x,y)| \leqq \frac{Mx^k}{k!}, \qquad |g_y'(x,y)| \leqq \frac{Nx^l}{l!},$$

wo a, b, K, L, M, N *positive Konstanten sind und* $k \geqq 0$, $l \geqq 0$ *ist, so hat die partielle Differentialgleichung*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + g(x,y)$$

im Bereich (B) *ein und nur ein Integral, welches für* $x = 0$ *verschwindet, und zwar ist*

$$|z| \leqq \frac{Mx^{k+1}}{(k+1)!}, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \leqq \frac{Ne^{La}x^{l+1}}{(l+1)!}.$$

Man beachte, daß die zur Definition des Bereiches (B) dienende Konstante K dieselbe ist, welche auch als obere Schranke der Funktion $|f(x,y)|$ auftritt. Aus bekannten Sätzen entnimmt man dann, daß durch jeden Punkt von (B) eine und nur eine Integralkurve der gewöhnlichen Differentialgleichung

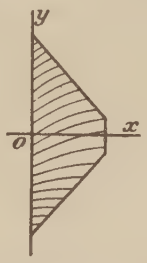
$$(16) \qquad \frac{dy}{dx} + f(x,y) = 0$$

geht und daß jede die Linie $x = 0$ trifft (siehe die Figur). Die Gleichung der Integralkurve, welche durch den Punkt $x = 0, y = c$ geht, sei

$$y = \varphi(x, c), \tag{17}$$

so daß insbesondere

$$\varphi(0, c) = c \tag{18}$$



ist. Durch die Gleichung (17) wird der Bereich (B) umkehrbar eindeutig auf einen Bereich der xc-Ebene abgebildet, und in diesem ist $\varphi(x, c)$ eine stetige Funktion von x und c mit stetigen partiellen Ableitungen φ'_x und φ'_c.

Da φ ein Integral der Gleichung (16) ist, so besteht die Identität

$$\varphi'_x(x, c) + f(x, \varphi(x, c)) = 0. \tag{19}$$

Außerdem genügt aber φ'_c der Differentialgleichung, die aus (19) durch formale Differentiation nach c entsteht[5]):

$$\frac{d\varphi'_c(x, c)}{dx} + f'_y(x, \varphi(x, c)) \cdot \varphi'_c(x, c) = 0.$$

Daraus folgt, da wegen (18) offenbar $\varphi'_c(0, c) = 1$ ist:

$$\varphi'_c(x, c) = e^{-\int_0^x f'_y\, t, \varphi(t, c))\, dt} \tag{20}$$

Die Gleichung (17) ist bekanntlich nach c auflösbar:

$$c = \psi(x, y), \tag{21}$$

so daß identisch

$$\varphi(x, \psi(x, y)) = y \tag{22}$$

ist. Dabei ist die Funktion $\psi(x, y)$ im Bereich (B) stetig und hat stetige partielle Ableitungen ψ'_x, ψ'_y. Insbesondere ist

$$\psi'_y(x, y) = \frac{1}{\varphi'_c(x, c)} = \frac{1}{\varphi'_c(x, \psi(x, y))} = e^{\int_0^x f'_y(t, \varphi(t, \psi(x, y)))\, dt} \tag{23}$$

Außerdem besteht auch, da ja die Gleichung (21) das allgemeine Integral der Differentialgleichung (16) darstellt, die Identität

$$\psi'_x(x, y) = \psi'_y(x, y)\, f(x, y). \tag{24}$$

---

[5]) Vgl. etwa de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale, 2. Oder besser: J. F. Ritt, On the differentiability of the solution of a differential equation with respect to a parameter, Annals of mathematics (2), **20** (1919), p. 289–291.

Nunmehr wenden wir uns der partiellen Differentialgleichung des Hilfssatzes zu. Führen wir durch die Formeln

$$x = \xi, \qquad y = \varphi(\xi, \eta),$$

deren Auflösung nach dem vorigen

$$\xi = x, \qquad \eta = \psi(x, y)$$

lauten, neue unabhängige Variable ein, so geht die partielle Differentialgleichung des Hilfssatzes mit Rücksicht auf (24) über in:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = g(\xi, \varphi(\xi, \eta)).$$

Das für $x = 0$, also für $\xi = 0$, verschwindende Integral kann also nur folgendes sein:

$$z = \int_0^{\xi} g(\tau, \varphi(\tau, \eta))\, d\tau,$$

oder, wenn man zu den Variablen x, y zurückkehrt,

$$z = \int_0^{x} g(\tau, \varphi(\tau, \psi(x, y)))\, d\tau. \tag{25}$$

Diese Funktion von x, y ist nun wirklich das gesuchte Integral. Denn sie ist im Bereich (B) stetig und hat stetige partielle Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int_0^{x} g'_y(\tau, \varphi(\tau, \psi(x, y)))\, \varphi'_c(\tau, \psi(x, y))\, \psi'_y(x, y)\, d\tau, \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= g(x, \varphi(x, \psi(x, y))) \\ &\quad + \int_0^{x} g'_y(\tau, \varphi(\tau, \psi(x, y)))\, \varphi'_c(\tau, \psi(x, y))\, \psi'_x(x, y)\, d\tau, \end{aligned} \tag{27}$$

die mit Rücksicht auf (22) und (24) offenbar die Differentialgleichung des Hilfssatzes befriedigen.

Der Gleichung (26) läßt sich mit Rücksicht auf (20) und (23) auch die folgende Gestalt geben:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int_0^{x} g'_y(\tau, \varphi(\tau, \psi(x, y)))\, e^{\int_{\tau}^{x} f'_y(t, \varphi(t, \psi(x, y)))\, dt}\, d\tau. \tag{28}$$

Aus (25) folgt nun auf Grund der Voraussetzungen des Hilfssatzes sofort:

$$|z| \leqq \int_0^{x} \frac{M \tau^k}{k!}\, d\tau = \frac{M x^{k+1}}{(k+1)!},$$

und analog folgt aus (28):

$$\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \leqq \int_0^x \frac{N\tau^l}{l!}\, e^{La}\, d\tau = \frac{N e^{La} x^{l+1}}{(l+1)!},$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

§ 3.

Integralexistenz bei einem speziellen System.

Satz 1. *Die Funktionen*

$$F_\nu(x, y), \quad G_\nu(x, y, z_1, \ldots, z_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

seien im Bereich

$$(B_1) \qquad 0 \leqq x \leqq a, \quad |y| + Kx \leqq b, \quad |z_\nu| \leqq c,$$

wo a, b, c, K positive Konstanten sind, stetig und es sei

$$|F_\nu(x, y)| \leqq K, \quad |G_\nu(x, y, z_1, \ldots, z_n)| \leqq M \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo M eine weitere positive Konstante ist. Ferner seien in (B_1) auch die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F_\nu}{\partial y}, \ \frac{\partial G_\nu}{\partial y}, \ \frac{\partial G_\nu}{\partial z_\lambda}, \ \frac{\partial^2 G_\nu}{\partial y \partial z_\lambda}, \ \frac{\partial^2 G_\nu}{\partial z_\lambda \partial z_\mu} \qquad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

vorhanden und stetig. Dann hat das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x} = F_\nu(x, y)\frac{\partial z_\nu}{\partial y} + G_\nu(x, y, z_1, \ldots, z_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

im Bereich

$$(B_2) \qquad 0 \leqq x \leqq \operatorname{Min}\left(a, \frac{c}{M}\right), \qquad |y| + Kx \leqq b$$

ein und nur ein System von für $x = 0$ verschwindenden Integralen z_ν, für welche $|z_\nu| \leqq c$ ist; und zwar ist dann sogar $|z_\nu| \leqq Mx$.

Zum Beweis dieses Satzes wenden wir sukzessive Näherungen an, indem wir

$$(29) \qquad z_{10} = 0, \ z_{20} = 0, \ \ldots, \ z_{n0} = 0$$

setzen und dann die Funktionen $z_{\nu, m+1}$ rekurrent so bestimmen, daß sie für $x = 0$ verschwinden und daß sie Integrale des Differentialgleichungssystems

$$(30) \qquad \frac{\partial z_{\nu, m+1}}{\partial x} = F_\nu(x, y)\frac{\partial z_{\nu, m+1}}{\partial y} + G_\nu(x, y, z_{1m}, \ldots, z_{nm})$$

sind. Das ist möglich; denn für $m = 0$ existieren wegen (29) gewiß die Funktionen $z_{\nu m}$ im Bereich (B_2); sie haben stetige partielle Ableitungen nach x und y und es ist $|z_{\nu m}| \leqq Mx \leqq c$, so daß ihre Werte in den

Definitionsbereich (B_1) der Funktionen G_λ fallen. Wenn das aber alles für einen gewissen Wert $m = m_1$ zutrifft, so lehrt der Hilfssatz für $k = 0$, $l = 0$, angewandt auf die Gleichung (30), daß es auch für $m = m_1 + 1$ gilt. Somit existieren für alle m die Funktionen $z_{\nu m}$ im Bereich (B_2), sie sind daselbst stetig und haben stetige partielle Ableitungen nach x und y und es ist

$$|z_{\nu m}| \leqq Mx \leqq c. \tag{31}$$

Ferner gilt auch die Abschätzungsformel

$$\left|\frac{\partial z_{\nu m}}{\partial y}\right| \leqq C^m x \leqq C^m a, \tag{32}$$

wenn C eine genügend große Konstante ist. Zum Beweis sei A eine obere Schranke für die in (B_1) stetigen Funktionen

$$\left|\frac{\partial F_\nu}{\partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial G_\nu}{\partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial G_\nu}{\partial z_\lambda}\right|.$$

Nun ist die Ungleichung (32) wegen $z_{\nu 0} = 0$ gewiß für $m = 0$ richtig. Wenn sie aber für einen gewissen Wert m gilt, so ist

$$\left|\frac{\partial G_\nu}{\partial y} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial G_\nu}{\partial z_\lambda} \frac{\partial z_{\lambda m}}{\partial y}\right| \leqq A + n A C^m a \leqq (A + n a A) C^m,$$

wenn nur $C \geqq 1$, und der Hilfssatz für $k = 0$, $l = 0$, angewandt auf die Gleichung (30), lehrt dann:

$$\left|\frac{\partial z_{\nu, m+1}}{\partial y}\right| \leqq (A + n a A) C^m e^{Aa} x \leqq C^{m+1} x,$$

sofern nur $C \geqq (A + n a A) e^{Aa}$ ist. Es genügt also,

$$C = \operatorname{Max}(1, (A + n a A) e^{Aa})$$

zu wählen, um die Ungleichung (32) für alle m zu gewährleisten.

Nunmehr setzen wir

$$z_{\nu, m+1} - z_{\nu m} = v_{\nu, m+1} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{33}$$

Dann ist nach (30) für $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{\partial v_{\nu, m+1}}{\partial x} = F_\nu(x, y) \frac{\partial v_{\nu, m+1}}{\partial y} + H_{\nu m}(x, y), \tag{34}$$

wobei

$$H_{\nu m}(x, y) = G_\nu(x, y, z_{1m}, \ldots, z_{nm}) - G_\nu(x, y, z_{1, m-1}, \ldots, z_{n, m-1}). \tag{35}$$

Aus (35) folgt sogleich:

$$|H_{\nu m}(x, y)| \leqq A \sum_{\lambda=1}^{n} |v_{\lambda m}|.$$

Nimmt man also an, für einen gewissen Wert von m sei

$$|v_{\nu m}| \leqq \frac{C_1^m x^m}{m!}, \tag{36}$$

was ja wegen (31) für $m = 1$ gewiß zutrifft, sofern nur $C_1 \geqq M$ gewählt wird, so ist

$$|H_{\nu m}(x, y)| \leqq \frac{n A C_1^m x^m}{m!},$$

und der Hilfssatz für $k = m$, $l = 0$, angewandt auf die Gleichung (34), lehrt dann:

$$|v_{\nu, m+1}| \leqq \frac{n A C_1^m x^{m+1}}{(m+1)!} \leqq \frac{C_1^{m+1} x^{m+1}}{(m+1)!},$$

sofern nur $C_1 \geqq n A$ ist. Es genügt also,

$$C_1 = \mathrm{Max}(M, n A)$$

zu wählen, um die Ungleichung (36) für alle m zu gewährleisten.

Aus (36) folgt sofort die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} v_{\nu m} = \lim_{m \to \infty} z_{\nu m}$$

im ganzen Bereich (B_2). Wir setzen demgemäß

$$\lim_{m \to \infty} z_{\nu m} = z_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{37}$$

und wegen (31) ist dann auch

$$|z_\nu| \leqq M x \leqq c. \tag{38}$$

Um auch die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial v_{\nu m}}{\partial y} = \lim_{m \to \infty} \frac{\partial z_{\nu m}}{\partial y} \tag{39}$$

zu beweisen, setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial G_\nu}{\partial y} = G_{\nu 0}, \qquad \frac{\partial G_\nu}{\partial z_\lambda} = G_{\nu \lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{40}$$

Dann folgt aus (35):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H_{\nu m}(x, y)}{\partial y} &= G_{\nu 0}(x, y, z_{1m}, \ldots, z_{nm}) - G_{\nu 0}(x, y, z_{1, m-1}, \ldots, z_{n, m-1}) \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{n} \left[\frac{\partial z_{\lambda m}}{\partial y} \cdot G_{\nu \lambda}(x, y, z_{1m}, \ldots, z_{nm}) \right. \\ &\left. - \frac{\partial z_{\lambda, m-1}}{\partial y} \cdot G_{\nu \lambda}(x, y, z_{1, m-1}, \ldots, z_{n, m-1}) \right]. \end{aligned} \right. \tag{41}$$

Wenn nun A_1 eine obere Schranke für die nach Voraussetzung in (B_1) stetigen Funktionen

$$\left| \frac{\partial^2 G_\nu}{\partial y \, \partial z_\mu} \right| = \left| \frac{\partial G_{\nu 0}}{\partial z_\mu} \right|, \qquad \left| \frac{\partial^2 G_\nu}{\partial z_\lambda \partial z_\mu} \right| = \left| \frac{\partial G_{\nu \lambda}}{\partial z_\mu} \right|$$

ist, so ist für $\lambda = 0, 1, \ldots, n$ mit Rücksicht auf (36)

$$|G_{\nu\lambda}(x, y, z_{1m}, \ldots, z_{nm}) - G_{\nu\lambda}(x, y, z_{1,m-1}, \ldots, z_{n,m-1})|$$

$$\leqq A_1 \sum_{\mu=1}^{n} |v_{\mu m}| \leqq \frac{n A_1 C_1^m x^m}{m!}.$$

Aus (41) folgt daher, weil A eine obere Schranke für $\left|\frac{\partial G_\nu}{\partial z_\lambda}\right| = |G_{\nu\lambda}|$ war:

$$\left|\frac{\partial H_{\nu m}(x,y)}{\partial y}\right| \leqq \frac{n A_1 C_1^m x^m}{m!} + \sum_{\lambda=1}^{n} \left|\frac{\partial z_{\lambda m}}{\partial y}\right| \frac{n A_1 C_1^m x^m}{m!} + \sum_{\lambda=1}^{n} \left|\frac{\partial v_{\lambda m}}{\partial y}\right| A,$$

und also mit Rücksicht auf (32):

$$\left|\frac{\partial H_{\nu m}(x,y)}{\partial y}\right| \leqq \frac{n A_1 C_1^m x^m}{m!} + \frac{n^2 a A_1 C^m C_1^m x^m}{m!} + A \sum_{\lambda=1}^{n} \left|\frac{\partial v_{\lambda m}}{\partial y}\right|$$

$$\leqq \frac{(n A_1 + n^2 a A_1)(C C_1)^m x^m}{m!} + A \sum_{\lambda=1}^{n} \left|\frac{\partial v_{\lambda m}}{\partial y}\right|,$$

weil ja $C \geqq 1$ ist. Hieraus ergibt sich nun leicht die Ungleichung

$$\left|\frac{\partial v_{\nu m}}{\partial y}\right| \leqq \frac{C_2^m x^m}{m!} \tag{42}$$

für eine genügend große Konstante C_2. Denn für $m = 1$ ist diese wegen (32) jedenfalls richtig, wenn nur $C_2 \geqq C$ ist. Wenn sie aber für einen gewissen Wert m zutrifft, so ist auf Grund der vorausgehenden Ungleichung

$$\left|\frac{\partial H_{\nu m}(x,y)}{\partial y}\right| \leqq \frac{(n A_1 + n^2 a A_1)(C C_1)^m x^m}{m!} + \frac{n A C_2^m x^m}{m!}$$

$$\leqq \frac{(n A_1 + n^2 a A_1 + n A) C_2^m x^m}{m!},$$

sofern nur $C_2 \geqq C C_1$ gewählt wird. Aus dem Hilfssatz für $k = m$, $l = m$, angewandt auf die Differentialgleichung (34), folgt dann

$$\left|\frac{\partial v_{\nu, m+1}}{\partial y}\right| \leqq \frac{(n A_1 + n^2 a A_1 + n A) C_2^m e^{Aa} x^{m+1}}{(m+1)!} \leqq \frac{C_2^{m+1} x^{m+1}}{(m+1)!},$$

sofern nur $C_2 \geqq (n A_1 + n^2 a A_1 + n A) e^{Aa}$ ist. Es genügt also,

$$C_2 = \mathrm{Max}(C, C C_1, (n A_1 + n^2 a A_1 + n A) e^{Aa})$$

zu wählen, um die Ungleichung (42) für alle m zu gewährleisten.

Aus (42) folgt aber die in (B_2) gleichmäßige Konvergenz der Reihe (39), und mit Rücksicht auf (37) ist daher

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\partial z_{\nu m}}{\partial y} = \frac{\partial z_\nu}{\partial y}. \tag{43}$$

Schließlich folgt wegen der gleichmäßigen Existenz der Grenzwerte (37) und (43) unmittelbar aus der Differentialgleichung (30) selbst, daß auch die Ableitung $\frac{\partial z_{\nu m}}{\partial x}$ mit wachsendem m gleichmäßig in (B_2) einer Grenzfunktion zustrebt, und folglich ist

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\partial z_{\nu m}}{\partial x} = \frac{\partial z_\nu}{\partial x}. \tag{44}$$

Aus der Formel (30) folgt daher, indem man m über alle Grenzen wachsen läßt:

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x} = F_\nu(x,y)\frac{\partial z_\nu}{\partial y} + G_\nu(x,y,z_1,\ldots,z_n) \qquad (\nu = 1,2,\ldots,n),$$

und damit ist zunächst die *Existenz* der verlangten Integrale bewiesen.

Um auch die *Einzigkeit* zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe noch ein zweites Integralsystem $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$. Dann ist

$$\frac{\partial \zeta_\nu}{\partial x} = F_\nu(x,y)\frac{\partial \zeta_\nu}{\partial y} + G_\nu(x,y,\zeta_1,\ldots,\zeta_n),$$

und also, wenn $z_\nu - \zeta_\nu = u_\nu$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial x} = F_\nu(x,y)\frac{\partial u_\nu}{\partial y} + \Phi_\nu(x,y), \tag{45}$$

wobei

$$\Phi_\nu(x,y) = G_\nu(x,y,z_1,\ldots,z_n) - G_\nu(x,y,\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \tag{46}$$

ist. Hiernach gilt die Abschätzung

$$|\Phi_\nu(x,y)| \leqq A\sum_{\lambda=1}^{n}|u_\lambda|. \tag{47}$$

Nun ist nach Voraussetzung $|z_\lambda| \leqq c$, $|\zeta_\lambda| \leqq c$, also $|u_\lambda| \leqq 2c$. Wir behaupten aber, daß sogar für jedes beliebig große m

$$|u_\lambda| \leqq \frac{2c(nA)^m x^m}{m!} \tag{48}$$

ist. Denn nach dem soeben Bewiesenen gilt diese Ungleichung jedenfalls für $m = 0$. Wenn sie aber für einen gewissen Wert m zutrifft, so ist nach (47)

$$|\Phi_\nu(x,y)| \leqq \frac{2c(nA)^{m+1}x^m}{m!},$$

und der Hilfssatz für $k = m$, $l = 0$, angewandt auf die Differentialgleichung (45), lehrt dann:

$$|u_\nu| \leqq \frac{2c(nA)^{m+1}x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Damit ist aber die Ungleichung (48) für alle m bewiesen. Aus ihr folgt sofort, indem man zur Grenze $m \to \infty$ übergeht: $u_\lambda = 0$. Daher ist $\zeta_\lambda = z_\lambda$, womit die Einzigkeit des Integralsystems bewiesen ist.

§ 4.

Ausdehnung auf ein allgemeineres System.

Satz 2. *Bei dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(x, y) \frac{\partial z_\mu}{\partial y} + g_\nu(x, y, z_1, \ldots, z_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

seien die Funktionen

$$f_{\nu\mu}, \quad \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f_{\nu\mu}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f_{\nu\mu}}{\partial y^2},$$

$$g_\nu, \quad \frac{\partial g_\nu}{\partial y}, \quad \frac{\partial g_\nu}{\partial z_\lambda}, \quad \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial y \partial z_\lambda}, \quad \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial z_\lambda \partial z_\mu}$$

in dem Bereich

$$(B_3) \qquad 0 \leqq x \leqq a, \quad |y| \leqq b, \quad |z_\nu| \leqq c,$$

wo a, b, c positive Konstanten sind, stetig. Ferner seien die Wurzeln $F_1(x, y), \ldots, F_n(x, y)$ der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} f_{11} - F & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} - F \end{vmatrix} = 0$$

reell und voneinander verschieden, und es sei

$$|F_\nu(x, y)| \leqq K \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Unter diesen Voraussetzungen hat das Differentialgleichungssystem in dem Bereich

$$(B_4) \qquad 0 \leqq x \leqq a', \quad |y| + Kx \leqq b,$$

wo a' eine (von den $f_{\nu\mu}$ und g_ν abhängige) positive Konstante ist, ein und nur ein System von Integralen z_ν, die für $x = 0$ verschwinden und für die $|z_\nu| \leqq c$ ist.

Für den Fall, daß die Funktionen g_ν in bezug auf $z_1, \ldots, z_n$ linear sind, ist dieser Satz bereits von Holmgren bewiesen worden[6]). Unser auf den Satz 1 gestützter Beweis unterscheidet sich von dem Holmgrenschen nur in der formaleu Durchführung, ist aber im Prinzip nicht wesentlich

[6]) E. Holmgren, Sur les systèmes linéares aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes à caractéristiques réelles et distinctes, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 5 (1909), p. 1–13.

verschieden. Bei dem Satz mag es zunächst vielleicht unbefriedigend erscheinen, daß die Reellität der Wurzeln der charakteristischen Gleichung vorausgesetzt wird. Gleichwohl ist aber diese Voraussetzung nicht nur für unsern Beweisgang, sondern überhaupt für die Gültigkeit des Satzes unerläßlich, wie das dritte Beispiel in § 1 zeigt, wo für $a < 0$ die Wurzeln imaginär sind. Auch gleiche Wurzeln würden die Gültigkeit des Satzes stören, wie ebenfalls das dritte Beispiel lehrt (für $a = 0$), ebenso auch das zweite Beispiel.

Der Beweis von Satz 2 gelingt leicht durch Zurückführung auf Satz 1. Auf Grund der Voraussetzungen von Satz 2 sind nämlich die Funktionen

$$F_\nu(x, y), \qquad \frac{\partial F_\nu(x, y)}{\partial y}$$

im Bereich $0 \leqq x \leqq a$, $|y| \leqq b$ stetig. Ferner gibt es eine Matrix

$$\begin{pmatrix} P_{11} \dots P_{1n} \\ \dots\dots \\ P_{n1} \dots P_{nn} \end{pmatrix}$$

mit nicht verschwindender Determinante, derart, daß

$$\begin{pmatrix} P_{11} \dots P_{1n} \\ \dots\dots \\ P_{n1} \dots P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} \dots f_{1n} \\ \dots\dots \\ f_{n1} \dots f_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \dots 0 \\ \dots\dots \\ 0 \dots F_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} \dots P_{1n} \\ \dots\dots \\ P_{n1} \dots P_{nn} \end{pmatrix}$$

ist, also

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{\lambda\nu} f_{\nu\mu} = F_\lambda P_{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n). \tag{49}$$

Dabei sind die Funktionen von x, y

$$P_{\lambda\nu}, \quad \frac{\partial P_{\lambda\nu}}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_{\lambda\nu}}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 P_{\lambda\nu}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 P_{\lambda\nu}}{\partial y^2}$$

im Bereich $0 \leqq x \leqq a$, $|y| \leqq b$ stetig.

Führt man nun an Stelle der Unbekannten $z_1, \dots, z_n$ die neuen Unbekannten $u_1, \dots, u_n$ ein, indem man

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{\lambda\nu} z_\nu = u_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n) \tag{50}$$

setzt, woraus durch Umkehrung (die Determinante der $P_{\lambda\nu}$ ist ja $\neq 0$) etwa

$$z_\nu = \sum_{\lambda=1}^{n} Q_{\nu\lambda} u_\lambda \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n) \tag{51}$$

folgen mag, so ist das Differentialgleichungssystem von Satz 2 leicht umzurechnen. Zunächst ist nach (50)

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{n} P_{\lambda\nu} \frac{\partial z_\nu}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial P_{\lambda\nu}}{\partial x} z_\nu$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} P_{\lambda\nu} \left(\sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu} \frac{\partial z_\mu}{\partial y} + g_\nu \right) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial P_{\lambda\nu}}{\partial x} z_\nu$$

und also mit Rücksicht auf (49)

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial x} = \sum_{\mu=1}^{n} F_\lambda P_{\lambda\mu} \frac{\partial z_\mu}{\partial y} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(P_{\lambda\nu} g_\nu + \frac{\partial P_{\lambda\nu}}{\partial x} z_\nu \right).$$

Außerdem ist auch nach (50)

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial y} = \sum_{\mu=1}^{n} P_{\lambda\mu} \frac{\partial z_\mu}{\partial y} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial P_{\lambda\nu}}{\partial y} z_\nu .$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt aber

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial x} = F_\lambda \frac{\partial u_\lambda}{\partial y} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(P_{\lambda\nu} g_\nu + \frac{\partial P_{\lambda\nu}}{\partial x} z_\nu - F_\lambda \frac{\partial P_{\lambda\nu}}{\partial y} z_\nu \right). \tag{52}$$

Das ist nun, wenn rechts für z_ν die Ausdrücke (51) eingesetzt werden (auch innerhalb $g_1, \ldots, g_n$), das umgerechnete Differentialgleichungssystem. Umgekehrt läßt sich natürlich aus (52) auch wieder das ursprüngliche in Satz 2 auftretende System herleiten, so daß beide Systeme völlig gleichbedeutend sind.

Auf das System (52) kann man aber den Satz 1 anwenden. Damit ist auch der Satz 2 bewiesen, und zwar ergibt sich eine zulässige Schranke a' auf folgende Weise. Ist M eine obere Schranke für die absoluten Beträge der Funktionen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(P_{\lambda\nu} g_\nu + \frac{\partial P_{\lambda\nu}}{\partial x} z_\nu - F_\lambda \frac{\partial P_{\lambda\nu}}{\partial y} z_\nu \right)$$

im Bereich (B_3), so ist nach Satz 1: $|u_\lambda| \leqq Mx$; also wenn N eine obere Schranke der Funktionen $|Q_{\nu\lambda}|$ im Bereich $0 \leqq x \leqq a$, $|y| \leqq b$ ist, nach (51):

$$|z_\nu| \leqq nNMx.$$

Da in Satz 2 für $|z_\nu|$ nur die Forderung $|z_\nu| \leqq c$ besteht, so genügt es also, x derart zu beschränken, daß $nNMx \leqq c$ und natürlich auch $0 \leqq x \leqq a$ ist. In Satz 2 darf daher

$$a' = \operatorname{Min}\left(a, \frac{c}{nNM}\right)$$

gesetzt werden.

(Eingegangen am 25. März 1927.)

Some properties of fractional integrals. I.

Von

G. H. Hardy in Oxford und J. E. Littlewood in Cambridge.

1. Introduction.

1.1. In this memoir we present the first systematic treatment of certain theorems some of which we enunciated in a short note published in 1924 [1]). Our theme is the properties of the "Riemann-Liouville" integrals and derivatives of arbitrary order of functions of certain standard classes, in particular the "Lebesgue classes L^p", the "Lipschitz classes Lip. k", and the more general classes of functions which satisfy "integrated Lipschitz conditions". We shall give the formal definitions of these classes in a moment.

Our arguments in this memoir are entirely "real" and direct. Our results have many interesting applications to the theory of analytic functions and the theory of Fourier series; but we make no use of these theories here, our only weapons being elementary inequalities and the ordinary methods of the theory of functions of a real variable. It seems clear indeed that the "right" proofs of all the theorems which we prove here are of this "elementary" character. All our variables and functions are accordingly real.

1.2. We say (following F. Riesz [2])) that $f(x)$ belongs to the class L^p, where $p \geqq 1$, in a finite interval (a, b), if $f(x)$ and $|f(x)|^p$ are integrable in (a, b) in the sense of Lebesgue. The class L^1 or L is the class of integrable functions.

We say that $f(x)$ belongs to the class Lip. k, where $0 \leqq k \leqq 1$, in (a, b) if

$$f(x) - f(x-h) = O(h^k)$$

[1]) Hardy and Littlewood, 4.

[2]) F. Riesz, 11.

uniformly for $a \leqq x - h < x \leqq b$; and to the class Lip * k if

$$f(x) - f(x-h) = o(|h|^k)$$

when $h \to 0$, uniformly in x. Thus the class Lip.* 0 is the class of continuous functions.

We say that $f(x)$ belongs to the class Lip. (k, p) where $p \geqq 1$, $0 \leqq k \leqq 1$, in (a, b), if $f(x)$ belongs to L in an interval including (a, b) in its interior, and

$$\int_a^b |f(x) - f(x-h)|^p \, dx = O(|h|^{kp}): \tag{1.21}$$

and to the class Lip.* (k, p) if it satisfies the analogous equation with o.

If $f(x)$ belongs to Lip. (k, p) it necessarity belongs to L^p. For if we select a (small) positive h and write

$$\Phi_h = \Phi_h(x) = \frac{1}{h}\int_0^h f(x-u)\, du$$

we have

$$f - \Phi_h = \frac{1}{h}\int_0^h (f(x) - f(x-u))\, du.$$

Hence, by Hölder's inequality,

$$|f - \Phi_h|^p \leqq \frac{1}{h}\int_0^h |f(x) - f(x-u)|^p \, du,$$

$$\int_a^b |f - \Phi_h|^p \, dx \leqq \frac{1}{h}\int_0^h du \int_a^b |f(x) - f(x-u)|^p \, dx < \frac{A}{h}\int_0^h u^{kp}\, du < A,$$

where the A's are constants; and the result follows, since Φ_h is continous.

The "α-th integral" $f_\alpha(x)$ of $f(x)$, where α is any positive number and $f(x)$ any function of L, was defined by Liouville and Riemann[3]) by the equation

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt. \tag{1.22}$$

This agrees with the ordinary definition when α is a positive integer[4]).

[3]) Liouville, 8; Riemann, 10; naturally for less general f.

[4]) See for example Jordan, 7.

The derivatives $f^{\beta}(x)$ or $D^{\beta}f(x)$ may then be defined for $0<\beta<1$ by

$$f^{\beta}(x)=\frac{d}{dx}f_{1-\beta}(x),$$

and for larger values of β by further differentiations.

We may call these integrals and derivatives "right-handed" integrals and derivatives "with origin a". It is obvious that we may equally define, for example, a "left-handed" integral "with origin b". All the theorems which we prove in one case will apply, with the obvious changes, to the other. But it is plain that the differences between integrals, whether right or left-handed, with different origins, though not of importance for our purposes here, are not entirely trivial.

In applications, we are usually concerned with *periodic* functions; and it was observed by Weyl[5]) that the definitions just given, attaching as they do a particular rôle to the origin a, are not altogether appropriate in this case. Weyl pointed out that, if we suppose (as we may do without real loss of generality[6]) that the mean value of $f(x)$ over a period is zero, then (1.22) converges (at $t=x$) or diverges with

$$(1.23)\qquad f_a^*(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt,$$

and used this as the definition of the α-th integral. We use both definitions here. Up to § 5.5 inclusive we distinguish the two and state our theorems for both. By this time it has become plain that the distinction is not important for our purposes, and we follow Weyl's definition as the easier to work with and the more appropriate for the ends which we have in view.

1.3. If $f(x)$ is integrable, $f_a(x)$ exists, for any $\alpha>0$, for almost all x, and is integrable. Our first object is to determine the Lebesgue class to which $f_a(x)$ necessarily belongs when $f(x)$ belongs to L^p. Our principal result (Theorem 4) shews that if $p>1$ and $0<\alpha<\frac{1}{p}$ then $f_a(x)$ belongs to $L^{\frac{p}{1-p\alpha}}$. This theorem is deduced from a theorem (Theorem 3) concerning the convergence of double integrals of the type

$$\iint\frac{f(x)\,g(y)}{|x-y|^{\lambda}}\,dx\,dy$$

which is very interesting in itself.

---

[5]) Weyl, 18.

[6]) Subtracting a constant from $f(x)$.

We prove these theorems in § 3, § 2 being devoted to the corresponding theorems for series, from which the integral theorems are deduced by passages to the limit. The theorems of § 2 are due to Pólya and ourselves jointly, and a good deal of § 2 is substantially a reproduction of part of a joint memoir published in the *Proceedings of the London Mathematical Society*[7]). We have inserted this section partly because (using a suggestion of M. Riesz) we are able to simplify the proof of Theorem 1 to a certain extent, but more because these theorems are the real origin of the most interesting part of the memoir, and we have thought it worth while to make the memoir a whole in itself at the cost of a little repetition. In § 4 we give a series of generalisations of the results of § 3. These involve no new difficulty of idea, but it seems worth while to develop Theorems 3 and 4 to their fullest extent.

In § 5 we pass to functions of the Lipschitz classes. Theorem 4 ceases to be significant when $\alpha > \frac{1}{p}$, and the result which replaces it (Theorem 12) is that $f_\alpha(x)$ belongs to the Lipschitz class Lip.* $\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)$. In Theorem 14 we suppose that $f(x)$ itself belongs to a Lipschitz class of order k, and prove (what is to be expected) that, so long as $k + \alpha < 1$, $f_\alpha(x)$ belongs to the class of order $k + \alpha$. Theorem 19 is a very interesting theorem of Weyl[8]), to which we add a complement in Theorem 20. The remaining theorems of this section are subsidiary. The general lesson of the latter theorems of the section is that to belong to a Lipschitz class of order k is nearly, though not quite, the same thing as to have continuous derivatives of all orders less than k.

Finally, in § 6 we consider the corresponding questions for the generalised Lipschitz classes Lip. (k, p), the general lesson being that to belong to such a class is nearly, though not quite, the same thing as to possess derivatives, belonging to L^p, of all orders less than k.

2. Theorems concerning series.

2.1. Theorem 1. *Suppose that*

$$S = \sum_{m,n=-h}^{h} c_{m-n}\, a_m\, b_n ,$$

where

$$c_\nu = c_{-\nu}, \qquad c_0 \geqq c_1 \geqq c_2 \geqq \ldots ,$$

and the a's and b's are positive (in the wider sense) and given in every

---

[7]) Hardy, Littlewood, Pólya, 6.

[8]) Weyl, 8.

respect except arrangement. Then, among the arrangements for which S assumes its maximum value, there is one in which

$$a_m - a_{m'} \geqq 0, \quad b_n - b_{n'} \geqq 0 \tag{2.11}$$

whenever

$$|m| < |m'|, \quad |n| < |n'|, \tag{2.12}$$

and all of

$$a_{-m} - a_m, \quad b_{-n} - b_n \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.13}$$

have the same sign.

It is convenient to regard the summations as extended over all integral values, all but a finite number of the a's and b's being zero.

Given any integer p, we can associate the a's and b's either in pairs

$$(a_{p-i}, a_{p+i}), \qquad (b_{p-j}, b_{p+j}) \qquad (i, j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.14}$$

or in pairs

$$(a_{p-i}, a_{p+i+1}), \quad (b_{p-j}, b_{p+j+1}) \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.15}$$

In the first case the elements a_p and b_p are unpaired, and the pairs include, for appropriate p, i, j, any pair of elements the difference of whose rank is even. In the second case all pairs with odd difference of rank occur for appropriate p, i, j. Our argument applies to either case, but is slightly simpler in expression in the second (since no element is unpaired). We therefore write it out in the first case; and we may suppose, for reasons of symmetry, that $p \geqq 0$, so that

$$|p - i| \leqq |p + i|, \quad |p - j| \leqq |p + j|.$$

We denote by I or J a value of i or j for which $a_{p-I} < a_{p+I}$ or $b_{p-J} < b_{p+J}$. We shall prove that there is a maximum arrangement in which, whatever p, there are no I's or J's; and it is plainly sufficient to show that, whatever p, the value of S is not diminished by the substitution Ω_p defined by the permutation of every pair

$$(a_{p-I}, a_{p+I}), \quad (b_{p-J}, b_{p+J}).$$

We divide up S into the following partial sums:

(1) S_1: $m = p$; $n = p$.

(2) S_2: $m = p$; $n = p - j,\ p + j \ (j \neq J)$.

(3) S_3: $m = p - i,\ p + i \ (i \neq I)$; $n = p$.

(4) S_4: $m = p$; $n = p - J,\ p + J$.

(5) S_5: $m = p - I,\ p + I$; $n = p$.

$$(6)\qquad S_6:\ m=p-i,\ p+i\ (i\neq I);\qquad n=p-j,\ p+j\ (j\neq J).$$

$$(7)\qquad S_7:\ m=p-i,\ p+i\ (i\neq I);\qquad n=p-J,\ p+J.$$

$$(8)\qquad S_8:\ m=p-I,\ p+I;\qquad n=p-j,\ p+j\ (j\neq J).$$

$$(9)\qquad S_9:\ m=p-I,\ p+I;\qquad n=p-J,\ p+J.$$

It is evident that S_1, S_2, S_3 and S_6 are not affected by Ω_p. S_4 is

$$a_p\sum_J(c_J\,b_{p-J}+c_{-J}\,b_{p+J}),$$

which is unaltered because $c_J=c_{-J}$. Hence S_4 is unaltered; and similarly S_5 is unaltered. S_9 is

$$\sum_{I,J}(c_{-I+J}\,a_{p-I}\,b_{p-J}+c_{-I-J}\,a_{p-I}\,b_{p+J}+c_{I+J}\,a_{p+I}\,b_{p-J}+c_{I-J}\,a_{p+I}\,b_{p+J}),$$

and is also unaltered. It is therefore sufficient to prove that S_7 and S_8 are not diminished, and plainly we need only prove this for S_7.

In S_7, the contribution of the pair $(a_{p-i},\ a_{p+i})$ is

$$a_{p-i}\sum_J(c_{-i+J}\,b_{p-J}+c_{-i-J}\,b_{p+J})+a_{p+i}\sum_J(c_{i+J}\,b_{p-J}+c_{i-J}\,b_{p+J}).$$

The increment in this produced by Ω_p is

$$-(a_{p-i}-a_{p+i})\sum_J(c_{i-J}-c_{i+J})\,(b_{p-J}-b_{p+J})\geqq 0,$$

since the three brackets are respectively positive, positive and negative.

It follows that there is a maximum arrangement which satisfies the conditions of the theorem, in so far as they concern pairs the difference of whose rank is even. The same argument, based upon the pairing (2.15), leads to the same conclusion for pairs the difference of whose rank is odd[9]); and this proves the theorem. We have in fact proved that there is a maximum arrangement in which all the differences (2.13) are positive or zero; but this adds nothing to what is stated in the theorem, since S is plainly unaltered if m and n are interchanged with $-m$ and $-n$.

2.2. Theorem 2. *If*

$$(2.21)\qquad a_m\geqq 0,\quad b_n\geqq 0,\quad r>1,\quad s>1,\quad \frac{1}{r}+\frac{1}{s}>1$$

and the series

$$(2.22)\qquad A=\sum a_m^r,\qquad B=\sum b_n^s$$

are convergent, then

$$(2.23)\qquad T=\sum{}'\frac{a_m\,b_n}{|m-n|^\lambda}\leqq K\,A^{\frac{1}{r}}\,B^{\frac{1}{s}},$$

---

[9]) In this case the sums $S_1, S_2, \ldots, S_5$ do not occur.

where

$$\lambda = 2 - \frac{1}{r} - \frac{1}{s}, \tag{2.24}$$

$K = K(r, s)$ is a function of r and s only, and the summation extends over all unequal integral values of m and n.

It is obviously sufficient to prove the inequality for

$$T_h = \sum_{m,n=-h}^{h}{}' \frac{a_m b_n}{|m-n|^\lambda}.$$

This form is not as it stands of the type S, but it does not exceed the form S in which

$$c_0 = 1, \quad c_\nu = |\nu|^{-\lambda} \qquad (\nu \neq 0).$$

We may suppose that, in S, the a's and b's are arranged in the most unfavourable manner, defined by Theorem 1. · In this case S does not exceed the sum of four sums of the type

$$S^* = \sum{}' c_{m-n} a_m b_n,$$

where m and n now run from 0 to h and a_m and b_n are decreasing functions of m and n. Further

$$S^* = S_0 + S_1 + S_2,$$

where

$$S_0 = \sum a_m b_m, \qquad S_1 = \sum_{m>n} \frac{a_m b_n}{|m-n|^\lambda},$$

and S_2 is a similar sum over $n > m$. It is therefore sufficient to prove that S_0 and S_1 satisfy inequalities of the type (2.23). It will be convenient to suppose now, as plainly we may, that m and n run from 1 to h only.

We use three known inequalities[10]):

(i) *If $r > 1$, $s > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \geqq 1$ and u_ν and v_ν are positive, then*

$$\sum u_\nu v_\nu \leqq \left(\sum u_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum v_\nu^s\right)^{\frac{1}{s}}.$$

(ii) *If u_ν and v_ν are positive and monotonic, and vary in opposite directions, then*

$$h \sum_{\nu=1}^{h} u_\nu v_\nu \leqq \sum_{\nu=1}^{h} u_\nu \sum_{\nu=1}^{h} v_\nu.$$

---

[10]) For detailed references, see Hardy, Littlewood, Pólya, 6, 274. The first inequality, with $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ (Hölder's inequality), and its analogue for integrals, are of course used repeatedly throughout the memoir.

(iii) *If* $r>1$, u_ν *is positive, and*

$$U_\nu = u_1 + u_2 + \ldots + u_\nu,$$

then

$$\sum_{\nu=1}^{h} \left(\frac{U_\nu}{\nu}\right)^r \leqq \left(\frac{r}{r-1}\right)^r \sum_{\nu=1}^{h} u_\nu^r.$$

The sum S_0 is at once disposed of by (i), and we need only consider S_1. Now

$$S_1 = \sum_{m=2}^{h} a_m \sum_{n=1}^{m-1} \frac{b_n}{(m-n)^\lambda}. \tag{2.25}$$

But $(m-n)^{-\lambda}$ increases with n and b_n decreases. Hence, writing

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = B_n,$$

we have, by (ii),

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{b_n}{(m-n)^\lambda} \leqq \frac{B_{m-1}}{m-1} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{(m-n)^\lambda} \leqq \frac{B_{m-1}}{(1-\lambda)(m-1)^\lambda}.$$

Substituting in (2.25), and applying (i), with

$$r' = \frac{r}{r-1} > s$$

in place of s, we obtain

$$S_1 \leqq \frac{1}{1-\lambda} \sum_{m=2}^{h} a_m \frac{B_{m-1}}{(m-1)^\lambda} \tag{2.26}$$

$$= \frac{1}{1-\lambda} \sum_{m=1}^{h-1} a_{m+1} \frac{B_m}{m^\lambda} \leqq \frac{A^{\frac{1}{r}}}{1-\lambda} \left(\sum_{m=1}^{h} \frac{B_m^{r'}}{m^{\lambda r'}}\right)^{\frac{1}{r'}}.$$

Now $B_m^s \leqq m^{s-1} B$, by (i), with s and s' for r and s.[11]) Hence

$$m^{-\lambda r'} B_m^{r'} \leqq m^{-\lambda r'} B_m^s \left(m^{s-1} B\right)^{\frac{r'-s}{s}} = B^{\frac{r'-s}{s}} \left(\frac{B_m}{m}\right)^s,$$

since

$$-\lambda r' + \frac{(r'-s)(s-1)}{s} = -s.$$

Hence (2.26) gives

$$S_1 \leqq \frac{A^{\frac{1}{r}}}{1-\lambda} B^{\frac{r'-s}{r's}} \left(\sum_{m=1}^{h} \left(\frac{B_m}{m}\right)^s\right)^{\frac{1}{r'}} \leqq \frac{A^{\frac{1}{r}}}{1-\lambda} B^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r'}} \left(\frac{s}{s-1}\right)^{\frac{s}{r'}} B^{\frac{1}{r'}} = K A^{\frac{1}{r}} B^{\frac{1}{s}},$$

by (iii). This proves the theorem.

---

[11]) We use the notation $c' = \frac{c}{c-1}$ generally, when $c>1$.

3. The fundamental theorems for integrals.

3.1. We shall say that $f(x)$ belongs to L^p $(p \geqq 1)$ in (a, ∞), if it belongs to L^p in (a, b) for any finite $b > a$, and

$$\int_a^\infty |f(x)|^p \, dx$$

is convergent. For a finite interval, the class L^p includes the class L^q if $p > q$, but this is not true for an infinite interval.

Theorem 3. *If $f(x)$ and $g(y)$ belong to L^r and L^s respectively in $(0, \infty)$,*

$$f(x) \geqq 0, \quad g(y) \geqq 0, \quad r > 1, \quad s > 1, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} > 1, \tag{3.11}$$

and

$$F = \int_0^\infty f^r(x) \, dx, \qquad G = \int_0^\infty g^s(y) \, dy, \tag{3.12}$$

then

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x) g(y)}{|x-y|^\lambda} \, dx \, dy \leqq K F^{\frac{1}{r}} G^{\frac{1}{s}}, \tag{3.13}$$

λ and K being defined as in Theorem 1[12]).

(i) We suppose first that $f(x)$ and $g(y)$ are zero for $x > \xi$ or $y > \xi$ and continuous in $(0, \xi)$.[13]) We denote the square $0 \leqq x \leqq \xi$, $0 \leqq y \leqq \xi$ by D, and the part of it in which $|x - y| \geqq \varepsilon > 0$ by $D(\varepsilon)$. It is plainly sufficient to prove that

$$J(\varepsilon) = \iint_{D(\varepsilon)} \frac{f(x) g(y)}{|x-y|^\lambda} \, dx \, dy \leqq K F^{\frac{1}{r}} G^{\frac{1}{s}} \tag{3.14}$$

for every ε.

We divide D into squares $D_{m,n}$ by the lines

$$x = x_m = \frac{m\xi}{\nu}, \qquad y = y_n = \frac{n\xi}{\nu} \qquad (0 \leqq m \leqq \nu, \, 0 \leqq n \leqq \nu),$$

calling $D_{m,n}$ the square corresponding to $m-1$, m, $n-1$, n and $D_{m,n}(\varepsilon)$ any $D_{m,n}$ which has a point in common with $D(\varepsilon)$; so that

$$J(\varepsilon) = \lim_{\nu \to \infty} \sum \iint_{D_{m,n}(\varepsilon)} .$$

---

[12]) Hardy and Littlewood **4**, (Theorem 2).

[13]) One-sidedly at the ends.

It is plain that we may suppose ν so large that

$$|m-n| \geqq 2, \quad |x-y| \geqq |m-n| \frac{\xi}{2\nu}$$

at every point of every $D_{m,n}(\varepsilon)$. Also, in $D_{m,n}(\varepsilon)$,

$$f(x)g(y) \leqq f(x_m)g(y_n) + \eta_\nu,$$

where η_ν tends uniformly to 0 when $\nu \to \infty$. It follows that

$$J(\varepsilon) \leqq \overline{\lim} \left(\frac{2\nu}{\xi}\right)^\lambda \sum \iint_{D_{m,n}(\varepsilon)} \frac{f(x_m)g(y_n)+\eta_\nu}{|m-n|^\lambda} dx\, dy.$$

But

$$\overline{\lim} \left(\frac{2\nu}{\xi}\right)^\lambda \sum \iint \frac{\eta_\nu}{|m-n|^\lambda} dx\, dy = 2^\lambda \xi^{2-\lambda} \overline{\lim} \left(\eta_\nu \nu^{\lambda-2} \sum{}' \frac{1}{|m-n|^\lambda}\right)$$
$$\leqq K \xi^{2-\lambda} \overline{\lim}\, \eta_\nu = 0,$$

by Theorem 2. Hence, again using Theorem 2, we obtain

$$J(\varepsilon) \leqq 2^\lambda \overline{\lim} \left(\frac{\xi}{\nu}\right)^{2-\lambda} \sum{}' \frac{f(x_m)g(y_n)}{|m-n|^\lambda}$$
$$\leqq K \overline{\lim} \left(\frac{\xi}{\nu}\right)^{2-\lambda} \left(\sum_1^\nu f^r(x_m)\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_1^\nu g^s(y_n)\right)^{\frac{1}{s}}$$
$$= K \overline{\lim} \left(\frac{\xi}{\nu} \sum_1^\nu f^r(x_m)\right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{\xi}{\nu} \sum_1^\nu g^s(y_n)\right)^{\frac{1}{s}}$$
$$= K F^{\frac{1}{r}} G^{\frac{1}{s}}.$$

This proves (3.14), and therefore (3.13) in the particular case considered.

3.2. (ii) We suppose next that $f(x)$ and $g(y)$ are any functions of L^r and L^s in $(0, \xi)$, and zero outside.

We can determine positive and continuous functions $f^*(x)$ and $g^*(y)$ such that

$$\int f^{*r} dx \leqq 2^r M, \qquad \int g^{*s} dy \leqq 2^s M,$$

$$\int f^* dx \leqq 2 M^{\frac{1}{r}} \xi^{\frac{r-1}{r}}, \quad \int g^* dy \leqq 2 M^{\frac{1}{s}} \xi^{\frac{s-1}{s}},$$

where $M = \mathrm{Max}(F, G)$, so that

$$\int f\, dx \leqq M^{\frac{1}{r}} \xi^{\frac{r-1}{r}}, \quad \int g\, dy \leqq M^{\frac{1}{s}} \xi^{\frac{s-1}{s}};$$

and also

$$\int |f - f^*|\, dx, \quad \int |g - g^*|\, dy, \quad \int |f^r - f^{*r}|\, dx, \quad \int |g^s - g^{*s}|\, dy$$

are all less than a given positive η. We have then

$$\iint_{D(\varepsilon)} \frac{fg}{|x-y|^\lambda}\,dx\,dy \leqq \iint_D \frac{f^*g^*}{|x-y|^\lambda}\,dx\,dy + \iint_{D(\varepsilon)} \frac{|fg-f^*g^*|}{|x-y|^\lambda}\,dx\,dy$$

$$\leqq K\left(\int f^{*r}\,dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int g^{*s}dy\right)^{\frac{1}{s}} + \varepsilon^{-\lambda}\iint_{D(\varepsilon)} |fg-f^*g^*|\,dx\,dy$$

$$\leqq K\left(\int f^r\,dx+\eta\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int g^s\,dy+\eta\right)^{\frac{1}{s}} + \varepsilon^{-\lambda}\iint_D (g|f-f^*|+f^*|g-g^*|)\,dx\,dy$$

$$\leqq K\left(\int f^r\,dx+\eta\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int g^s\,dy+\eta\right)^{\frac{1}{s}} + 2\eta\varepsilon^{-\lambda}\left(M^{\frac{1}{r}}\xi^{\frac{r-1}{r}} + M^{\frac{1}{s}}\xi^{\frac{s-1}{s}}\right).$$

Making $\eta \to 0$, we obtain (3.14) and so (3.13).

(iii) The final result of the theorem now follows in the obvious manner by making $\xi \to \infty$.

3.3. Theorem 4. *Suppose that $f(x)$ belongs to L^p, where $p>1$, in (a,b), where $-\infty < a < b \leqq \infty$; that*

$$0<\alpha<\frac{1}{p}, \qquad q=\frac{p}{1-p\alpha}; \tag{3.31}$$

and that $f_a(x)$ is the α-th integral of $f(x)$, with origin a. Then $f_a(x)$ belongs to L^q in (a,b); and

$$\int_a^b |f_a(x)|^q\,dx \leqq K\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}}, \tag{3.32}$$

where $K=K(p,\alpha)$ is a function of p and α only.

It is evident, first, that we may suppose without real loss of generality that $f \geqq 0$.

Next, we may suppose that $b=\infty$. For suppose that the theorem has been proved in this case, that f satisfies the conditions of the theorem, and that f^* is equal to f in (a,b) and to 0 outside this interval. Then f^* belongs to L^p in (a,∞), and

$$\int_a^b f_a^q\,dx = \int_a^b f_a^{*q}\,dx \leqq \int_a^\infty f_a^{*q}\,dx \leqq K\left(\int_a^\infty f^{*p}\,dx\right)^{\frac{q}{p}} = K\left(\int_a^b f^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Finally, we may obviously suppose that $a=0$.

In order that

$$\int_0^\infty f_a^q\,dx \leqq K\left(\int_0^\infty f^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}},$$

it is necessary and sufficient that

$$\int_0^\infty f_\alpha(y)\,g(y)\,dy \leqq K\Big(\int_0^\infty f^p(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^\infty g^{q'}(y)\,dy\Big)^{\frac{1}{q'}}$$

for every $g(y)$ of $L^{q'}$.[14]) But the left hand side here is

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty g(y)\,dy\int_0^y f(x)(y-x)^{\alpha-1}\,dx \leqq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{|x-y|^\lambda}\,dx\,dy$$

$$\leqq K\Big(\int_0^\infty f^p(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^\infty g^{q'}(y)\,dy\Big)^{\frac{1}{q'}},$$

by Theorem 3, with

$$r=p>1, \qquad s=q'>1, \qquad \lambda=2-\frac{1}{p}-\frac{1}{q'}=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1-\alpha,$$

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1+\alpha>1.$$

3.4. Theorem 5. *The result of Theorem* 4 *is also true when* $a=0$, $b=2\pi$, $f(x)$ *has period* 2π *and mean value* 0, *and the origin of integration is* $-\infty$.

We write

$$(3.41)\qquad f_\alpha(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x} f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{-2\pi}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-2\pi}^{x}$$

$$=\varphi(x)+\psi(x).$$

By Theorem 4, $\psi(x)$ belongs to L^q and

$$(3.42)\qquad \int_0^{2\pi}|\psi|^q dx \leqq \int_{-2\pi}^{2\pi}|\psi|^q\,dx \leqq K\Big(\int_{-2\pi}^{2\pi}|f|^p\,dx\Big)^{\frac{q}{p}} \leqq K\Big(\int_0^{2\pi}|f|^p\,dx\Big)^{\frac{q}{p}}.$$

On the other hand $\varphi(x)$ is continous in $(0,2\pi)$, the integral which defines it being uniformly convergent; and, by the second mean value theorem, there is a $\xi<-2\pi$ such that

$$(3.43)\qquad |\varphi(x)|=\Big|\frac{(x+2\pi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_\xi^{-2\pi} f(t)\,dt\Big|$$

$$\leqq \frac{K}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|\,dt \leqq K\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\,dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

The conclusion follows from (3.41), (3.42) and (3.43).

---

[14]) F. Riesz, 11. The K here is not the same K (actually it is the q-th root of the earlier K).

It should be noticed that the conclusion of Theorem 4 is not necessarily true when the origin of integration is $c < a$ (the reason being naturally that f does not necessarily belong to L^p in (c, a)). For example, if

$$f(x) = (a-x)^{-\beta} \quad (x < a), \qquad f(x) = 0 \quad (x \geqq a),$$

and $c < a$, $0 < \alpha < \beta < 1$, then $f_\alpha(x)$ differs from

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{a} (a-t)^{-\beta} (x-t)^{\alpha-1} dt$$

by a continuous function. This is a multiple of $(x-a)^{\alpha-\beta}$, and does not belong to L^q in (a, b) if $q(\beta - \alpha) \geqq 1$, although f is zero in (a, b).

3. 5. Before going further we show by examples that the inequalities which occur as conditions in Theorems 3 and 4 cannot be widened.

(i) Theorem 3 is not true when $p > 1$, $q > 1$, and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. In fact the integral (3.13) is then divergent if $f = g = 1$ in the square $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ and $f = g = 0$ outside. What takes the place of Theorem 3 in this case is M. Riesz's theorem that

$$\iint \frac{f(x)\, g(y)}{x-y} dx\, dy$$

is convergent as a "principal value", *i. e.* as the limit of an integral over $D(\varepsilon)$.[15])

(ii) Theorem 3 is not true when $p = 1$, $q > 1$. For then it would imply that

$$\int_0^\infty f(x)\, dx \int_0^x \frac{g(y)}{(x-y)^{1-\frac{1}{q}}} dy$$

converges whenever f belongs to L and g to L^q. This would imply that

$$\int_0^x \frac{g(y)}{(x-y)^{1-\frac{1}{q}}} dy$$

is, for every g of L^q, a bounded function of x; and this is false, since

$$\int_0^x \left(\frac{1}{(x-y)^{1-\frac{1}{q}}} \right)^{\frac{q}{q-1}} dy = \int_0^x \frac{dy}{x-y}$$

is divergent.

On the other hand the theorem is true (and trivial) when $p = 1$, $q = 1$.

---

[15]) See M. Riesz, **12, 13**; Titchmarsh, **16**.

(iii) Theorem 4 is not true when $p=1$, for any α between 0 and 1. Take

$$f(x)=x^{-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\beta}$$

where $\beta>1$, for $0<x\leqq\frac{1}{2}$, and $f(x)=0$ otherwise. Then f belongs to L. For small positive x, we have

$$f_\alpha(x)>K\int_0^x\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{t\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\beta}}\,dt>Kx^{\alpha-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{1-\beta}.$$

Hence f_α does not belong to $L^{\frac{1}{1-\alpha}}$ unless

$$\frac{1-\beta}{1-\alpha}<-1,\qquad \beta>2-\alpha,$$

which is more than $\beta>1$.

It is true that, when $p=1$, f_α *belongs to*

$$L^{\frac{p}{1-p\alpha}-\varepsilon}$$

for every positive ε. This theorem, which lies much less deep than Theorem 4, is in fact a simple corollary of an inequality of Young[16]).

(iv) A theorem which suggests itself naturally, as a limiting case of Theorem 4 in which $\alpha=\frac{1}{p}$, $q=\infty$, is this: *if* $p>1$ *and* $\alpha=\frac{1}{p}$, *then* $f_\alpha(x)$ *is bounded*. This proposition is false. If it were true, it would follow that

$$\int_0^a f_\alpha(x)\,g(x)\,dx=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^a g(x)\,dx\int_0^x f(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^a f(t)\,dt\int_t^a g(x)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dx$$

exists whenever f belongs to L^p and g to L; and so that

$$\int_t^a g(x)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dx$$

belongs to $L^{p'}$, *i. e.* to $L^{\frac{1}{1-\alpha}}$, whenever g belongs to L. This assertion is plainly equivalent[17]) to the assertion of Theorem 4 in the case $p=1$, when we have seen that it is false.

---

[16]) For a proof see Hardy, 2.

[17]) Allowing for the reversal of the "direction of integration".

4. Generalisations of the theorems of § 3.

4.1. Theorem 6. *If $f(x)$ and $g(y)$ satisfy the conditions of Theorem 3, and*

$$r>1, \quad s>1, \quad \frac{1}{r}+\frac{1}{s}\geqq 1, \tag{4.11}$$

$$h<1-\frac{1}{r}, \quad k<1-\frac{1}{s}, \quad h+k\geqq 0, \tag{4.12}$$

$$h+k>0 \quad \text{if} \quad \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1, \tag{4.13}$$

then

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{x^h y^k\,|x-y|^{\lambda-h-k}}\,dx\,dy<K F^{\frac{1}{r}} G^{\frac{1}{s}}, \tag{4.14}$$

$K=K(r,s,h,k)$ being now a function of r,s,h,k only.

(i) Suppose first that $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}>1$, so that $0<\lambda<1$. Then Theorem 5 is a corollary of Theorem 3. For we may divide the quarter-plane of integration into an angle A in which $\frac{1}{2}x\leqq y\leqq 2x$ and two residual angles A'. In A', $\frac{x}{|x-y|}$ and $\frac{y}{|x-y|}$ lie between positive bounds, and in A

$$x^h y^k\geqq K\,|x-y|^{h+k}.$$

Thus the integral (4.14) does not exceed a constant multiple of the integral (3.13).

(ii) We may therefore suppose that $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, $\lambda=1$. If

$$\Omega(x,y)=x^{-h}y^{-k}\,|x-y|^{h+k-1}$$

then the integrals

$$\int_0^\infty \Omega(u,1)\,u^{-\frac{1}{r}}\,du=\int_0^\infty u^{-h-\frac{1}{r}}\,|u-1|^{h+k-1}\,du,$$

$$\int_0^\infty \Omega(1,v)\,v^{-\frac{1}{s}}\,dv=\int_0^\infty v^{-k-\frac{1}{s}}\,|1-v|^{h+k-1}\,dv$$

converge to the common value

$$J=\frac{\pi\Gamma(h+k)}{\Gamma\left(1+h-\frac{1}{r}\right)\Gamma\left(1+k-\frac{1}{s}\right)}\left(\frac{1}{\sin\left(h+\frac{1}{r}\right)\pi}+\frac{1}{\sin\left(k+\frac{1}{s}\right)\pi}\right).^{18})$$

---

18) This expression must be replaced by its limiting value if $h+\frac{1}{r}$ or $k+\frac{1}{s}$ is zero or a negative integer.

And

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x)\,g(y)\,\Omega(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty\int_0^\infty \left(f(x)\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{rs}}\Omega^{\frac{1}{r}}\cdot g(y)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{rs}}\Omega^{\frac{1}{s}}\right)dx\,dy$$

$$\leqq \left[\int_0^\infty f^r\,dx\int_0^\infty\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{s}}\Omega\,dy\right]^{\frac{1}{r}}\left[\int_0^\infty g^s\,dy\int_0^\infty\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{r}}\Omega\,dx\right]^{\frac{1}{s}}$$

$$= J\left(\int_0^\infty f^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^\infty g^s\,dy\right)^{\frac{1}{s}};$$

which completes the proof of the theorem.

4.2. When $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, the constant J is the "best possible" constant. We do not delay to prove this, but we show that the inequalities (4.12) and (4.13) for h and k are best possible inequalities.

In the first place, it is essential that $h<1-\frac{1}{r}$ and $k<1-\frac{1}{s}$. If $h=1-\frac{1}{r}$, for example, there are functions of L^r for which

$$\int_0^\infty x^{-h}f(x)\,dx$$

diverges, and then the double integral is certainly divergent.

Next, it is essential that $\lambda-h-k<1$ $\left(\text{and so } h+k>0 \text{ if } \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1\right)$; for otherwise the integral may diverge (along the line $x=y$) even for continuous f and g.

It is less obvious that $h+k$ must not be negative when $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}>1$.[19] Suppose however that

$$f(x)=(\log x)^{-\frac{1}{r}-\delta} \qquad (\delta>0,\ 2^m\leqq x\leqq 2^m+1,\ m=1,2,\ldots)$$

and $f(x)=0$ otherwise, and that $g(y)$ is defined in a similar manner with $-\frac{1}{s}-\delta$; so that $f(x)\,g(y)=0$ outside the strip $|x-y|\leqq 2$. Then

$$\int_0^\infty f^r\,dx < K\sum_1^\infty{}' m^{-1-r\delta},$$

so that F is convergent. Similarly G is convergent. The double integral, on the other hand, is plainly greater than

$$K\sum_1^\infty{}'(2^m)^{-h-k}\,m^{-\frac{1}{r}-\frac{1}{s}-2\delta},$$

which is divergent if $h+k<0$.

[19] It might be supposed that $h+k>\lambda-1$ would be sufficient.

4.3. Theorem 7. *Suppose that*

$$p > 1, \quad l > \frac{1}{p} - 1, \tag{4.31}$$

$$0 \leqq m - l \leqq \alpha < \operatorname{Min}\left(m - l + \frac{1}{p}, -l + \frac{1}{p}\right), \tag{4.32}$$

$$m - l > 0 \quad \text{if} \quad \alpha = m - l, \tag{4.33}$$

$$q = \frac{p}{1 - p(\alpha + l - m)}, \tag{4.34}$$

that $x^{-l} f(x)$ *belongs to* L^p *in* $(0, \infty)$, *and that* $f_\alpha(x)$ *is the* α*-th integral of* $f(x)$ *with origin* 0. *Then* $x^{-m} f_\alpha(x)$ *belongs to* L^q, *and*

$$\int_0^\infty (x^{-m} f_\alpha(x))^q \, dx \leqq K \left(\int_0^\infty (x^{-l} f(x))^p \, dx \right)^{\frac{q}{p}}. \tag{4.35}$$

where $K = K(p, \alpha, l, m)$.

It follows from Theorem 6 that, if f belongs to L^r and g to L^s, then

$$\int_0^\infty f(x) \varphi(x) \, dx,$$

where

$$\varphi(x) = x^{-h} \int_0^x g(y) y^{-k} (x - y)^{h+k-\lambda} \, dy,$$

is convergent (and satisfies the appropriate inequality). If now we replace $y^{-k} g$ by G, and argue as in the proof of Theorem 4, we obtain

$$\int_0^\infty (x^{-h} G_{h+k-\lambda+1})^{r'} \, dx \leqq K \left(\int_0^\infty (x^k G)^s \, dx \right)^{\frac{r'}{s}}.$$

We now write

$$G = f, \quad h = m, \quad k = -l, \quad s = p, \quad \alpha = h + k - \lambda + 1,$$

so that

$$r' = \frac{p}{1 - p(\alpha + l - m)} = q,$$

and we obtain (4.35).

It remains to verify that the conditions of Theorem 7 are equivalent to those of Theorem 6. Of the former

$$p > 1, \quad l > \frac{1}{p} - 1, \quad 0 \leqq m - l, \quad m - l \leqq \alpha$$

are equivalent to

$$s > 1, \quad k < 1 - \frac{1}{s}, \quad h + k \geqq 0, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \geqq 1$$

(the glosses on the last pairs of inequalities also corresponding). Finally $\alpha < -l + \frac{1}{p}$ corresponds to $h < 1 - \frac{1}{r}$, and $\alpha < m - l + \frac{1}{p}$ corresponds to $r > 1$, since it is $1 - \frac{1}{r'} < 1$ or $\frac{1}{r} < 1$ and the preceding inequalities show that r is positive.

4.4. Theorem 4 is the special case $l = m = 0$ of Theorem 7. There are other interesting special cases, but two remarks are called for before we state them.

The inequalities of Theorem 7 are, essentially, best possible inequalities like those of Theorem 6. The "gloss" (4.33) on the inequalities, however, now excludes a case, viz. $\alpha = 0$, $l = m$, $p = q$, in which the result of the theorem is true but trivial (the two integrals in the inequality being identical). The gloss corresponds to the fact that the definition of f_α fails when $\alpha = 0$, though

$$\lim_{\alpha \to 0} f_\alpha(x) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}\, dt = f(x)$$

for almost all x. In our statement of the particular cases we therefore suppress the gloss.

Next we observe that some of our specialisations introduce the combination

$$\Gamma(\alpha) x^{-\alpha} f_\alpha(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} f(t)\, dt.$$

This function is plainly, for fixed $f(t)$ and x, a decreasing function of α and we are thus sometimes able to extend the scope of a theorem, by the removal of an upper bound for α, in spite of the fact that the argument by which it was proved depends upon what were, in their original form, "best possible" inequalities.

4.5. Taking $l = 0$ in Theorem 7, we obtain

Theorem 8. *If*

$$p > 1, \quad 0 \leqq m \leqq \alpha < \frac{1}{p}, \quad q = \frac{p}{1 - p(\alpha - m)},$$

then

$$\int_0^\infty (x^{-m} f_\alpha)^q\, dx \leqq K \left(\int_0^\infty f^p\, dx \right)^{\frac{q}{p}}.$$

Restating this in a slightly different notation, and using the last remark of § 4.4, we obtain

Theorem 9. *If*

$$p > 1, \quad 0 \leqq \alpha < \frac{1}{p}, \quad p \leqq q \leqq \frac{p}{1-p\alpha},$$

then

$$\int_0^\infty x^{\frac{p-q+pq\alpha}{p}} f_\alpha^q \, dx \leqq K\left(\int_0^\infty f^p \, dx\right)^{\frac{q}{p}}.$$

The result is still true for $\alpha \geqq \frac{1}{p}$, *when the second inequality for* q *may be omitted.*

If we put $m = l + \alpha$ in Theorem 7 and (after the last remark of § 4.4) drop the upper bound for α, we obtain

Theorem 10. *If*

$$p > 1, \quad l > \frac{1}{p} - 1, \quad \alpha \geqq 0,$$

then

$$\int_0^\infty (x^{-l-\alpha} f_\alpha)^p \, dx \leqq K \int_0^\infty (x^{-l} f)^p \, dx.$$

If we put $l = 0$ in Theorem 10, or $m = \alpha$ in Theorem 8, we obtain

Theorem 11. *If* $p > 1$, $\alpha \geqq 0$, *then*

$$\int_0^\infty (x^{-\alpha} f_\alpha)^p \, dx \leqq K \int_0^\infty f^p \, dx.$$

4.6. We shall not give a formal proof that all the inequalities which occur as conditions in Theorems 7—11 are best possible inequalities. The following examples will probably be sufficient to convince the reader that this is so.

(i) The result of Theorem 9 is (sometimes) false if $q < p$ or

$$q > \frac{p}{1-p\alpha}.$$

(a) Suppose that $\varrho > 0$, that

$$f(x) = x^{-\frac{1}{p}} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-\varrho}$$

if $0 < x \leqq \frac{1}{2}$, and that $f(x) = 0$ otherwise. Then

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{-\frac{1}{p}} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{-\varrho} dt > K x^{\alpha-\frac{1}{p}} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-\varrho}$$

for small x. The right hand side of (4.35) is convergent if $p\varrho > 1$, the left hand side only if $q\varrho > 1$. Hence the result cannot be true unless $q \geqq p$.

(b) Suppose that $f(x)=\frac{1}{\log x}$ if $2^m \leqq x \leqq 2^m+1$, $m=1,2,\ldots$, and that $f(x)=0$ otherwise. Then the right hand side of (4.35) is convergent, since $\sum m^{-p}$ is convergent. If now $2^m+\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2^m+1$, we have

$$f_\alpha(x) > K \int_{2^m}^{2^m+\frac{1}{2}} f(t)\,dt > \frac{K}{m}.$$

Thus the convergence of the left hand side implies the convergence of

$$\sum m^{-q} 2^{-m\frac{p-q+pq\alpha}{p}},$$

and this series is divergent if $q > \frac{p}{1-p\alpha}$, so that the result is false in this case also.

(ii) The result of Theorem 10 is (sometimes) false if

$$l \leqq \frac{1}{p} - 1.$$

Suppose, for example, that $\alpha = 1$. Then f_1 is (for any positive f) an increasing function of x, and the integral on the left hand side of (4.35) is divergent if $l \leqq \frac{1}{p} - 1$.

(iii) The result of Theorem 11 is (sometimes) false if $p=1$. This may be shown by the example of § 3.5 (iii), in which

$$f(x) = x^{-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\beta} \qquad \left(0 < x \leqq \frac{1}{2}\right),$$

where $\beta > 1$. Here

$$f_\alpha(x) > K x^{\alpha-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{1-\beta}$$

for small x. The right hand side of (4.35) is convergent if $\beta > 1$, the left hand side only if $\beta > 2$.

5. Lipschitz conditions.

5.1. Theorem 12. *If*

(5.11) $$p > 1, \quad \frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{p} + 1$$

or

(5.111) $$p = 1, \quad 1 \leqq \alpha < 2,$$

f belongs to L^p in (a,b), where $a < b < \infty$, and f_α is the α-th integral

of f, with origin a, then f_a belongs to Lip.* $\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)$ *in* (a, b), *i. e.*

$$f_a(x) - f_a(x-h) = o\left(h^{\alpha-\frac{1}{p}}\right)$$

when $a \leqq x-h < x \leqq b$ *and* $h \to 0$, *uniformly in* x.

We consider first the case $p > 1$. We may take $a = 0$; and we suppose first that $x \geqq 2h$. We have

$$\text{(5.12)} \quad \Gamma(\alpha)\Delta = \Gamma(\alpha)\Delta_h f_\alpha = \Gamma(\alpha)(f_\alpha(x) - f_\alpha(x-h))$$

$$= \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt - \int_0^{x-h} f(t)(x-h-t)^{\alpha-1}\,dt$$

$$= \int_0^x f(x-u)u^{\alpha-1}\,du - \int_h^x f(x-u)(u-h)^{\alpha-1}\,du$$

$$= \int_0^h f(x-u)u^{\alpha-1}\,du + \int_h^{2h} f(x-u)(u^{\alpha-1} - (u-h)^{\alpha-1})\,du$$

$$+ \int_{2h}^{\delta} f(x-u)(u^{\alpha-1} - (u-h)^{\alpha-1})\,du + \int_\delta^x f(x-u)(u^{\alpha-1} - (u-h)^{\alpha-1})\,du$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Here δ is any positive number between $2h$ and x.

Now

$$\text{(5.13)} \quad |I_1| \leqq \left(\int_0^h |f(x-u)|^p\,du\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^h u^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}}\,du\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= o(1)\,O\left(h^{\alpha-\frac{1}{p}}\right) = o\left(h^{\alpha-\frac{1}{p}}\right),$$

since

$$\frac{(\alpha-1)p}{p-1} > -1, \quad \left(\frac{(\alpha-1)p}{p-1} + 1\right)\frac{p-1}{p} = \alpha - \frac{1}{p};$$

and the same argument may be applied to

$$\int_h^{2h} f(x-u)u^{\alpha-1}\,du, \qquad \int_h^{2h} f(x-u)(u-h)^{\alpha-1}\,du,$$

so that

$$\text{(5.14)} \quad I_2 = o\left(h^{\alpha-\frac{1}{p}}\right).$$

Next, in I_3 we have

$$|u^{\alpha-1}-(u-h)^{\alpha-1}| \leqq h|1-\alpha|(u-h)^{\alpha-2}$$

and so

$$|I_3| \leqq h|1-\alpha| \int_{2h}^{\delta} |f(x-u)|(u-h)^{\alpha-2}\,du \tag{5.15}$$

$$\leqq h|1-\alpha| \Big(\int_{2h}^{\delta} f(x-u)|^p\,du\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{2h}^{\delta} (u-h)^{\frac{(\alpha-2)p}{p-1}}\,du\Big)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leqq |1-\alpha| \Big(\frac{p-1}{p+1-\alpha p}\Big)^{\frac{p-1}{p}} h^{\alpha-\frac{1}{p}} \Big(\int_{2h}^{\delta} |f(x-u)|^p\,du\Big)^{\frac{1}{p}} \leqq \varepsilon_\delta h^{\alpha-\frac{1}{p}},$$

where ε_δ is independent of x and h and tends to zero with δ.

Finally

$$|I_4| \leqq h|1-\alpha| \int_{\delta}^{x} |f(x-u)|(u-h)^{\alpha-2}\,du = O(h) = o\Big(h^{\alpha-\frac{1}{p}}\Big) \tag{5.16}$$

uniformly in x, for any fixed δ. It is plain that the conclusion follows from (5.12)—(5.16), by choice first of δ and then of h.

When $h \leqq x \leqq 2h$, the proof is simpler. In this case the three integrals I_2, I_3, I_4 are replaced by

$$I_2^* = \int_{h}^{x} f(x-u)\,(u^{\alpha-1}-(u-h)^{\alpha-1})\,du,$$

which divides into two parts to each of which our first argument applies.

If $p=1$, we have $\alpha-1 \geqq 0$, and so

$$|I_1| \leqq h^{\alpha-1} \int_{0}^{h} |f(x-u)|\,du = o(h^{\alpha-1});$$

$I_2 = o(h^{\alpha-1})$, similarly;

$$|I_3| \leqq h(\alpha-1)\cdot h^{\alpha-2} \int_{2h}^{\delta} |f(x-u)|\,du \leqq \varepsilon_\delta h^{\alpha-1}$$

(since $\alpha<2$); and

$$I_4 = O(h) = o(h^{\alpha-1})$$

as before. In this case the theorem is true (and trivial) for $\alpha=1$.

5.2. The result of Theorem 12 is not true, in the cases $p>1$, $\alpha=\frac{1}{p}$ or $\alpha=\frac{1}{p}+1$, even if it is stated in the less strong form that f_α belongs to Lip. $\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)$. In the first place, when $\alpha=\frac{1}{p}$, we have seen already (§ 3.5) that f_α is not necessarily bounded. If f_α belonged to Lip. 1, when $\alpha=\frac{1}{p}+1$, f_α would have almost everywhere a derivative bounded in the set of points in which it exists, and $f_{\alpha-1}$ would be equal, except at a null set, to a bounded function. Our discussion of the case $\alpha=\frac{1}{p}$ shows that this is not necessarily true.

Theorem 13. *The result of Theorem* 12 *is still true in the case considered in Theorem* 5.

For (in the notation of Theorem 5) $\psi(x)$ belongs to Lip.* $\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)$ in $(-2\pi, 2\pi)$, and *a fortiori* in $(0, 2\pi)$, while $\varphi(x)$ has a continuous derivative.

Theorem 14. *Suppose that*

$$k\geqq 0, \quad \alpha>0, \quad k+\alpha<1,$$

and that $f(x)$ *belongs to* Lip. k *in* (a, b), *it being understood that this hypothesis includes*

$$f(x)=O((x-a)^k)$$

for small $x-a$. *Then* $f_\alpha(x)$, *defined with origin* a, *belongs to* Lip. $(k+\alpha)$ *in* (a, b), *and*

$$f_\alpha(x)=O((x-a)^{k+\alpha})$$

for small $x-a$.

The gloss on the hypothesis means simply that $f(a)=0$. It is clear that such a gloss is necessary. Thus $f=1$ belongs to Lip. k in (a, b), while f_α is a multiple of $(x-a)^\alpha$.

We take $a=0$. Then $f(0)=0$ and

$$f(x)-f(x-h)=O(h^k)$$

uniformly for $0\leqq x-h<x\leqq b$; and we have to show that

$$f_\alpha(x)-f_\alpha(x-h)=O(h^{k+\alpha})$$

uniformly for $0\leqq x-h<x\leqq b$, and that $f_\alpha(h)=O(h^{k+\alpha})$.

The last result is immediate; for the first, we have

$$\Gamma(\alpha)\,\Delta = \int_0^x f(x-u)\,u^{\alpha-1}\,du \;-\int_h^x f(x-u)\,(u-h)^{\alpha-1}\,du$$

$$= \frac{f(x)}{\alpha}(x^\alpha-(x-h)^\alpha) - \int_0^x (f(x)-f(x-u))\,u^{\alpha-1}\,du$$

$$+\int_h^x (f(x)-f(x-u))\,(u-h)^{\alpha-1}\,du$$

$$= \frac{f(x)}{\alpha}(x^\alpha-(x-h)^\alpha) - \int_0^h (f(x)-f(x-u))\,u^{\alpha-1}\,du$$

$$-\int_h^x (f(x)-f(x-u))\,(u^{\alpha-1}-(u-h)^{\alpha-1})\,du$$

$$= J_1+J_2+J_3,$$

say. In the first place

$$J_1 = O(x^k\cdot h\cdot x^{\alpha-1}) = O(hx^{k+\alpha-1}) = O(h^{k+\alpha})$$

if $x>2h$, and $J_1 = O(x^{k+\alpha}) = O(h^{k+\alpha})$ if $h\leqq x\leqq 2h$. Secondly

$$J_2 = O\Big(\int_0^h u^{k+\alpha-1}\,du\Big) = O(h^{k+\alpha}).$$

Finally

$$J_3 = O\Big(\int_h^x u^k((u-h)^{\alpha-1}-u^{\alpha-1})\,du\Big)$$

$$= O\Big(h^{k+\alpha}\int_1^{\frac{x}{h}} w^k((w-1)^{\alpha-1}-w^{\alpha-1})\,dw\Big) = O(h^{k+\alpha}),$$

since the integral is convergent up to ∞.

5.4. Theorem 15. *If $f(x)$ belongs to* Lip.* k, *it being understood that this includes $f(x)=o((x-a)^k)$ for small $x-a$, then $f_\alpha(x)$ belongs to* Lip.* $(k+\alpha)$, *with the corresponding gloss.*

In this case we obtain

$$J_1 = o(h^{k+\alpha}), \qquad J_2 = o(h^{k+\alpha}),$$

by the same argument as before. We write

$$J_3 = -\int_h^\delta - \int_\delta^x = J_3' + J_3''.$$

Here $|J_3'| < \varepsilon_\delta h^{k+\alpha}$, where ε_δ is independent of x and h and tends to zero with δ, and J_3'' is $O(h) = o(h^{k+\alpha})$. Hence

$$J_3 = o(h^{k+\alpha}).$$

It is plain that we have proved incidentally

Theorem 16. *If $f(x)$ is integrable and satisfies a Lipschitz condition of order k at a point, then $f_\alpha(x)$ satisfies one of order $k+\alpha$ at the same point, the conditions being of the same (O or o) type.*

Theorem 17. *If $f(x)$ satisfies the conditions of Theorem 14 or Theorem 15, except for the gloss on the Lipschitz condition, then $f_\alpha(x)$ belongs to* Lip. $(k+\alpha)$, *or* Lip.* $(k+\alpha)$, *in any interval (a', b') interior to (a, b).*

For

$$\Gamma(\alpha) f_\alpha(x) = \int_a^x (f(t) - f(a))(x-t)^{\alpha-1}\, dt + \frac{f(a)}{\alpha}(x-a)^\alpha.$$

Theorem 18. *If $f(x)$ is periodic, has mean value 0, and belongs to* Lip. k *or* Lip.* k, *then $f_\alpha(x)$ belongs to* Lip. $(k+\alpha)$ *or* Lip.* $(k+\alpha)$.

We have

$$\Gamma(\alpha) f_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)(x-t)^{\alpha-1}\, dt = \int_{-\infty}^{-c} + \int_{-c}^{x},$$

where $c > 0$. The first term has a continuous derivative, while the second, by Theorem 17, belongs to Lip. $(k+\alpha)$ or Lip.* $(k+\alpha)$ in $(0, 2\pi)$.

5.5. It is to be observed that none of these theorems are true when $k > 0$, $k + \alpha = 1$. Thus Weierstrass's function

$$f(x) = \sum a^{-nk} \cos a^n x \qquad (a > 1,\ 0 < k < 1)$$

satisfies a Lipschitz condition of order k (of O type) uniformly in any interval[20]. But $f_{1-k}(x)$, which is a linear combination of

$$\sum a^{-n} \cos a^n x, \qquad \sum a^{-n} \sin a^n x,$$

does not satisfy one of order 1, since it is nowhere differentiable.

When $k = 0$, the hypothesis asserts simply that $f(x)$ is bounded (or continuous). This case of the theorem is due to Weyl[21]; and in this case the result is true, and trivial, in O form, when $\alpha = 1$.

---

[20]) Hardy, 3.

[21]) Weyl, 18.

In what follows, in order to avoid complications concerning the origin of integration, glosses on Lipschitz conditions, and so forth, we confine ourselves to the case in which the origin is $-\infty$. We suppose then henceforth that $f(x)$ has period 2π, that

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0,$$

and that the origin of integration is $-\infty$, so that $f_\alpha(x)$ is periodic, and has also mean value 0.

We define $f^\beta(x)$, the β-th derivative of $f(x)$, for $0<\beta<1$, by

$$f^\beta(x) = \frac{d}{dx} f_{1-\beta}(x).$$

5.6. Theorem 19[22]). *If* $0<\beta<k\leqq 1$ *and* $f(x)$ *belongs to* Lip. k, *then* $f^\beta(x)$ *exists and is continuous; and* $f(x)$ *is the* β*-th integral of* $f^\beta(x)$.

We write

$$f_{1-\beta,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} f(t)\,(x-t)^{-\beta}\,dt \tag{5.61}$$

for $\varepsilon \geqq 0$, so that $f_{1-\beta,0} = f_{1-\beta}$. Then, if $\varepsilon>0$,

$$\Gamma(1-\beta)\, f'_{1-\beta,\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-\beta} f(x-\varepsilon) - \beta \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} f(t)\,(x-t)^{-\beta-1}\,dt \tag{5.62}$$

$$= \beta \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} (f(x)-f(t))\,(x-t)^{-\beta-1}\,dt - \varepsilon^{-\beta}(f(x)-f(x-\varepsilon)).$$

But

$$f(x)-f(t) = O(|x-t|^k)$$

uniformly in any intervals of values of x and t, and $\beta+1-k<1<\beta+1$. It follows that, when $\varepsilon\to 0$, the right hand side of (5.62) tends uniformly to

$$g(x) = \beta \int_{-\infty}^{x} (f(x)-f(t))\,(x-t)^{-\beta-1}\,dt.$$

Also

$$f_{1-\beta}(x_1) - f_{1-\beta}(x_2) = \lim_{\varepsilon\to 0} (f_{1-\beta,\varepsilon}(x_1) - f_{1-\beta,\varepsilon}(x_2))$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{x_2}^{x_1} f_{1-\beta,\varepsilon}(x)\,dx = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_{x_2}^{x_1} g(x)\,dx,$$

[22]) Weyl, 18. We have added the last clause.

so that $\Gamma(1-\beta) f_{1-\beta}(x)$ is the integral of $g(x)$, and

$$g(x) = \Gamma(1-\beta) f'_{1-\beta}(x) = \Gamma(1-\beta) f^{\beta}(x).$$

Finally, since the $(1-\beta)$-th integral of the β-th integral of an integrable function is the integral of that function, $\Gamma(1-\beta) f(x)$ and $g_{\beta}(x)$ (which are indeed continuous) have the same $(1-\beta)$-th integral, viz. $\Gamma(1-\beta) f_{1-\beta}(x)$, *i. e.*

$$\int_{-\infty}^{x} (\Gamma(1-\beta) f(t) - g_{\beta}(t)) (x-t)^{-\beta} dt = 0.$$

It follows that $\Gamma(1-\beta) f(t)$ and $g_{\beta}(t)$, being continuous, are identical.

5.7. Theorem 20. *If the conditions of Theorem* 19 *are satisfied, then* $f^{\beta}(x)$ *belongs to* Lip.$(k-\beta)$. *If also* $f(x)$ *belongs to* Lip.* k, *then* $f^{\beta}(x)$ *belongs to* Lip.* $(k-\beta)$.

We suppose first that hypothesis and conclusion are of the weaker type. We have, by Theorem 19,

$$g(x) = \Gamma(1-\beta) f^{\beta}(x) = \beta \int_{-\infty}^{x} (f(x) - f(t)) (x-t)^{-\beta-1} dt,$$

5.71) $$\frac{1}{\beta} \Delta g(x) = \frac{1}{\beta} (g(x) - g(x-h))$$

$$= \int_{-\infty}^{x} (f(x) - f(t)) (x-t)^{-\beta-1} dt - \int_{-\infty}^{x-h} (f(x-h) - f(t)) (x-h-t)^{-\beta-1} dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} (f(x) - f(x-u)) u^{-\beta-1} du - \int_{h}^{\infty} (f(x-h) - f(x-u)) (u-h)^{-\beta-1} du$$

$$= -\int_{h}^{\infty} (f(x-h) - f(x-u)) ((u-h)^{-\beta-1} - u^{-\beta-1}) du$$

$$+ \int_{h}^{\infty} (f(x) - f(x-h)) u^{-\beta-1} du + \int_{0}^{h} (f(x) - f(x-u)) u^{-\beta-1} du$$

$$= J_1 + J_2 + J_3,$$

say. Here

$$J_1 = O\left(\int_{h}^{\infty} (u-h)^{k} ((u-h)^{-\beta-1} - u^{-\beta-1}) du \right)$$

$$= O\left(h^{k-\beta} \int_{1}^{\infty} (w-1)^{k} ((w-1)^{-\beta-1} - w^{-\beta-1}) dw \right) = O(h^{k-\beta}),$$

since $\beta+1-k<1$ and $\beta+2-k>1$. Also

$$J_2=(f(x)-f(x-h))\frac{h^{-\beta}}{\beta}=O(h^{k-\beta});$$

and

$$J_3=O\left(\int_0^h u^{k-\beta-1}\,du\right)=O(h^{k-\beta});$$

which proves the theorem in O form.

When hypothesis and conclusion have the sharper form, the treatment of J_2 and J_3 is unaltered. As regards J_1, we write

$$J_1=-\int_h^\infty=-\int_h^{Ch}-\int_{Ch}^\infty=J_1'+J_1''.$$

Plainly J_1'' is less than a constant multiple of

$$\int_{Ch}^\infty (u-h)^k\left((u-h)^{-\beta-1}-u^{-\beta-1}\right)du$$

$$=h^{k-\beta}\int_C^\infty (w-1)^k\left((w-1)^{-\beta-1}-w^{-\beta-1}\right)dw<\varepsilon h^{k-\beta}$$

by choice of C; while, when C is fixed, $J_1'=o(h^{k-\beta})$. This proves the theorem in o form.

5.8. Theorems 19 and 20 are false for $k=\beta$. In fact Weierstrass's function $\sum a^{-nk}\cos a^n x$ has not at any point a derivative of order k.

6. Integrated Lipschitz conditions.

6.1. In what follows we make repeated use, explicit or tacit, of Minkowski's inequality

$$\left(\sum_i\left(\sum_j a_{i,j}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqq\sum_j\left(\sum_i a_{i,j}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

where $p\geqq 1$, $a_{i,j}\geqq 0$, and the summations are finite or infinite; of the corresponding integral inequality

$$\left(\int dx\left(\int f(x,y)\,dy\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqq\int dy\left(\int f^p(x,y)\,dx\right)^{\frac{1}{p}};$$

or the corresponding mixed inequalities with $\sum$ and $\int$. We also use freely the ideas of "strong" and "weak" convergence, due to F. Riesz[22a]).

[22a]) F. Riesz, 11.

Theorem 21. *If* $p \geqq 1$, $0 < \alpha < 1$, *and* $f(x)$ *belongs to* L^p, *then*

$$\int_a^b |f_\alpha(x) - f_\alpha(x-h)|^p \, dx = o(h^{p\alpha})$$

for any finite interval (a, b).

We have

$$g(x) = \Gamma(\alpha) f_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)(x-t)^{\alpha-1} \, dt \tag{6.11}$$

$$= \int_{x-Ch}^{x} + \int_{x-Dh}^{x-Ch} + \int_{-\infty}^{x-Dh} = g_1 + g_2 + g_3,$$

where C and D are constants at our disposal. It is plainly sufficient to prove (i) that

$$\int_a^b |\Delta g_2|^p \, dx = o(h^{p\alpha})$$

for any fixed C and D, and (ii) that

$$\int_a^b |\Delta g_1|^p \, dx \leqq \varepsilon h^{p\alpha}, \qquad \int_a^b |\Delta g_3|^p \leqq \varepsilon h^{p\alpha} \tag{6.12}$$

for $h \leqq 1$, sufficiently small values of C, and sufficiently large values of D.

(i) In the first place, we have

$$\Delta g_2 = \int_{x-Dh}^{x-Ch} f(t)(x-t)^{\alpha-1} \, dt - \int_{x-Dh-h}^{x-Ch-h} f(t)(x-h-t)^{\alpha-1} \, dt$$

$$= \int_{x-Dh}^{x-Ch} (x-t)^{\alpha-1}(f(t) - f(t-h)) \, dt = O\left(h^{\alpha-1} \int_{x-Dh}^{x-Ch} |f(t) - f(t-h)| \, dt\right),$$

$$|\Delta g_2|^p = O\left(h^{\alpha p-1} \int_{x-Dh}^{x-Ch} |f(t) - f(t-h)|^p \, dt\right),$$

$$\int_a^b |\Delta g_2|^p \, dx = O\left(h^{\alpha p-1} \int_a^b dx \int_{x-Dh}^{x-Ch} |f(t) - f(t-h)|^p \, dt\right).$$

The double integral does not exceed

$$\int_{a-Dh}^{b-Ch} |f(t) - f(t-h)|^p \, dt \int_{t+Ch}^{t+Dh} dx = O\left(h \int_{a-Dh}^{b-Ch} |f(t) - f(t-h)|^p \, dt\right) = o(h),$$

since

$$\int_a^\beta |f(t)-f(t-h)|^p\,dt$$

tends to zero with h, for any f of L^p Hence

$$\int_a^b |\Delta g_2|^p\,dx = o(h^{\alpha p})$$

for every fixed C and D.

(ii) In order to prove the first of the inequalities (6.12), it is plainly enough to prove that

$$(6.13)\qquad \int_a^b |g_1(x)|^p\,dx \leqq \varepsilon h^{p\alpha}, \qquad \int_a^b |g_1(x-h)|^p\,dx \leqq \varepsilon h^{p\alpha}$$

if C is sufficiently small. Now

$$g_1(x) = \int_{x-Ch}^{x} f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt = \int_0^{Ch} f(x-u)\,u^{\alpha-1}\,du,$$

$$\left(\int_a^b |g_1(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\int_a^b dx\left(\int_0^{Ch} |f(x-u)|\,u^{\alpha-1}\,du\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \int_0^{Ch} u^{\alpha-1}\,du\left(\int_a^b |f(x-u)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \frac{(Ch)^\alpha}{\alpha}\left(\int_{a-Ch}^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \varepsilon^{\frac{1}{p}} h^\alpha,$$

if C is sufficiently small. Similarly

$$g_1(x-h) = \int_{x-Ch-h}^{x-h} f(t)(x-h-t)^{\alpha-1}\,dt = \int_0^{Ch} f(x-h-u)\,u^{\alpha-1}\,du,$$

and the second of the inequalities (6.13) may be proved in the same manner.

(iii) Finally we have

$$g_3(x) = \int_{-\infty}^{x-Dh} f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt = \int_{Dh}^{\infty} f(x-u)\,u^{\alpha-1}\,du,$$

$$g_3(x-h) = \int_{-\infty}^{x-Dh-h} f(t)(x-h-t)^{\alpha-1}\,dt = \int_{Dh+h}^{\infty} f(x-u)(u-h)^{\alpha-1}\,du,$$

$$\Delta g_3 = g_3(x) - g_3(x-h) = -\int_{Dh+h}^{\infty} f(x-u)\left((u-h)^{\alpha-1} - u^{\alpha-1}\right) du$$
$$+\int_{Dh}^{Dh+h} f(x-u)\, u^{\alpha-1}\, du = \psi + \chi,$$

say. It is enough to prove that

$$\left(\int_a^b |\psi|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \varepsilon^{\frac{1}{p}} h^{\alpha}, \qquad \left(\int_a^b |\chi|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \varepsilon^{\frac{1}{p}} h^{\alpha}$$

if D is sufficiently large.

Now

$$\left(\int_a^b |\psi|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\int_a^b dx \left(\int_{Dh+h}^{\infty} |f(x-u)|\left((u-h)^{\alpha-1} - u^{\alpha-1}\right) du\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqq \int_{Dh+h}^{\infty} \left(\left((u-h)^{\alpha-1} - u^{\alpha-1}\right)\left(\int_a^b |f(x-u)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\right) du,$$

which is less than a constant multiple of

$$\int_{Dh+h}^{\infty} \left((u-h)^{\alpha-1} - u^{\alpha-1}\right) du = h^{\alpha} \int_{D+1}^{\infty} \left((w-1)^{\alpha-1} - w^{\alpha-1}\right) dw < \varepsilon^{\frac{1}{p}} h^{\alpha}$$

if D is sufficiently large.

On the other hand

$$\int_a^b |\chi|^p\, dx \leqq \int_a^b dx \left(\int_{Dh}^{Dh+h} |f(x-u)|\, u^{\alpha-1}\, du\right)^p$$
$$\leqq (Dh)^{p\alpha-p} \int_a^b dx \left(\int_{Dh}^{Dh+h} |f(x-u)|\, du\right)^p \leqq (Dh)^{p\alpha-p} h^{p-1} \int_a^b dx \int_{Dh}^{Dh+h} |f(x-u)|^p\, du$$
$$= D^{(\alpha-1)p} h^{p\alpha-1} \int_a^b dx \int_{x-Dh-h}^{x-Dh} |f(t)|^p\, dt \leqq D^{(\alpha-1)p} h^{p\alpha-1} \int_{a-Dh-h}^{b-Dh} |f(t)|^p\, dt \int_{t+Dh}^{t+Dh+h} dx$$
$$= D^{(\alpha-1)p} h^{p\alpha} \int_{a-Dh-h}^{b-Dh} |f(t)|^p\, dt \leqq \varepsilon h^{p\alpha},$$

if D is sufficiently large.

This completes the proof of Theorem 21. When $\alpha = 1$, the theorem assumes a different form.

6.2. Theorem 22. *If $p \geqq 1$ and $f(x)$ belongs to L^p, then*

$$\int_a^b \left| \frac{f_1(x) - f_1(x-h)}{h} \right|^p dx \to \int_a^b |f(x)|^p dx.$$

By Minkowski's inequality, the difference of the p-th roots of the two integrals does not exceed the p-th root of

$$\int_a^b dx \left| \frac{1}{h} \int_{-h}^{0} (f(x+t) - f(x))\, dt \right|^p$$

$$\leqq \int_a^b dx \left(\frac{1}{h} \int_{-h}^{0} |f(x+t) - f(x)|^p\, dt \right) = \frac{1}{h} \int_0^h F(t)\, dt,$$

where

$$F(t) = \int_a^b |f(x+t) - f(x)|^p dx.$$

Since $F(t)$ tends to zero with t, the theorem follows.

It is plain that we may also write the conclusion of Theorem 21 in either of the forms

$$\int_a^b |f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)|^p dx = o(h^{p\alpha}),$$

$$\int_a^b |f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x-h)|^p dx = o(h^{p\alpha}),$$

and that similar modifications may be made in that of Theorem 22.

6.3. Theorem 23. *If $p \geqq 1$, $0 < k \leqq 1$, $f(x)$ belongs to L^p, and*

$$\int_a^b |\Delta f|^p dx = O(h^{pk}),$$

where Δf is one of

$$f(x) - f(x-h), \quad f(x+h) - f(x), \quad f(x+h) - f(x-h),$$

holds over every finite interval (a, b), then $f^\beta(x)$ exists for almost all x, and belongs to L^p, for every $\beta < k$ and over every finite interval. Also $f(x)$ is the β-th integral of $f^\beta(x)$.

It is indifferent which of the three conditions we select. Suppose for example that we select the third (as apparently the weakest). Then

$$\int_a^b |f(x)-f(x-2h)|^p\,dx = \int_{a-h}^{b-h} |f(t+h)-f(t-h)|^p\,dx$$

$$\leqq \int_{a-1}^{b} |f(t+h)-f(t-h)|^p\,dx = O(h^{pk})$$

if $0<h<1$. We take the first condition and we suppose first that $p>1$.

We write, as in § 5.6,

$$f_{1-\beta,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} f(t)(x-t)^{-\beta}\,dt \qquad (\varepsilon \geqq 0), \tag{6.31}$$

and, for $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} g_\varepsilon = g_\varepsilon(x) &= \Gamma(1-\beta) f'_{1-\beta,\varepsilon}(x) \\ &= \beta \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} (f(x)-f(t))(x-t)^{-\beta-1}\,dt - \varepsilon^{-\beta}(f(x)-f(x-\varepsilon)). \end{aligned} \tag{6.32}$$

It is then sufficient to prove that

$$\int_a^b |g_\varepsilon - g_{\varepsilon'}|^p\,dx \to 0 \tag{6.33}$$

over any interval (a, b), when ε and ε' tend to zero. For, if this is so, g_ε tends strongly to a g of L^p, and the integral of g is the limit of that of g_ε, *i. e.* $\Gamma(1-\beta) f_{1-\beta}(x)$. Hence $f_{1-\beta}(x)$ is the integral of a g belonging to L^p. It follows that $f^\beta(x)$ exists for almost all x and belongs to L^p. Finally, the $(1-\beta)$-th integral of the β-th integral of any integrable function is the integral of that function, so that $f(x)$ and $g_\beta(x)$ have the same $(1-\beta)$-th integral, and are therefore equivalent.

Writing (6.32) in the form

$$g_\varepsilon = \beta g_{\varepsilon,1} + g_{\varepsilon,2},$$

it is enough to show that

$$\int_a^b |g_{\varepsilon,i} - g_{\varepsilon',i}|^p\,dx \to 0 \qquad (i=1,2). \tag{6.34}$$

Now if $\varepsilon < \varepsilon'$ we have

$$\int_a^b |g_{\varepsilon,1} - g_{\varepsilon',1}|^p\,dx \leqq \int_a^b dx \Big(\int_{x-\varepsilon'}^{x-\varepsilon} |f(x)-f(t)|\,(x-t)^{-\beta-1}\,dt\Big)^p$$

$$= \int_a^b dx \Big(\int_\varepsilon^{\varepsilon'} |f(x)-f(x-u)|\,u^{-\beta-1}\,du\Big)^p$$

$$= \int_a^b dx \Big(\int_\varepsilon^{\varepsilon'} |f(x)-f(x-u)|\,u^{-\beta-\frac{1}{p}-\delta}\cdot u^{-\frac{1}{p'}+\delta}\,du\Big)^p$$

$$\leqq \Big(\int_\varepsilon^{\varepsilon'} u^{-1+p'\delta}\,du\Big)^{p-1} \int_a^b dx \int_\varepsilon^{\varepsilon'} |f(x)-f(x-u)|^p\,u^{-p\beta-1-p\delta}\,du$$

for any $\delta > 0$. This is

$$o\Big(\int_a^b dx \int_\varepsilon^{\varepsilon'} |f(x)-f(x-u)|^p\,u^{-p\beta-1-p\delta}\,du\Big)$$

$$= o\Big(\int_\varepsilon^{\varepsilon'} u^{-p\beta-1-p\delta}\,du \int_a^b |f(x)-f(x-u)|^p\,dx\Big)$$

$$= o\Big(\int_\varepsilon^{\varepsilon'} u^{p(k-\beta-\delta)-1}\,du\Big) = o(1),$$

if $0 < \delta < k-\beta$. This proves (6.34) for $i=1$.

Also

$$\int_a^b |g_{\varepsilon,2}|^p\,dx = O\Big(\varepsilon^{-p\beta}\int_a^b |f(x)-f(x-\varepsilon)|^p\,dx\Big) = O(\varepsilon^{p(k-\beta)}) = o(1);$$

and *a fortiori*

$$\int_a^b |g_{\varepsilon,2} - g_{\varepsilon',2}|^p\,dx = o(1).$$

This completes the proof of the theorem when $p > 1$.

Next suppose $p = 1$. In this case

$$\int_a^b |g_{\varepsilon,1} - g_{\varepsilon',1}|\,dx \leqq \int_a^b dx \int_\varepsilon^{\varepsilon'} |f(x)-f(x-u)|\,u^{-\beta-1}\,du$$

$$= \int_\varepsilon^{\varepsilon'} u^{-\beta-1}\,du \int_a^b |f(x)-f(x-u)|\,du = o\Big(\int_\varepsilon^{\varepsilon'} u^{-\beta-1+k}\,du\Big) = o(1);$$

while the proof of the similar equation for $g_{\varepsilon,2}$ is unaltered. Hence (6.33) is still true. From this it follows that there is a g of L such that

$$\int g_\varepsilon(x)\,dx \to \int g(x)\,dx,$$

and the proof is then completed as before.

We have proved incidentally that $g_{\varepsilon,2}(x) \to 0$ in the sense of mean convergence with index p, and that

$$(6.35) \qquad \Gamma(1-\beta)\,f^\beta(x) = \beta \int_{-\infty}^{x} (f(x)-f(t))(x-t)^{-\beta-1}\,dt$$

if the integral be interpreted as the limit of $\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}$ in the same sense.

6.4. If $\beta = k < 1$ then (whether $p > 1$ or $p = 1$) the result is false, Weierstrass's function providing a "Gegenbeispiel". But if $\beta = k = 1$ we have

Theorem 24. *Suppose that $f(x)$ has the period 2π, that $p \geqq 1$, and that*

$$(6.41) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \right|^p dx \leqq C.$$

Then (i) *if $p > 1$, f is equivalent to an integral g, and*

$$(6.42) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |g'(x)|^p\,dx \leqq C;$$

(ii) *if $p = 1$, f is equivalent to a function g of bounded variation, and*

$$(6.43) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |dg| \leqq C.$$

We state our result for a complete period of $f(x)$ in order to obtain precise inequalities.

We use the following lemma.

Lemma. *Given an integrable $f(x)$, we can find a sequence of integrals $\varphi_n(x)$ such that*

(i) $\varphi_n(x) \to f(x)$ *for almost all x,*

(ii) $$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x) - \varphi_n(x-h)|^p\,dx \leqq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-h)|^p\,dx.$$

In fact, if we take

$$\varphi_n(x) = n\left(f_1\left(x+\frac{1}{n}\right) - f_1(x)\right),$$

and write h for $\frac{1}{n}$ and Δf for $f(x) - f(x-h)$, then (i) is true, and

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta\varphi_n|^p\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left| n\left(\Delta f_1\left(x+\frac{1}{n}\right) - \Delta f_1(x)\right)\right|^p dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \left|\frac{1}{h}\int_0^h \Delta f(x+t)\,dt\right|^p \leqq \int_{-\pi}^{\pi} dx \left(\frac{1}{h}\int_0^h |\Delta f(x+t)|\,dt\right)^p$$

$$\leqq \int_{-\pi}^{\pi} dx\,\frac{1}{h}\int_0^h |\Delta f(x+t)|^p\,dt = \frac{1}{h}\int_0^h dt \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta f(x+t)|^p\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta f(x)|^p\,dx.$$

6.5. It follows from (6.41) and the lemma that

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\Delta\varphi_n}{h}\right|^p dx \leqq C.$$

Fixing n, and making $h \to 0$, we obtain

$$(6.44)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n'|^p\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \lim \left|\frac{\Delta\varphi_n}{h}\right|^p dx \leqq \underline{\lim} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\Delta\varphi_n}{h}\right|^p dx \leqq C.$$ [23])

This is true for $p \geqq 1$. If $p > 1$, there is a subsequence φ_{n_i}' which converges weakly to an h for which

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h|^p\,dx \leqq C,$$

and

$$\int_{x_1}^{x_2} h(x)\,dx = \lim_{i\to\infty} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_{n_i}'(x)\,dx = \lim_{i\to\infty} (\varphi_{n_i}(x_2) - \varphi_{n_i}(x_1)) = f(x_2) - f(x_1)$$

for almost all (x_1, x_2); which proves the theorem.

If $p = 1$, suppose that e is any finite set of non-overlapping intervals (ξ, η). Then, by (6.44),

---

[23]) See Pollard, **9**; Schlesinger and Plessner, **14**.

$$\sum_e |\varphi_n(\eta) - \varphi_n(\xi)| \leqq \int_e |\varphi_n'(x)|\, dx \leqq C.$$

Making $n \to \infty$,

$$\sum_e |f(\eta) - f(\xi)| \leqq C,$$

for all sets e whose extremities do not fall in a certain set of measure zero, which again proves the theorem.

6.5 Theorem 25. *If*

$$p \geqq 1, \quad k \geqq 0, \quad \alpha > 0, \quad k + \alpha < 1, \tag{6.51}$$

$f(x)$ belongs to L^p, and

$$\int_a^b |f(x) - f(x-h)|^p\, dx = O(h^{pk}) \tag{6.52}$$

for every finite (a, b), then

$$\int_a^b |f_\alpha(x) - f_\alpha(x-h)|^p\, dx = O(h^{p(k+\alpha)}). \tag{6.53}$$

If the O in the hypothesis is replaced by o, the same change may be made in the conclusion.

We prove the theorem only in O form, leaving the o form to the reader.

We have

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\Delta = \Gamma(\alpha)(f_\alpha(x) - f_\alpha(x-h)) \qquad (6.54)\\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)(x-t)^{\alpha-1}\, dt - \int_{-\infty}^{x-h} f(t)(x-h-t)^{\alpha-1}\, dt\\
&= \int_0^\infty f(x-u)\, u^{\alpha-1}\, du - \int_h^\infty f(x-u)\,(u-h)^{\alpha-1}\, du\\
&= \int_h^\infty (f(x) - f(x-u))((u-h)^{\alpha-1} - u^{\alpha-1})\, du\\
&\quad - \int_0^h (f(x) - f(x-u))\, u^{\alpha-1}\, du = J_1 + J_2,
\end{aligned}$$

say. It is enough to prove that

$$\int_a^b |J_1|^p\, dx = O(h^{p(k+\alpha)}), \qquad \int_a^b |J_2|^p\, dx = O(h^{p(k+\alpha)}). \tag{6.56}$$

Now

$$\Big(\int_a^b |J_1|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqq \Big(\int_a^b dx\Big(\int_h^\infty |f(x)-f(x-u)|\,((u-h)^{\alpha-1}-u^{\alpha-1})\,du\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \int_h^\infty ((u-h)^{\alpha-1}-u^{\alpha-1})\,du\Big(\int_a^b |f(x)-f(x-u)|^p\,du\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$= O\Big(\int_h^\infty u^k((u-h)^{\alpha-1}-u^{\alpha-1})\,du\Big)$$

$$= O\Big(h^{k+\alpha}\int_1^\infty w^k((w-1)^{\alpha-1}-w^{\alpha-1})\,dw\Big) = O(h^{k+\alpha}),$$

since $\alpha>0$, $k+\alpha<1$; which proves the first of (6.56). And

$$\Big(\int_a^b |J_2|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqq \Big(\int_a^b dx\Big(\int_0^h |f(x)-f(x-u)|\,u^{\alpha-1}\,du\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \int_0^h u^{\alpha-1}\,du\Big(\int_a^b |f(x)-f(x-u)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} = O\Big(\int_0^h u^{k+\alpha-1}\,du\Big) = O(h^{k+\alpha}),$$

which completes the proof of the theorem.

The theorem is not true when $k+\alpha=1$ (whether $p>1$ or $p=1$). A Gegenbeispiel is provided by $\sum a^{-kn}\cos a^n x$, which satisfies the hypothesis whatever p. If the conclusion were true, it would follow that a certain linear combination of the functions

$$\sum a^{-n}\cos a^n x, \qquad \sum a^{-n}\sin a^n x$$

has a derivative belonging to L^p, which is false.

6.6. Theorem 26. *If $p>1$, $0<k\leqq 1$, $f(x)$ belongs to L^p, and*

$$\int_a^b |f(x)-f(x-h)|^p\,dx = O(h^{pk}) \tag{6.61}$$

over every finite interval (a,b), then $f^\beta(x)$ exists for almost all x, and belongs to L^p, for every $\beta<k$, and

$$\int_a^b |f^\beta(x)-f^\beta(x-h)|^p\,dx = O(h^{p(k-\beta)}). \tag{6.62}$$

If the hypothesis is satisfied in o form, so is the conclusion.

We prove the theorem in the O form only. We have seen already that $f^\beta(x)$ exists and belongs to L^p (Theorem 21), and we have only to prove (6.62). Also, by (6.35),

$$\Gamma(1-\beta)f^\beta(x) = \beta \int_{-\infty}^{x} (f(x)-f(t)(x-t)^{-\beta-1}\,dt,$$

in the sense that the left hand side is the limit to which $\beta \int_{-\infty}^{x-\varepsilon}$ converges strongly with index p.

Writing now, as in Theorem 19, $g(x) = \Gamma(1-\beta)f^\beta(x)$, we have

$$\frac{1}{\beta}\Delta g(x) = -\int_h^\infty (f(x-h)-f(x-u))\,((u-h)^{-\beta-1}-u^{-\beta-1})\,du \tag{6.63}$$

$$+\int_h^\infty (f(x)-f(x-h))\,u^{-\beta-1}\,du + \int_0^h (f(x)-f(x-u))\,u^{-\beta-1}\,du$$

$$= J_1 + J_2 + J_3.$$

This equation is formally identical with (5.71) in the proof of Theorem 20, but now J_1 is a 'strong limit' of $\int_{h+\varepsilon}^\infty$, and J_3 is a strong limit of $\int_\varepsilon^h$.

We suppose $\varepsilon < h$, and write

$$J_1(\varepsilon) = -\int_{h+\varepsilon}^\infty (f(x-h)-f(x-u))\,((u-h)^{-\beta-1}-u^{-\beta-1})\,du,$$

$$J_3(\varepsilon) = \int_\varepsilon^h (f(x)-f(x-u))\,u^{-\beta-1}\,du.$$

We then have

$$\int_a^b |J_1|^p\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b |J_1(\varepsilon)|^p\,dx, \qquad \int_a^b |J_3|^p\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b |J_3(\varepsilon)|^p\,dx;$$

and it is sufficient to prove that

$$\int_a^b |J_1(\varepsilon)|^p\,dx = O(h^{p(k-\beta)}), \qquad \int_a^b |J_3(\varepsilon)|^p\,dx = O(h^{p(k-\beta)}), \tag{6.64}$$

$$\int_a^b |J_2|^p\,dx = O(h^{p(k-\beta)}), \tag{6.65}$$

the first two equations uniformly in ε, for (say) $0 < \varepsilon \leqq h$.

(i) We have

$$\left(\int_a^b |J_1(\varepsilon)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \left(\int_a^b dx\left(\int_{h+\varepsilon}^{\infty} |f(x-h)-f(x-u)|\,((u-h)^{-\beta-1}-u^{-\beta-1})\,du\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \int_{h+\varepsilon}^{\infty} ((u-h)^{-\beta-1}-u^{-\beta-1})\,du\left(\int_a^b |f(x-h)-f(x-u)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= O\left(\int_{h+\varepsilon}^{\infty} ((u-h)^{-\beta-1}-u^{-\beta-1})(u-h)^k\,du\right) = O\left(\int_h^{\infty}\right)$$

$$= O\left(h^{k-\beta}\int_1^{\infty}(w-1)^k\,((w-1)^{-\beta-1}-w^{-\beta-1})\,dw\right) = O(h^{k-\beta}),$$

since $k-\beta>0$, $k-\beta-1<0$; and uniformly in ε. This proves the first of (6.64).

(ii) Next we have

$$\left(\int_a^b |J_3(\varepsilon)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\int_a^b dx\left(\int_{\varepsilon}^{h} |f(x)-f(x-u)|\,u^{-\beta-1}\,du\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \int_{\varepsilon}^{h} u^{-\beta-1}\,du\left(\int_a^b |f(x)-f(x-u)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= O\left(\int_{\varepsilon}^{h} u^{k-\beta-1}\,du\right) = O\left(\int_0^h u^{k-\beta-1}\,du\right) = O(h^{k-\beta}),$$

uniformly in ε.

(iii) Finally

$$\beta|J_2| = h^{-\beta}|f(x)-f(x-h)|,$$

$$\int_a^b |J_2|^p\,dx = O\left(h^{-p\beta}\int_a^b |f(x)-f(x-h)|^p\,dx\right) = O(h^{p(k-\beta)}).$$

This completes the proof of Theorem 26 when $p>1$. The proof when $p=1$ is again the same in principle but simpler.

6.7. There are many further interesting questions concerning Lipschitz conditions and "integrated Lipschitz conditions" of the type (1.21). In particular we may ask whether a function which satisfies an integrated Lipschitz condition Lip.(p, k), necessarily satisfies other conditions

Lip. (p', k') with different indices, or a Lipschitz condition of the ordinary type. Some results in this direction have been proved by Titchmarsh [24]), and further results may be deduced as corollaries from the theorems which we have proved. A complete discussion, however, is very much facilitated by the use of complex function theory, and we postpone it to a later memoir. Our main result is that (1) *if* $p \geqq 1$ *and* $0 < k < \frac{1}{p}$, *then a function which belongs to* Lip. (k, p) *belongs also to* Lip. $\left(k - \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}, p'\right)$, *where* p' *is any number for which*

$$p < p' < \frac{p}{1 - kp};$$

(2) *if* $k > \frac{1}{p}$ *then it belongs to the class stated for* $p' > p$, *and is equivalent to a function of the class* Lip. $\left(k - \frac{1}{p}\right)$.[25]) The theorems proved in this memoir are not quite sufficient to establish this, and we appeal to a theorem in complex function theory, viz. that *a complex function which belongs to* Lip. (k, p) *on the unit circle, and whose Fourier series is of power series type* [26]), *is the boundary function of an analytic function* $f(z)$ *for which*

$$\int |f'(re^{i\theta})|^p \, d\theta = O\left(\frac{1}{(1-r)^{(1-k)p}}\right).$$

The classes Lip. (k, p) are also of interest in the convergence theory of Fourier series. If $k > \frac{1}{p}$ then $f(x)$ belongs (as just stated) to the class Lip. $\left(k - \frac{1}{p}\right)$, and its Fourier series is uniformly convergent [27]). The case $k = \frac{1}{p}$ is particularly interesting. We have in fact the very curious theorem that *if* $p \geqq 1$ *and*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta + h) - f(\theta - h)|^p \, d\theta = O(h),$$

---

[24]) Titchmarsh, **17**.

[25]) The limiting case $p' = \infty$.

[26]) See Hardy and Littlewood, **4**.

[27]) If $p \leqq 2$, *absolutely*; in fact $\sum |c_n|^\varkappa$, where c_n is the (complex) Fourier constant of $f(x)$, is convergent if

$$\varkappa > \frac{p}{pk + p - 1}.$$

This was first proved for $p = 2$ by Szász (**15**), and later generally by Titchmarsh (**17**). Szász, in his turn, was generalising a theorem of S. Bernstein (**1**). Titchmarsh proves the corresponding theorem for Fourier transforms.

The series is also summable $(C, -k + \delta)$ for every positive δ. That this is so for a function of Lip. k is proved by Zygmund, **19**.

and in particular if $f(\theta)$ *is the* $\frac{1}{p}$*-th integral of a function of* L^p*, then the Fourier series of* $f(\theta)$ *is convergent, and indeed summable* $\left(C, -\frac{1}{p}+\delta\right)$ *for every positive* δ*, wherever it is summable by any Cesàro mean.* For the Fourier series of such a function, the convergence problem (in the classical sense) admits of a complete solution[38]).

Memoirs and books referred to.

1. Bernstein, S.: Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, Comptes rendus, 8 June 1914.
2. Hardy, G. H.: Some properties of integrals of fractional order, Messenger of Mathematics **47** (1918), p. 145—150.
3. — Weierstrass's non-differentiable function, Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916), p. 301—325.
4. Hardy, G. H., and Littlewood, J. E.: Some properties of fractional integrals, Proc. London Math. Soc. (2), **24** (1925), p. xxxvii—xli (Records for 12 March 1925).
5. — — On Parseval's Theorem, Proc. London Math. Soc. (2), **26** (1927), p. 287—294.
6. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: The maximum of a certain bilinear form, Proc. London Math. Soc. (2), **25** (1926), p. 265—282.
7. Jordan, C.: Cours d'analyse, ed. 2, **3** (1896), p. 58—59.
8. Liouville, J.: Sur le calcul des différentielles à indices quelconques, Journal de l'École Polytechnique **13** (1832), p. 1—69.
9. Pollard, S.: On Parseval's Theorem, Proc. London Math. Soc. (2), **25** (1926), p. 237—246 (240).
10. Riemann, B.: Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation, Werke, p. 331—344.
11. Riesz, F.: Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Annalen **69** (1910), p. 449—497.
12. Riesz, M.: Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier, Comptes rendus, 28 April 1924.
13. — Sur les fonctions conjuguées, Math. Zeitschr. **27** (1927), p. 218—244.
14. Schlesinger, L., und Plessner, A., Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen, Berlin 1926.
15. Szász, O.: Über den Konvergenzexponenten der Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen, Münchener Sitzungsberichte (1922), p. 135—150.
16. Titchmarsh, E. C.: Reciprocal formulae for series and integrals, Math. Zeitschr. **25** (1926), p. 321—347.
17. — A note on Fourier transforms, Journal London Math. Soc. **2** (1927), p. 148—150.
18. Weyl, H.: Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung, Vierteljahrsschrift d. naturf. Ges. in Zürich, **62** (1917), p. 296—302.
19. Zygmund, A: Sur la sommabilité des séries de Fourier des fonctions vérifiant la condition de Lipschitz, Bulletin de l'Acad. de Cracovie (1925), p. 1—9.

---

[38]) We give proofs of all the theorems stated in § 6. 7 in a note 'A convergence criterion for Fourier series' which will be published in this journal later.

(Eingegangen am 21. Mai 1927.)

Über einen Einwand gegen das Newtonsche Attraktionsgesetz.

Ein Problem der Dynamik vollkommen inkohärenter, gravitierender Medien.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

---

§ 1.

Das Integral

$$\int_{\infty} \frac{1}{r} d\tau', \quad r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2, \quad d\tau' = dx'dy'dz',$$

erstreckt über den Gesamtraum der Variablen x', y', z', divergiert. Das Newtonsche Potential einer über den gesamten Euklidischen Raum ausgebreiteten homogenen Massenverteilung hat also keine bestimmte Bedeutung. Auch die Integrale

$$\int_{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \right| d\tau', \qquad \int_{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \right| d\tau', \qquad \int_{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \right| d\tau'$$

divergieren. Man hat hieraus gelegentlich den Schluß gezogen, bei der vorhin betrachteten Massenverteilung könnte man der Intensität des Gravitationsfeldes keinerlei bestimmten Wert zuschreiben. Da nun vom Standpunkte der klassischen Dynamik keinerlei Gründe vorzuliegen scheinen, die gegen das Vorhandensein beliebig weit entfernter Massen sprechen, so wäre das Newtonsche Attraktionsgesetz nicht haltbar. — Bei einer geeigneten, sehr naheliegenden Interpretation der Newtonschen Formeln erweist sich indessen die Feldintensität einer homogenen Massenverteilung als durchaus bestimmt und zwar aus Symmetriegründen überall gleich Null. Wird angenommen, daß das Geschwindigkeitsfeld zu einer Zeit t_0 ein alsbald näher präzisiertes Verhalten hat, insbesondere im Unendlichen homogen wird, so läßt sich, wie in dem folgenden gezeigt werden wird, die Bewegung des gesamten unendlichen Massensystems innerhalb eines hin-

reichend kleinen Zeitintervalls $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ in aller Strenge verfolgen. Das Newtonsche Attraktionsgesetz steht also mit dem Vorhandensein einer über den gesamten Raum ausgebreiteten, homogenen Massenverteilung nicht notwendig in Widerspruch. Durch dieses Resultat ist keineswegs etwas gegen die Einsteinsche Gravitationstheorie, die sich auf ganz andere Tatsachen physikalischer und erkenntnistheoretischer Natur stützt, ausgesagt. Natürlich werden durch die folgenden Ausführungen die Schwierigkeiten, die in der Konzeption eines unendlich ausgedehnten Euklidischen Raumes sowie eines aktual unendlichen Quantums Materie liegen, nicht berührt.

Dem Bewegungsproblem, das in diesem Aufsatz seine Erledigung findet, liegt ein kontinuierlich verteiltes, vollkommen inkohärentes, gravitierendes Medium zugrunde, d. h. ein Medium, dessen Teilchen zwar der universellen Attraktion unterworfen sind, sich im übrigen aber, voneinander ganz ungehindert, ohne Spannkräfte bewegen können. Ich habe schon vor einiger Zeit auf die Wichtigkeit der Dynamik vollkommen inkohärenter Medien in meiner Schrift, Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung. Mathematische Probleme in der Theorie der Figur der Himmelskörper. Leipzig 1923, hingewiesen und seitdem zwei in dieses Gebiet hineingehörende spezielle Probleme behandelt [1]).

Nun einiges allgemeine über die stetig verteilten, vollkommen inkohärenten Medien. Es sei $P_0(a, b, c)$ die Lage eines Teilchens des Mediums zur Zeit t_0, $P(x, y, z)$ seine Lage zur Zeit t, ϱ_0 die Dichte in P_0 im Augenblick t_0, ϱ die Dichte in P zur Zeit t, $d\tau_0$ ein Volumelement um P_0, $d\tau$ das von denselben Teilchen erfüllte (korrespondierende) Element um P. Wird, wie wir es tun wollen, vorausgesetzt, daß die Funktionen

$$(1) \qquad x = x(a, b, c, t), \qquad y = y(a, b, c, t), \qquad z = z(a, b, c, t)$$

stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben, so gilt für alle (a, b, c) in dem vom Medium zur Zeit t_0 erfüllten beschränkten Bereiche $T_0 + S_0$ und alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$

$$(2) \qquad \varrho \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \varrho_0$$

als Ausdruck der Unveränderlichkeit der Masse, die Kontinuitätsgleichung. Bis auf kleine Größen höherer Ordnung ist

$$(3) \qquad \varrho \, d\tau = \varrho_0 \, d\tau_0.$$

Wir setzen voraus, daß das Geschwindigkeitsfeld zur Zeit t_0,

$$u_0 = u_0(a, b, c), v_0, w_0,$$

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Figur der Himmelskörper. Vierte Abhandlung. Zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe. Math. Zeitschr. 17 (1923), S. 62–110; Fünfte Abhandlung. Neue Beiträge zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe, Festschrift für Hugo v. Seeliger, Berlin 1924, S. 200–227.

vorgegeben ist und nehmen zunächst an, daß auch die Komponenten der Einheitskraft, X, Y, Z, als Funktionen von x, y, z, t, bekannt sind. Es mögen etwa $X(x, y, z, t), \ldots$ Funktionen bezeichnen, die in einem Bereiche der Variablen x, y, z, der $T_0 + S_0$ ganz in seinem Innern enthält, und für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ erklärt und nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind. Die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X(x, y, z, t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y(x, y, z, t), \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z(x, y, z, t)$$

nebst Anfangsbedingungen

$$x = a, \; y = b, \; z = c; \; \frac{dx}{dt} = u_0, \; \frac{dy}{dt} = v_0, \; \frac{dz}{dt} = w_0,$$

zur Zeit t_0 bestimmen die Bewegung des Teilchens (a, b, c), worauf sich aus der Kontinuitätsgleichung die Dichte ϱ ergibt. Es handelt sich um ein elementares Problem der Auflösung eines Systems von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Anders ist die Lage, sobald die Einheitskraft in (x, y, z) zur Zeit t, wie es bei den gravitierenden Medien, die wir in dem folgenden ausschließlich betrachten wollen, zutrifft, von der gesamten augenblicklichen Massenverteilung abhängt. Die Bewegungsgleichungen nehmen alsdann die Form leicht anzugebender *Integro-Differentialgleichungen* an. Es sei T dasjenige zunächst als beschränkt vorausgesetzte Gebiet, das von dem Medium zur Zeit t erfüllt ist. Die Bewegungsgleichungen lauten jetzt augenscheinlich

$$(4) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \varkappa \int_T \varrho' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varkappa \int_T \varrho' \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau', \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \varkappa \int_T \varrho' \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau',$$

$$(5) \quad \varrho \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \varrho_0,$$

$$\left(r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \quad \varrho' = \varrho(x', y', z'), \right.$$
$$\left. d\tau' = dx'\, dy'\, dz', \quad \varkappa = \text{Gaußsche Gravitationskonstante}\right).$$

Für (4) kann man offenbar auch schreiben

$$(6) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \varkappa \int_{T_0} \varrho_0' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau_0', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varkappa \int_{T_0} \varrho_0' \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau_0', \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \varkappa \int_{T_0} \varrho_0' \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau_0',$$

$$(\varrho_0' = \varrho_0(a', b', c'), \quad d\tau_0' = da'\, db'\, dc').$$

Die Integralausdrücke in (6) sind über das von dem Medium zur Zeit t_0 erfüllte Gebiet T_0 erstreckt zu denken.

Es möge sich nunmehr um ein homogenes, $\varrho_0 = \text{konst.}$, den Gesamtraum der Variablen a, b, c zur Zeit t_0 erfüllendes Medium handeln. Wir

definieren die Komponenten der Einheitskraft im Punkte (a, b, c) durch die Grenzwerte

$$(7)\quad \lim_{r_0\to\infty} \varkappa\varrho_0 \int_{\mathfrak{K}_0} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r_0}\right) d\tau_0', \quad \lim_{r_0\to\infty} \varkappa\varrho_0 \int_{\mathfrak{K}_0} \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r_0}\right) d\tau_0', \quad \lim_{r_0\to\infty} \varkappa\varrho_0 \int_{\mathfrak{K}_0} \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r_0}\right) d\tau_0',$$
$$(r_0^2 = (a-a')^2 + (b-b')^2 + (c-c')^2)$$

unter $\mathfrak{K}_0$ einen Kugelkörper vom Radius r_0 um den Punkt (a, b, c) verstanden. Offenbar sind die fraglichen Grenzwerte gleich Null, die Gravitationskraft ist gleich Null.

Es möge allgemeiner eine Massenverteilung der Dichte $\varrho_0 + \bar{\varrho}(a, b, c)$ vorliegen, woselbst $\bar{\varrho}(a, b, c)$ eine überall stetige, im Unendlichen der Beziehung

$$(8)\qquad \bar{\varrho}(a, b, c) = O(R_0^{-2}), \qquad (R_0^2 = a^2 + b^2 + c^2)$$

genügende Funktion bezeichnet. Auch jetzt werden die Komponenten der Einheitskraft in (a, b, c) durch die Grenzwerte

$$(9)\qquad \lim_{r_0\to\infty} \varkappa \int_{\mathfrak{K}_0} (\varrho_0 + \bar{\varrho}') \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r_0}\right) d\tau_0', \quad \ldots \qquad \left(\bar{\varrho}' = \bar{\varrho}(a', b', c')\right)$$

definiert. Offenbar ist

$$(10)\quad \lim_{r_0\to\infty} \varkappa \int_{\mathfrak{K}_0} (\varrho_0 + \bar{\varrho}') \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r_0}\right) d\tau_0' = \lim_{r_0\to\infty} \varkappa \int_{\mathfrak{K}_0} \bar{\varrho}' \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r_0}\right) d\tau_0' = \varkappa \int_{\infty} \bar{\varrho}' \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r_0}\right) d\tau_0'.$$

Das über den Gesamtraum der Variablen (a, b, c) erstreckte Integral rechterhand ist übrigens, wie man unmittelbar sieht, unbedingt konvergent.

Durch ganz analoge Formeln werden die Komponenten der Anziehungskraft im Raume x, y, z erklärt, wenn die Dichte $\varrho(x, y, z)$ sich von einer Konstanten um eine stetige, im Unendlichen wie R^{-2}, $(R^2 = x^2 + y^2 + z^2)$ verschwindende Funktion unterscheidet. Wir nehmen an, daß die Dichte des Mediums in dem Zeitintervall $\langle t_0, t_0 + \hat{t}\rangle$ tatsächlich dieser Bedingung genügt.

Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$(11)\quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \varkappa \int_{\infty} \varrho' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau', \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \varkappa \int_{\infty} \varrho' \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau', \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \varkappa \int_{\infty} \varrho' \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau', \qquad \int_{\infty} = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathfrak{K}}, \end{aligned}$$

$$(12)\qquad \varrho \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \varrho_0,$$

unter $\mathfrak{K}$ eine Kugel um (x, y, z) als Mittelpunkt vom Radius r verstanden.

Wir präzisieren das Problem durch die folgenden Anfangsbedingungen.

Die Dichte ϱ_0 zur Zeit t_0 ist eine Konstante. Die Komponenten der Geschwindigkeit zur Zeit t_0

$$(13) \qquad u_0 = u_0(a, b, c), \qquad v_0 = v_0(a, b, c), \qquad w_0 = w_0(a, b, c)$$

sind Funktionen, die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind und Ungleichheiten von der Form

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial w_0}{\partial c}\right| \leqq \mathfrak{c}(1+R_0)^{-2},$$

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial a} - \left(\frac{\partial u_0}{\partial a}\right)^{\smile}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial w_0}{\partial c} - \left(\frac{\partial w_0}{\partial c}\right)^{\smile}\right| \leqq \mathfrak{c}\{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\breve{d}^{\lambda},$$

$$(14) \qquad \left(\frac{\partial u_0}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}u_0(a, b, c), \quad \left(\frac{\partial u_0}{\partial a}\right)^{\smile} = \frac{\partial}{\partial a}u_0(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c}),\right.$$

$$R_0^2 = a^2 + b^2 + c^2, \qquad \breve{R}_0^2 = \breve{a}^2 + \breve{b}^2 + \breve{c}^2,$$

$$\left.\breve{d}^2 = (a-\breve{a})^2 + (b-\breve{b})^2 + (c-\breve{c})^2, \quad 0 < \lambda < 1\right)$$

genügen. Offenbar konvergieren u_0, v_0, w_0 für $R_0 \to \infty$ gegen bestimmte Grenzwerte u_0^{∞}, v_0^{∞}, w_0^{∞}.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man

$$(15) \qquad u_0^{\infty} = v_0^{\infty} = w_0^{\infty} = 0$$

annehmen, da man den Bewegungsvorgang auf ein mit der Geschwindigkeit u_0^{∞}, v_0^{∞}, w_0^{∞} gleichförmig bewegtes Achsenkreuz beziehen kann. Aus (14) und (15) ergeben sich, wie man leicht sieht, die Ungleichheiten

$$(16) \qquad |u_0|, |v_0|, |w_0| \leqq \sqrt{3}\,\mathfrak{c}(1+R_0)^{-1}.$$

Die Integro-Differentialgleichungen (11) haben, wie in dem folgenden bewiesen wird, für alle t in einem hinreichend kleinen Intervall $\langle t_0, t_0 + \hat{t}\rangle$ eine den vorstehenden Anfangsbedingungen genügende Lösung. Die durch die Gleichung (12) bestimmte Dichte ϱ unterscheidet sich, wie es sich dabei zeigt, tatsächlich von einer Konstanten um eine im Unendlichen wie R^{-2} verschwindende Funktion. Die gefundene Lösung ist die einzige, die gewissen, später anzugebenden Stetigkeitsbedingungen genügt.

Durch das vorstehende Resultat ist gezeigt, daß das Newtonsche Attraktionsgesetz mit Vorhandensein einer über den gesamten Raum ausgebreiteten, homogenen Massenverteilung nicht notwendig in Widerspruch steht. Eine andere Frage ist, ob sich im gleichen Sinne das Newtonsche Gravitationsgesetz mit dem Vorhandensein unendlich vieler gleich großer, punktförmiger Massen, die in den Eckpunkten eines geeigneten, dreifach ausgedehnten unendlichen Gitters angebracht sind, im Einklang bringen läßt. Wie Herr A. Wintner in einer vor kurzem erschienenen Note zeigte[2]), ist auch diese Frage im bejahenden Sinne zu beantworten.

[2]) Vgl. A. Wintner, Über gewisse Eigenschwingungen mit kontinuierlichem Spektrum. Dritte Mitteilung. Annalen der Physik (4) 82 (1927), S. 67–74.

Die Methode von Herrn Wintner stützt sich auf gewisse neue Sätze über Lösungen von Systemen unendlich vieler gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. Das in dieser Arbeit zur Durchführung gelangende Verfahren benutzt wesentlich die folgenden potentialtheoretischen Hilfssätze, die ich in einer vor kurzem erschienenen Arbeit abgeleitet habe[3]).

I. Es sei $\vartheta(x, y, z)$ eine überall stetige, den Beziehungen

$$(17)\qquad \begin{gathered} |\vartheta(x,y,z)| \leqq \mathfrak{a}(1+R)^{-2}, \\ |\vartheta(x,y,z)-\vartheta(\breve{x},\breve{y},\breve{z})| \leqq \mathfrak{a}\{(1+R)^{-2-\lambda}+(1+\breve{R})^{-2-\lambda}\}\breve{D}^{\lambda} \\ \left(R^2=x^2+y^2+z^2,\ \breve{R}^2=\breve{x}^2+\breve{y}^2+\breve{z}^2,\ \breve{D}^2=(x-\breve{x})^2+(y-\breve{y})^2+(z-\breve{z})^2,\right. \\ \left. 0<\lambda<1, \quad \mathfrak{a} \text{ konstant}\right) \end{gathered}$$

genügende Funktion. *Der Integralausdruck*

$$(18)\qquad Q(x,y,z)=\int \vartheta' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau',$$

erstreckt über den Gesamtraum der Variablen x, y, z, genügt den Beziehungen

$$(19)\qquad \begin{gathered} |Q(x,y,z)| \leqq \alpha\mathfrak{a}(1+R)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z)\right| \leqq \alpha\mathfrak{a}(1+R)^{-2}, \\ \left|\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z)-\frac{\partial}{\partial \breve{x}}Q(\breve{x},\breve{y},\breve{z})\right| \leqq \alpha\mathfrak{a}\{(1+R)^{-2-\lambda}+(1+\breve{R})^{-2-\lambda}\}\breve{D}^{\lambda} \\ (\alpha \text{ konstant}). \end{gathered}$$

II. Es mögen $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$; $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ Funktionen von a, b, c bezeichnen, die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind und die Ungleichheiten von der Form

$$(20)\qquad \begin{gathered} |\dot{\xi}|, \ldots, |\hat{\zeta}| \leqq \Omega_0; \quad \left|\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial c}\right| \leqq \Omega_0; \\ \left|\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial a}-\left(\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial a}\right)^{\breve{}}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial c}-\left(\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial c}\right)^{\breve{}}\right| \leqq \Omega_0\breve{d}^{\lambda}; \end{gathered}$$

$$(21)\qquad |\hat{\xi}-\dot{\xi}|, \ldots, |\hat{\zeta}-\dot{\zeta}| \leqq \Omega; \quad \left|\frac{\partial}{\partial a}(\hat{\xi}-\dot{\xi})-\left(\frac{\partial}{\partial a}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right)^{\breve{}}\right|, \ldots \leqq \Omega\breve{d}^{\lambda},$$

$$\Omega \leqq \frac{1}{2}\Omega_0$$

genügen. In (20) bezeichnet Ω_0 einen Wert $\leqq \frac{1}{4}$. Wie sich leicht zeigen läßt, bestimmen die Gleichungen

$$(22)\qquad \dot{x}=a+\dot{\xi}, \ \dot{y}=b+\dot{\eta}, \ \dot{z}=c+\dot{\zeta}; \ \hat{x}=a+\hat{\xi}, \ \hat{y}=b+\hat{\eta}, \ \hat{z}=c+\hat{\zeta}$$

[3]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. III. Bericht der Math.-Phys. Klasse der Sächs. Akademie der Wissenschaften 78 (1926), S. 214–239

topologische Abbildungen des Raumes a, b, c auf die Räume $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ und $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.[4]) Es sei

$$\dot{\vartheta}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \hat{\vartheta}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \vartheta(a, b, c), \tag{23}$$

$$\dot{Q}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \int \dot{\vartheta}' \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{\dot{r}}\right) d\dot{\tau}', \qquad \hat{Q}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \int \hat{\vartheta}' \frac{\partial}{\partial \hat{x}}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) d\hat{\tau}' \tag{24}$$

mit

$$\dot{r}^2 = (\dot{x} - \dot{x}')^2 + (\dot{y} - \dot{y}')^2 + (\dot{z} - \dot{z}')^2, \quad \hat{r}^2 = (\hat{x} - \hat{x}')^2 + (\hat{y} - \hat{y}')^2 + (\hat{z} - \hat{z}')^2.$$

Es gelten dann für alle den Ungleichheiten (17), (20), (21) *genügenden* $\vartheta; \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}; \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ *gleichmäßig Abschätzungen von der Form*

$$|\hat{Q} - \dot{Q}| \leqq \beta\, \mathfrak{a}\, \Omega (1 + R_0)^{-1}; \quad \left|\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{Q} - \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \dot{Q}\right| \leqq \beta\, \mathfrak{a}\, \Omega (1 + R_0)^{-2},$$

$$\begin{aligned} &\left|\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{Q} - \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \dot{Q}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{Q} - \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \dot{Q}\right)^{\smile}\right| \\ &\qquad \leqq \beta\, \mathfrak{a}\, \Omega \{(1 + R_0)^{-2-\lambda} + (1 + \breve{R}_0)^{-2-\lambda}\} \breve{d}^{\lambda} \qquad (\beta \text{ konstant}). \end{aligned} \tag{25}$$

Analoge Ungleichheiten gelten für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial z}$ sowie die Ausdrücke, die man erhält, wenn man in (16) für $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$ entsprechend $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)$ oder $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$ setzt.

Ungleichheiten von der Form (25) gelten, auch wenn statt von den Beziehungen (23) von den allgemeineren Beziehungen

$$\begin{aligned} &\dot{\vartheta}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \vartheta(a, b, c), \\ &|\hat{\vartheta}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) - \dot{\vartheta}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})| \leqq \gamma\, \mathfrak{a}\, \Omega (1 + R_0)^{-2}, \\ &|(\hat{\vartheta}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) - \dot{\vartheta}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})) - (\hat{\vartheta}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) - \dot{\vartheta}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}))^{\smile}| \\ &\qquad \leqq \gamma\, \mathfrak{a}\, \Omega \{(1 + R_0)^{-2-\lambda} + (1 + \breve{R}_0)^{-2-\lambda}\} \breve{d}^{\lambda} \qquad (\gamma \text{ konstant}) \end{aligned} \tag{26}$$

ausgegangen wird.

§ 2.

Der Existenzbeweis der Lösung wird durch sukzessive Approximationen geführt. In der ersten Näherung setzen wir die Geschwindigkeitskomponenten des Teilchens (a, b, c) gleich

$$u_1(a, b, c, t) = u_0, \qquad v_1(a, b, c, t) = v_0, \qquad w_1(a, b, c, t) = w_0. \tag{27}$$

[4]) Man vergleiche die Ausführungen auf S. 148—152 meiner Arbeit, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. II. Berichte der Math.-Phys. Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften 78 (1926), S. 147—212. Übrigens genügt es, damit die durch (22) erklärten Abbildungen umkehrbar eindeutig und stetig seien, daß die Funktionen $\dot{\xi}, \ldots, \hat{\zeta}$ stetige Ableitungen erster Ordnung haben und diese Ableitungen Ungleichheiten von der Form $\left|\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial c}\right| \leqq \Omega_0 \leqq \frac{1}{4}$ erfüllen.

Das betrachtete Teilchen nimmt zur Zeit t die Lage (x_1, y_1, z_1) mit

$$(28)\quad x_1 = a + u_0(t-t_0),\quad y_1 = b + v_0(t-t_0),\quad z_1 = c + w_0(t-t_0)$$

an. Die Dichte in der gleichen Näherung bestimmt sich aus der Gleichung

$$(29)\qquad \varrho_1 \frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(a, b, c)} = \varrho_0.$$

Wir finden

$$(30)\qquad \bar{\varrho}_1 = \varrho_1 - \varrho_0 = \varrho_0 \frac{1 - \frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(a, b, c)}}{\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(a, b, c)}}.$$

Wegen (28), (14) und (16) ist augenscheinlich

$$|x_1 - a|, \ldots, |z_1 - c| \leqq \sqrt{3}\,\mathfrak{c}(t-t_0)(1+R_0)^{-1};$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_1 - a)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(z_1 - c)\right| \leqq \mathfrak{c}(t-t_0)(1+R_0)^{-2};$$

$$(31)\quad \left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_1 - a)\right) - \breve{\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_1 - a)\right)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{c}(t-t_0)\{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\breve{d}^{\lambda}.$$

Durch die Formeln (28) wird gewiß für alle t in $\langle t_0, t_0 + \frac{1}{4\mathfrak{c}}\rangle$ eine topologische Abbildung des Raumes (a, b, c) auf den Raum der Variablen (x_1, y_1, z_1) erklärt[5]). Wie eine einfache Abschätzung lehrt, ist für alle t in $\langle t_0, t_0 + \frac{1}{4\mathfrak{c}}\rangle$

$$\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(a, b, c)} > \frac{1}{4},$$

mithin

$$(32)\qquad |\varrho_1 - \varrho_0| < 4\varrho_0 \left|1 - \frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(a, b, c)}\right|$$

und nach Entwicklung der Jacobischen Determinante wegen (31)

$$(33)\qquad |\bar{\varrho}_1| = |\varrho_1 - \varrho_0| \leqq \alpha_1 \mathfrak{c}(t-t_0)(1+R_0)^{-2},$$

unter α_1 eine Konstante verstanden, wie später unter $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Des weiteren findet man ohne Mühe die für alle $t - t_0 \leqq \frac{1}{4\mathfrak{c}}$ gültigen Ungleichheitsbeziehungen

$$(34)\quad |\varrho_1 - \breve{\varrho}_1| \leqq \alpha_2 \mathfrak{c}(t-t_0)\{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\breve{d}^{\lambda}.$$

Wegen (31) finden wir sogleich weiter für alle (a, b, c) und $(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})$ und alle $t - t_0 \leqq \frac{1}{4\mathfrak{c}}$ gleichmäßig

$$(35)\qquad \frac{1}{1+\alpha_3} \leqq \frac{1+R}{1+R_0} \leqq 1 + \alpha_3, \qquad \frac{1}{1+\alpha_3} \leqq \frac{D}{\breve{D}} \leqq 1 + \alpha_3.$$[6])

[5]) Vgl. die Schlußbemerkungen der Fußnote [4]).

[6]) Vgl. die analogen Betrachtungen loc. cit. [3]) S. 233.

In den Formeln (33) und (34) kann man darum $1+R_0$, $1+R_0$, $\breve{d}$ entsprechend durch $1+R$, $1+\breve{R}$, $\breve{D}$ ersetzen. Für α_1 und α_2 treten dabei neue Koeffizienten

$$\alpha_4 = \alpha_1(1+\alpha_3)^2, \quad \alpha_5 = \alpha_2(1+\alpha_3)^{2+\lambda} \tag{36}$$

ein.

Die Einheitskraft im Punkte (x_1, y_1, z_1) in der ersten Näherung bestimmt sich zu

$$\mathfrak{X}_1 = \varkappa \int_{\infty_1} \varrho_1' \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r_1}\right) d\tau_1', \quad \mathfrak{Y}_1 = \varkappa \int_{\infty_1} \varrho_1' \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{r_1}\right) d\tau_1', \quad \mathfrak{Z}_1 = \varkappa \int_{\infty_1} \varrho_1' \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{r_1}\right) d\tau_1', \tag{37}$$

$$\varrho_1' = \varrho_1(x_1', y_1', z_1'), \qquad r_1^2 = (x_1 - x_1')^2 + (y_1 - y_1')^2 + (z_1 - z_1')^2,$$

$$d\tau_1' = dx_1' dy_1' dz_1', \qquad \int_{\infty_1} = \lim_{r_1 \to \infty} \int_{\mathfrak{K}_1},$$

wo $\mathfrak{K}_1$ einen Kugelkörper vom Radius r_1 um den Punkt (x_1, y_1, z_1) bezeichnet. Wie wir schon wissen, kann man für (37) auch setzen

$$\mathfrak{X}_1 = \varkappa \int_{\infty_1} \bar{\varrho}_1' \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r_1}\right) d\tau_1', \quad \mathfrak{Y}_1 = \varkappa \int_{\infty_1} \bar{\varrho}_1' \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{r_1}\right) d\tau_1', \quad \mathfrak{Z}_1 = \varkappa \int_{\infty_1} \bar{\varrho}_1' \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{r_1}\right) d\tau_1', \tag{38}$$

wo die Integrale rechterhand unbedingt konvergieren. Die Komponenten der Einheitskraft $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1$ sind Funktionen von x_1, y_1, z_1, t und vermöge (28) Funktionen von a, b, c, t. Dem am Schluß des § 1 angegebenen Hilfssatz I zufolge ist

$$|\mathfrak{X}_1|, |\mathfrak{Y}_1|, |\mathfrak{Z}_1| \leqq \alpha_6 \mathfrak{c}(t-t_0)(1+R_0)^{-1};$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \mathfrak{Z}_1}{\partial c}\right| \leqq \alpha_6 \mathfrak{c}(t-t_0)(1+R_0)^{-2}; \tag{39}$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial a} - \left(\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial a}\right)^{\breve{}}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \mathfrak{Z}_1}{\partial c} - \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}_1}{\partial c}\right)^{\breve{}}\right| \leqq \alpha_6 \mathfrak{c}(t-t_0)\{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\breve{d}^{\lambda}.$$

Wir gehen jetzt zu der zweiten Approximation über.

Die Geschwindigkeitskomponenten des Teilchens (a, b, c) zur Zeit t bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\frac{du_2}{dt} = \mathfrak{X}_1 = \varkappa \int_{\infty_1} \bar{\varrho}_1' \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r_1}\right) d\tau_1', \qquad \frac{dv_2}{dt} = \mathfrak{Y}_1 = \varkappa \int_{\infty_1} \bar{\varrho}_1' \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{r_1}\right) d\tau_1',$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \mathfrak{Z}_1 = \varkappa \int_{\infty_1} \bar{\varrho}_1' \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{r_1}\right) d\tau_1', \tag{40}$$

zu

$$u_2(a, b, c, t) = u_0 + \varkappa \int_{t_0}^{t} dt \int_{\infty_1} \bar{\varrho}_1' \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r_1}\right) d\tau_1', \ldots, \tag{41}$$

die Lage des betrachteten Teilchens im Zeitpunkt t errechnet sich aus den Formeln

$$(42)\quad x_2 = x_2(a,b,c,t) = a + \int_{t_0}^{t} u_2\,dt = a + \varkappa \int_{t_0}^{t} d\bar{t} \int_{t_0}^{\bar{t}} d\underline{t} \int_{\infty_1} \bar{\varrho}_1' \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r_1}\right) d\tau_1', \ldots.$$

Für hinreichend kleine Werte von $t - t_0$ wird durch die Formeln (42) gewiß eine topologische Abbildung des Raumes a, b, c auf den Raum x_2, y_2, z_2 erklärt. Für die Dichte in der zweiten Näherung, ϱ_2, erhalten wir den Wert

$$(43)\quad \varrho_2 = \varrho_0 + \bar{\varrho}_2 = \varrho_0 \Big/ \frac{\partial(x_2, y_2, z_2)}{\partial(a,b,c)}.$$

Wie vorhin ist

$$(44)\quad \begin{aligned} &|\bar{\varrho}_2| = |\varrho_2 - \varrho_0| \leqq \alpha_7\, \mathfrak{c}\,(t - t_0)(1 + R_0)^{-2}, \\ &|\varrho_2 - \breve{\varrho}_2| \leqq \alpha_7\, \mathfrak{c}\,(t - t_0)\{(1 + R_0)^{-2-\lambda} + (1 + \breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Desgleichen ist mit

$$(45)\quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_2 = \varkappa \int_{\infty_2} \bar{\varrho}_2' \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{r_2}\right) d\tau_2', \qquad \mathfrak{Y}_2 = \varkappa \int_{\infty_2} \bar{\varrho}_2' \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{1}{r_2}\right) d\tau_2', \\ \mathfrak{Z}_2 = \varkappa \int_{\infty_2} \bar{\varrho}_2' \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{1}{r_2}\right) d\tau_2', \end{aligned}$$

wie sich leicht zeigen läßt,

$$(46)\quad \begin{aligned} &|\mathfrak{X}_2|, |\mathfrak{Y}_2|, |\mathfrak{Z}_2| \leqq \alpha_8\, \mathfrak{c}\,(t - t_0)(1 + R_0)^{-1}, \\ &\left|\frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \mathfrak{Z}_2}{\partial c}\right| \leqq \alpha_8\, \mathfrak{c}\,(t - t_0)(1 + R_0)^{-2}, \\ &\left|\frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial a} - \breve{\left(\frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial a}\right)}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \mathfrak{Z}_2}{\partial c} - \breve{\left(\frac{\partial \mathfrak{Z}_2}{\partial c}\right)}\right| \leqq \alpha_8\, \mathfrak{c}\,(t - t_0)\{(1 + R)^{-2-\lambda} \\ &\qquad + (1 + \breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda}. \end{aligned}$$

In der dritten Approximation erhalten wir in naheliegender Schreibweise

$$\frac{du_3}{dt} = \mathfrak{X}_2 = \varkappa \int_{\infty_2} \bar{\varrho}_2' \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{r_2}\right) d\tau_2', \ldots;$$

$$(47)\quad u_3 = u_0 + \int_{t_0}^{t} \mathfrak{X}_2\,dt, \ldots; \qquad x_3 = a + \int_{t_0}^{t} u_3\,dt, \ldots;$$

$$\varrho_3 \frac{\partial(x_3, y_3, z_3)}{\partial(a,b,c)} = \varrho_0, \qquad \varrho_3 = \varrho_0 + \bar{\varrho}_3,$$

$$\mathfrak{X}_3 = \varkappa \int_{\infty_3} \bar{\varrho}_3' \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{r_3}\right) d\tau_3', \ldots.$$

Man kann so ungehindert zu der vierten und den weiteren Näherungen übergehen, sofern sich für hinreichend kleine $t - t_0$ allemal eine topologische Abbildung des Raumes a, b, c auf den Raum der Variablen x_4, y_4, z_4; x_5, y_5, z_5 usw. ergibt. Wie wir jetzt zeigen werden, gibt es einen Wert $\hat{t} \leqq \frac{1}{8\mathfrak{c}}$, so daß für alle $t - t_0 \leqq \hat{t} \leqq \frac{1}{8\mathfrak{c}}$ und alle n durch die Formeln

$$(48) \quad x_n = x_n(a, b, c, t), \qquad y_n = y_n(a, b, c, t), \qquad z_n = z_n(a, b, c, t)$$

der Raum a, b, c auf den Raum der Variablen der n-ten Approximation, x_n, y_n, z_n, umkehrbar eindeutig und stetig abgebildet wird. Wir beweisen weiter, daß x_n, y_n, z_n für $n \to \infty$ gleichmäßig konvergieren. Die Grenzfunktionen $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ sind Lösungen des Problems. Wir gelangen zu dem gewünschten Nachweise durch Betrachtung der Differenzen $x_{n+1} - x_n$, $y_{n+1} - y_n$, $z_{n+1} - z_n$.

Es gelten in naheliegender Schreibweise für alle $n \geqq 2$ die Formeln

$$(49) \quad \begin{aligned} \frac{du_n}{dt} = \mathfrak{X}_{n-1} &= \varkappa \int_{\infty_{n-1}} \bar{\varrho}'_{n-1} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \left(\frac{1}{r_{n-1}}\right) d\tau'_{n-1}, \\ u_n &= u_0 + \int_{t_0}^{t} \mathfrak{X}_{n-1}\, dt, \qquad x_n = a + \int_{t_0}^{t} u_n\, dt, \\ \frac{du_{n+1}}{dt} = \mathfrak{X}_n &= \varkappa \int_{\infty_n} \bar{\varrho}'_n \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{1}{r_n}\right) d\tau'_n, \\ u_{n+1} &= u_0 + \int_{t_0}^{t} \mathfrak{X}_n\, dt, \qquad x_{n+1} = a + \int_{t_0}^{t} u_{n+1}\, dt \end{aligned}$$

nebst analogen Beziehungen für $\frac{dv_n}{dt}, \frac{dw_n}{dt}, v_n, \ldots, z_{n+1}$. Es möge nun für alle $n \leqq l \geqq 2$ und alle t in $\langle t_0, t_0 + \hat{t}\rangle$, $\hat{t} \leqq \frac{1}{8\mathfrak{c}}$, unter Ω^* einen Wert $\geqq 2\mathfrak{c}$ verstanden,

$$(50) \quad \begin{aligned} &|u_n|, |v_n|, |w_n| \leqq \Omega^*(1 + R_0)^{-1}; \left|\frac{\partial u_n}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial w_n}{\partial c}\right| \leqq \Omega^*(1 + R_0)^{-2}, \\ &\left|\frac{\partial u_n}{\partial a} - \left(\frac{\partial u_n}{\partial a}\right)^{\smile}\right|, \ldots \leqq \Omega^*\{(1 + R_0)^{-2-\lambda} + (1 + \breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\, \breve{d}^{\lambda} \end{aligned}$$

sein. Augenscheinlich ist dann auch

$$\begin{aligned} &|x_n - a|, |y_n - b|, |z_n - c| \leqq \Omega^*(t - t_0)(1 + R_0)^{-1}, \\ &\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a)\right|, \left|\frac{\partial x_n}{\partial b}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(z_n - c)\right| \leqq \Omega^*(t - t_0)(1 + R_0)^{-2}, \\ &\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a) - \left(\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a)\right)^{\smile}\right|, \ldots \leqq \Omega^*(t - t_0)\{(1 + R_0)^{-2-\lambda} + (1 + \breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\, \breve{d}^{\lambda}, \end{aligned}$$

mithin, sofern wir $\hat{t} \leqq \frac{1}{4\Omega^*} \leqq \frac{1}{8c}$ festsetzen,

$$|x_n - a|,\ |y_n - b|,\ |z_n - c| \leqq \tfrac{1}{4}(1+R_0)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(z_n - c)\right| \leqq \tfrac{1}{4}(1+R_0)^{-2}, \tag{52}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a) - \breve{\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a)\right)}\right|, \ldots \leqq \tfrac{1}{4}\{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda}.$$

Durch die Formeln (48) ist gewiß eine topologische Abbildung des Raumes a, b, c auf den Raum der Variablen x_n, y_n, z_n erklärt[7]). Die Dichte in der n-ten Approximation, ϱ_n, ergibt sich aus der Gleichung

$$\varrho_n = \varrho_0 \Big/ \frac{\partial(x_n, y_n, z_n)}{\partial(a, b, c)}. \tag{53}$$

Wie man leicht verifiziert, ist

$$\left|\frac{\partial(x_n, y_n, z_n)}{\partial(a, b, c)}\right| > \frac{1}{4}, \tag{54}$$

mithin

$$|\bar{\varrho}_n| = |\varrho_n - \varrho_0| < 4\varrho_0\left\{1 - \frac{\partial(x_n, y_n, z_n)}{\partial(a, b, c)}\right\}$$

und, nach Entwicklung der Determinante, wegen (51)

$$|\bar{\varrho}_n| \leqq \alpha_9 \Omega^*(t - t_0)(1+R_0)^{-2} \tag{55}$$

sowie

$$|\varrho_n - \breve{\varrho}_n| \leqq \alpha_{10}\Omega^*(t - t_0)\{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda}. \tag{56}$$

Es möge nun weiter für alle t in $\langle t_0, t_0 + \hat{t}\rangle$

$$|x_l - x_{l-1}|, \ldots \leqq \Omega(1+R_0)^{-1}; \quad \left|\frac{\partial x_l}{\partial a} - \frac{\partial x_{l-1}}{\partial a}\right|, \ldots \leqq \Omega(1+R_0)^{-2};$$

$$\left|\left(\frac{\partial x_l}{\partial a} - \frac{\partial x_{l-1}}{\partial a}\right) - \breve{\left(\frac{\partial x_l}{\partial a} - \frac{\partial x_{l-1}}{\partial a}\right)}\right|, \ldots \leqq \Omega\{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}, \tag{57}$$

$$\left(\Omega \leqq \tfrac{1}{8}\right)$$

gelten. Aus

$$(\varrho_l - \varrho_{l-1})\frac{\partial(x_l, y_l, z_l)}{\partial(a, b, c)}\frac{\partial(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})}{\partial(a, b, c)} = \frac{\partial(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})}{\partial(a, b, c)} - \frac{\partial(x_l, y_l, z_l)}{\partial(a, b, c)}$$

folgt wegen (54) und (57)

$$16\,|\varrho_l - \varrho_{l-1}| \leqq \alpha_{11}\varrho_0\Omega(1+R_0)^{-2}, \tag{58}$$

$$16\,|(\varrho_l - \varrho_{l-1}) - \breve{(\varrho_l - \varrho_{l-1})}| \leqq \alpha_{12}\varrho_0\Omega\{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda}$$

---

[7]) Vgl. die Ausführungen der Fußnote [4]). Die a. a. O. auftretende Größe Ω_0 hat im Augenblick den Wert $\frac{1}{4}$.

und, den am Schluß der Einleitung angegebenen Hilfssätzen gemäß,

$$
\begin{aligned}
&|\mathfrak{X}_{l-1}|, \ldots, |\mathfrak{X}_l|, \ldots \leqq \alpha_{13}\varrho_0(1+R_0)^{-1};\\
&\left|\frac{\partial \mathfrak{X}_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \mathfrak{X}_l}{\partial x_l}\right|, \ldots \leqq \alpha_{14}\varrho_0(1+R_0)^{-2};\\
&\left|\frac{\partial \mathfrak{X}_{l-1}}{\partial x_{l-1}} - \left(\frac{\partial \mathfrak{X}_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)^{\smile}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \mathfrak{X}_l}{\partial x_l} - \left(\frac{\partial \mathfrak{X}_l}{\partial x_l}\right)^{\smile}\right|, \ldots\\
&\qquad \leqq \alpha_{15}\varrho_0\{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda},
\end{aligned}
\tag{59}
$$

sowie ferner

$$
\begin{aligned}
&|\mathfrak{X}_l - \mathfrak{X}_{l-1}|, \ldots \leqq \alpha_{16}\varrho_0\Omega(1+R_0)^{-1};\\
&\left|\frac{\partial \mathfrak{X}_l}{\partial x_l} - \frac{\partial \mathfrak{X}_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right|, \ldots \leqq \alpha_{17}\varrho_0\Omega(1+R_0)^{-2};\\
&\left|\left(\frac{\partial \mathfrak{X}_l}{\partial x_l} - \frac{\partial \mathfrak{X}_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right) - \left(\frac{\partial \mathfrak{X}_l}{\partial x_l} - \frac{\partial \mathfrak{X}_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)^{\smile}\right|, \ldots\\
&\qquad \leqq \alpha_{18}\varrho_0\Omega\{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda}.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

[8])

Beachtet man, daß z. B.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}(\mathfrak{X}_l - \mathfrak{X}_{l-1}) &= \frac{\partial \mathfrak{X}_l}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial a} + \frac{\partial \mathfrak{X}_l}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial a} + \frac{\partial \mathfrak{X}_l}{\partial z_l}\frac{\partial z_l}{\partial a} - \frac{\partial \mathfrak{X}_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\frac{\partial x_{l-1}}{\partial a} - \frac{\partial \mathfrak{X}_{l-1}}{\partial y_{l-1}}\frac{\partial y_{l-1}}{\partial a} - \frac{\partial \mathfrak{X}_{l-1}}{\partial z_{l-1}}\frac{\partial z_{l-1}}{\partial a}\\
&= \left(\frac{\partial \mathfrak{X}_l}{\partial x_l} - \frac{\partial \mathfrak{X}_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)\frac{\partial x_l}{\partial a} + \frac{\partial \mathfrak{X}_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\left(\frac{\partial x_l}{\partial a} - \frac{\partial x_{l-1}}{\partial a}\right) + \ldots
\end{aligned}
$$

ist, so findet man wegen (52), (57), (59) und (60)

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial a}(\mathfrak{X}_l - \mathfrak{X}_{l-1})\right|, \ldots \leqq \alpha_{19}\varrho_0\Omega(1+R_0)^{-2};\\
&\left|\frac{\partial}{\partial a}(\mathfrak{X}_l - \mathfrak{X}_{l-1}) - \left(\frac{\partial}{\partial a}(\mathfrak{X}_l - \mathfrak{X}_{l-1})\right)^{\smile}\right|, \ldots\\
&\qquad \leqq \alpha_{20}\varrho_0\Omega\{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda}.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Aus (49) ergibt sich nunmehr für $n = l$ mit Rücksicht auf (60) und (61)

$$
\begin{aligned}
&|u_{l+1} - u_l|, \ldots \leqq \alpha_{16}\varrho_0\Omega(t-t_0)(1+R_0)^{-1};\\
&\left|\frac{\partial}{\partial a}(u_{l+1} - u_l)\right|, \ldots \leqq \alpha_{19}\varrho_0\Omega(t-t_0)(1+R_0)^{-2};\\
&\left|\frac{\partial}{\partial a}(u_{l+1} - u_l) - \left(\frac{\partial}{\partial a}(u_{l+1} - u_l)\right)^{\smile}\right|, \ldots\\
&\qquad \leqq \alpha_{20}\varrho_0\Omega(t-t_0)\{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda}
\end{aligned}
\tag{62}
$$

---

[8]) Die a. a. O. eingeführte Größe Ω_0 hat jetzt den Wert $\frac{1}{4}$.

und hieraus

$$
\begin{aligned}
&|x_{l+1}-x_l|,\ \ldots \leqq \tfrac{1}{2}\alpha_{16}\varrho_0\,\Omega\,(t-t_0)^2(1+R_0)^{-1};\\
&\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)\right|,\ \ldots \leqq \tfrac{1}{2}\alpha_{19}\varrho_0\,\Omega\,(t-t_0)^2(1+R_0)^{-2};\\
&\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)-\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)\right)^{\smile}\right|,\ \ldots\\
&\qquad\leqq \tfrac{1}{2}\alpha_{20}\varrho_0\,\Omega\,(t-t_0)^2\{(1+R_0)^{-2-\lambda}+(1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda}.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Wählt man

$$
\hat{t}\leqq \operatorname{Min}\left(\frac{1}{4\,\Omega^*},\ \frac{1}{2\,\alpha_{16}\varrho_0},\ \frac{1}{2\,\alpha_{19}\varrho_0},\ \frac{1}{2\,\alpha_{20}\varrho_0},\ 1\right),
\tag{64}
$$

so findet man

$$
\begin{aligned}
&|u_{l+1}-u_l|,\ \ldots \leqq \tfrac{1}{2}\,\Omega\,(1+R_0)^{-1},\\
&\left|\frac{\partial}{\partial a}(u_{l+1}-u_l)\right|,\ \ldots \leqq \tfrac{1}{2}\,\Omega\,(1+R_0)^{-2},\\
&\left|\frac{\partial}{\partial a}(u_{l+1}-u_l)-\left(\frac{\partial}{\partial a}(u_{l+1}-u_l)\right)^{\smile}\right|,\ \ldots\\
&\qquad\leqq \tfrac{1}{2}\,\Omega\{(1+R_0)^{-2-\lambda}+(1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda}
\end{aligned}
\tag{65}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
&|x_{l+1}-x_l|,\ \ldots \leqq \tfrac{1}{2}\,\Omega\,(1+R_0)^{-1};\\
&\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)\right|,\ \ldots \leqq \tfrac{1}{2}\,\Omega\,(1+R_0)^{-2};\\
&\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)-\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)\right)^{\smile}\right|,\ \ldots\\
&\qquad\leqq \tfrac{1}{2}\,\Omega\{(1+R_0)^{-2-\lambda}+(1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda}.
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Nach (33), (34) und (41) ist augenscheinlich für alle t in $\langle t_0, t_0+\hat{t}\rangle$, sofern $\hat{t}$ hinreichend klein, etwa $\leqq \bar{t}$ ist,

$$
\begin{aligned}
&|u_2-u_1|=|u_2-u_0|\leqq \tfrac{\mathfrak{c}}{2}(1+R_0)^{-1};\ \left|\frac{\partial}{\partial a}(u_2-u_1)\right|,\ \ldots \leqq \tfrac{\mathfrak{c}}{2}(1+R_0)^{-2};\\
&\left|\frac{\partial}{\partial a}(u_2-u_1)-\left(\frac{\partial}{\partial a}(u_2-u_1)\right)^{\smile}\right|,\ \ldots \leqq \tfrac{\mathfrak{c}}{2}\{(1+R_0)^{-2-\lambda}+(1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda}
\end{aligned}
\tag{67}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
&|x_2-x_1|\leqq \tfrac{\mathfrak{c}}{2}(1+R_0)^{-1}(t-t_0);\quad \left|\frac{\partial}{\partial a}(x_2-x_1)\right|,\ \ldots \leqq \tfrac{\mathfrak{c}}{2}(1+R_0)^{-2}(t-\\
&\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_2-x_1)-\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_2-x_1)\right)^{\smile}\right|,\ \ldots \leqq \tfrac{\mathfrak{c}}{2}(t-t_0)\{(1+R_0)^{-2-\lambda}+(1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}
\end{aligned}
\tag{68}
$$

Analoge Ungleichheiten gelten für $y_2 - y_1$; $z_2 - z_1$; $v_2 - v_1$; $w_2 - w_1$. Aus (65), (66), (67) und (68) folgt für alle

$$\hat{t} \leqq \operatorname{Min}\left(\bar{t},\ \frac{1}{4\,\Omega^*},\ \frac{1}{2\,\alpha_{16}\,\varrho_0},\ \frac{1}{2\,\alpha_{19}\,\varrho_0},\ \frac{1}{2\,\alpha_{20}\,\varrho_0},\ 1\right) \tag{69}$$

$$\begin{aligned} |u_{l+1}| &\leqq |u_1| + |u_2 - u_1| + \ldots + |u_{l+1} - u_l| \\ &\leqq (1+R_0)^{-1}\left\{\mathfrak{c} + \frac{\mathfrak{c}}{2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^l \mathfrak{c}\right\} < (1+R_0)^{-1}\cdot 2\,\mathfrak{c} < (1+R_0)^{-1}\,\Omega^*, \end{aligned} \tag{70}$$

und analog

$$\left|\frac{\partial u_{l+1}}{\partial a}\right| \leqq \left|\frac{\partial u_1}{\partial a}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial a}(u_2 - u_1)\right| + \ldots + \left|\frac{\partial}{\partial a}(u_{l+1} - u_l)\right| < (1+R_0)^{-2}\,\Omega^*,$$

sowie

$$\left|\frac{\partial u_{l+1}}{\partial a} - \left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial a}\right)^{\smile}\right| < \Omega^*\{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda}. \tag{71}$$

Aus (70) und (71) folgt wegen $x_{l+1} = a + \int_{t_0}^{t} u_{l+1}\,dt$ sogleich

$$|x_{l+1} - a| \leqq (1+R_0)^{-1}(t-t_0)\,\Omega^* \leqq (1+R_0)^{-1}\,\Omega^*;$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1} - a)\right|, \ldots \leqq (1+R_0)^{-2}\,\Omega^*;$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1} - a) - \left(\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1} - a)\right)^{\smile}\right|, \ldots \leqq \Omega^*\{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\,\breve{d}^{\lambda}.$$

Die Beziehungen (51) und (52) gelten also, sofern $\hat{t}$ (69) genügt, für alle n. Die unendlichen Reihen

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots; \quad \frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial a}(x_2 - x_1) + \frac{\partial}{\partial a}(x_3 - x_2) + \ldots;$$

$$u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots; \quad \frac{\partial u_1}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial a}(u_2 - u_1) + \frac{\partial}{\partial a}(u_3 - u_2) + \ldots;$$

. . . . . .

konvergieren, wie man unmittelbar sieht, wie geometrische Reihen mit dem Quotenten $\frac{1}{2}$.

Wir setzen

$$\begin{aligned} x(a,b,c,t) &= x_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(x_n - x_{n-1}), \quad y(a,b,c,t) = y_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(y_n - y_{n-1}), \\ z(a,b,c,t) &= z_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(z_n - z_{n-1}), \\ u(a,b,c,t) &= u_1 + \Sigma(u_n - u_{n-1}), \quad v(a,b,c,t) = v_1 + \Sigma(v_n - v_{n-1}), \\ w(a,b,c,t) &= w_1 + \Sigma(w_n - w_{n-1}), \end{aligned} \tag{73}$$

Die Funktionen $x(a, b, c, t), \ldots$; $u = \frac{dx}{dt}, \ldots$ haben offenbar stetige par-

tielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf die Ortsvariablen und erfüllen die Ungleichheiten

$$
\begin{gathered}
|x-a|,\ |y-b|,\ |z-c| \leqq \Omega^*(t-t_0)(1+R_0)^{-1};\\
\left|\frac{\partial}{\partial a}(x-a)\right|,\ \left|\frac{\partial x}{\partial b}\right|,\ldots,\ \left|\frac{\partial}{\partial c}(z-c)\right| \leqq \Omega^*(t-t_0)(1+R_0)^{-2};\\
\left|\frac{\partial}{\partial a}(x-a)-\breve{\left(\frac{\partial}{\partial a}(x-a)\right)}\right|,\ldots \leqq \Omega^*(t-t_0)\{(1+R_0)^{-2-\lambda}+(1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\breve{d}^{\lambda}.
\end{gathered}
\tag{74}
$$

sowie

$$
\begin{gathered}
|u|,\ |v|,\ |w| \leqq \Omega^*(1+R_0)^{-1};\\
\left|\frac{\partial u}{\partial a}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial w}{\partial c}\right| \leqq \Omega^*(1+R_0)^{-2};\\
\left|\frac{\partial u}{\partial a}-\breve{\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)}\right|,\ldots \leqq \Omega^*\{(1+R_0)^{-2-\lambda}+(1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\breve{d}^{\lambda}.
\end{gathered}
\tag{75}
$$

Sie erfüllen die Integro-Differentialgleichungen (11) und (12). Man überzeugt sich hiervon ohne Mühe, wenn man in (49) zur Grenze, $n\to\infty$, übergeht und den Hilfssatz II am Schluß der Einleitung beachtet. Sie sind die einzigen Lösungen des Problems, die für hinreichend kleine Werte von $t-t_0$ Ungleichheiten von der Form (75) und (76) erfüllen. Man überzeugt sich hiervon durch Betrachtung der Differenzen $\bar{x}-x_n$, $\bar{y}-y_n$, $\bar{z}-z_n$, wo $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ Lösungen von (11) und (12), die jene Eigenschaften haben, x_n, y_n, z_n aber die vorhin eingeführten Näherungslösungen bezeichnen. Man findet $\lim(\bar{x}-x_n)=\lim(\bar{y}-y_n)=\lim(\bar{z}-z_n)=0$ für $n\to\infty$, somit

$$\bar{x}=x,\quad \bar{y}=y,\quad \bar{z}=z,$$

w. z. b. w.

Leipzig, im November 1926.

(Eingegangen am 1. Dezember 1926.)

Über die Clairautsche Differentialgleichung.

Von

E. Kamke in Tübingen.

Einleitung.

Die Clairautsche Differentialgleichung[1])

$$y = y'x + f(y')$$

ist bekanntlich stets lösbar, wie verzwickt auch die Funktion $f(t)$ sein möge. Denn für jede Stelle c, an der $f(t)$ überhaupt definiert ist, ist ja

$$y = cx + f(c)$$

ein Integral der Differentialgleichung, und offenbar ist auch jedes lineare Integral von dieser Gestalt. Es fragt sich nun, ob es noch andere, nichtlineare Integrale gibt und wie man sämtliche Integrale erhält. Diese Frage nach der Existenz nichtlinearer Integrale wird in der mir zugänglich gewesenen Lehrbuchliteratur mit einer Ausnahme[2]) unbedenklich bejaht. Die Überlegungen, die zur Begründung für diese Behauptung angeführt werden, sind dabei formaler Natur und vielfach so weit von dem entfernt, was man unter einem stichhaltigen Beweise versteht[3]), daß demgegenüber das Fehlen besonders formulierter Voraussetzungen über $f(t)$ fast als weniger erheblich erscheinen könnte und daß ich glaube, mich hier mit diesem Hinweis begnügen zu dürfen.

Herr Bieberbach (a. a. O.) führt als einziger wirkliche Voraussetzungen an, und zwar setzt er über $f(t)$ anfangs voraus, daß diese Funktion eine stetige Ableitung, und später, daß sie eine zweite nicht-verschwindende Ableitung hat. Bei der zweiten Voraussetzung kann in der Tat gezeigt

---

[1]) Es handelt sich hier um Differentialgleichungen im Bereiche *reeller* Funktionen.

[2]) L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, 2. Aufl., Berlin 1926, S. 20.

[3]) Auch noch manche andere Dinge in der Theorie der Differentialgleichungen leiden unter ähnlicher Vernachlässigung.

werden, daß die Differentialgleichung die bekannten Integralkurven (eine Geradenschar und deren Enveloppe) besitzt. Der Nachweis dagegen, daß es außer diesen keine Integrale gibt, wenn man sich auf solche beschränkt, die noch eine stetige zweite Ableitung haben, wird von Herrn Bieberbach nur auf die erste Voraussetzung gestützt und vermag dem Wortlaut nach nicht zu befriedigen. Da aber die Ausführungen a. a. O. möglicherweise auch nur dazu dienen sollen, plausibel zu machen, wie man auf die Funktionen kommt, von denen man nachträglich zeigen kann, daß sie Integrale sind, sei hier davon Abstand genommen, die für einen Beweis unbefriedigenden Stellen herauszupräparieren.

Ich werde im folgenden zeigen, daß die Existenz eines nichtlinearen Integrals auch unter einer weniger weit reichenden Bedingung als der von Herrn Bieberbach eingeführten bewiesen werden kann (§ 2), § 3 enthält Beispiele dafür; sodann werde ich zeigen, daß die hier eingeführte Bedingung nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die Existenz nichtlinearer Integrale ist (§ 5) und daß die im § 2 aufgeführten Integrale unter den dort angegebenen Bedingungen *sämtliche* Integrale der Differentialgleichung sind (§ 6). Endlich werde ich in § 7 zeigen, in welcher Beziehung die in § 1 eingeführten Funktionen mit monotoner dissoziierter Ableitung zu den konvexen bzw. konkaven Funktionen stehen.

§ 1.

Es sei ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall[4]) τ_1, τ_2 und in diesem Intervall eine Funktion $f(t)$ gegeben, die in jedem Punkte des Intervalls sowohl eine linke wie eine rechte Ableitung $f'_-(t)$ bzw. $f'_+(t)$ hat[5]). Um wieder zu einer eindeutigen Punktfunktion zu gelangen, denke ich mir das Intervall an den Stellen t, an welchen $f'_-(t) \neq f'_+(t)$ ist, doppelt mit Punkten überdeckt und nenne den einen t_- und den andern t_+. Unter t verstehe ich irgendeinen der Punkte t_- oder t_+ oder t, wenn keine Aufspaltung stattgefunden hat. Für diese Punkte t des *„dissoziierten Intervalls“* τ_1, τ_2 setze ich eine Ordnung dadurch fest, daß $\mathfrak{t} < \bar{\mathfrak{t}}$ sein soll, sowohl wenn $\mathfrak{t} = t_\pm$ oder t, $\bar{\mathfrak{t}} = \bar{t}_\pm$ oder $\bar{t}$ und zugleich $t < \bar{t}$ ist, als auch wenn $\mathfrak{t} = t_-$, $\bar{\mathfrak{t}} = t_+$ ist. In diesem dissoziierten Intervall τ_1, τ_2 wird nun eine eindeutige Funktion dadurch definiert, daß jedem t_- die linke Ableitung $f'_-(t)$, jedem t_+ die rechte Ableitung $f'_+(t)$ und jedem nicht

[4]) Als Zahlen, insbesondere also als Werte von Variablen, Funktionen und Ableitungen sind nur endliche Zahlen zugelassen. Jedoch für die nicht zum Intervall selber gehörenden Grenzen (also bei offenen und halboffenen Intervallen) werden auch $-\infty$ bzw. $+\infty$ zugelassen.

[5]) In den etwa zum Intervall gehörenden Grenzpunkten des Intervalls natürlich nur eine einseitige Ableitung.

aufgespaltenen t die Ableitung $f'(t)$ zugeordnet wird. Die so definierte Funktion wird mit $f'(t)$ bezeichnet und *„dissoziierte Ableitung"* von $f(t)$ im Intervall τ_1, τ_2 genannt.

Es sei t ein Punkt des Intervalls τ_1, τ_2. Dann ist die Menge der Zahlen s, die zwischen $f'_-(t)$ und $f'_+(t)$ liegen (diese Grenzen selber ausgeschlossen), ein offenes Intervall oder leer. Die Vereinigungsmenge aller dieser für $\tau_1 < t < \tau_2$ entstehenden Mengen ist daher offen oder leer. Diese Menge sei mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet und *„Sprungmenge"* genannt. Dann gelten folgende Verallgemeinerungen bekannter Sätze der Differentialrechnung:

Hilfssatz 1. Es seien $t_1 < t_2$ zwei dem Intervall τ_1, τ_2 angehörende Zahlen. Dann gibt es ein t_0, so daß $t_1 < t_0 < t_2$ ist und

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} \tag{1}$$

zwischen $f'_-(t_0)$ und $f'_+(t_0)$ liegt (Gleichheit zugelassen). Wenn also der Wert des Differenzenquotienten (1) nicht zur Sprungmenge $\mathfrak{S}$ gehört, gibt es im Innern des dissoziierten Intervalls t_1, t_2 ein t_0, so daß

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} = f'(t_0)$$

ist.

Beweis. Es werde, wie üblich,

$$g(t) = f(t) - (t-t_1)\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

gesetzt. Es hat dann auch $g(t)$ im ganzen Intervall eine dissoziierte Ableitung und ist daher stetig. Ferner ist

$$g(t_2) = g(t_1) = f(t_1).$$

Daher hat $g(t)$ im Innern von $\langle t_1, t_2\rangle$ ein Maximum oder ein Minimum; ich will etwa das Vorliegen eines Maximums annehmen, und zwar an der Stelle t_0. Dann ist

$$\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\begin{cases}\leqq 0 & \text{für } t > t_0,\\ \geqq 0 & \text{für } t < t_0,\end{cases}$$

also

$$g'_+(t_0) \leqq 0, \qquad g'_-(t_0) \geqq 0,$$

also

$$f'_+(t_0) \leqq \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} \leqq f'_-(t_0).$$

Entsprechend läuft der Beweis, wenn $g(t)$ an der Stelle t_0 ein Minimum hat.

Hilfssatz 2. Es seien $t_1 < t_2$ irgend zwei dem dissoziierten Intervall τ_1, τ_2 angehörende Punkte und A irgendeine der Sprungmenge $\mathfrak{S}$ nicht

angehörende Zahl zwischen $f'(t_1)$ und $f'(t_2)$, diese Grenzen selber ausgenommen. Dann gibt es ein t_0, so daß $t_1 < t_0 < t_2$ und

$$f'(t_0) = A$$

ist.

Beweis. Wie üblich bilde ich die Hilfsfunktion

$$g(t) = f(t) - At.$$

Diese Funktion hat wieder im ganzen Intervall eine dissoziierte Ableitung und ist stetig. Da die Sprungmenge $\mathfrak{T}$ der Funktion $g'(t)$ aus $\mathfrak{S}$ entsteht, indem jede Zahl von $\mathfrak{S}$ um A vermindert wird, gehört die Zahl 0 nicht zu $\mathfrak{T}$. Ferner haben $g'(t_1)$ und $g'(t_2)$, da A zwischen $f'(t_1)$ und $f'(t_2)$ liegt, verschiedene Vorzeichen, es sei etwa $g'(t_1) > 0$, $g'(t_2) < 0$. Dann ist, wenn t_1 und t_2 über t_1 bzw. t_2 liegen, jedenfalls $t_1 < t_2$, da sonst 0 der Menge $\mathfrak{T}$ angehören würde. Weiter kann $g'_+(t_1) > 0$ und $g'_-(t_2) < 0$ angenommen werden. Daher hat $g(t)$ im Innern des Intervalls $\langle t_1, t_2 \rangle$ ein Maximum, etwa an einer Stelle t_0. Dann ergibt sich wie bei Hilfssatz 1

$$g'_+(t_0) \leqq 0, \quad g'_-(t_0) \geqq 0.$$

Da 0 nicht zur Menge $\mathfrak{T}$ gehört, muß in diesen Ungleichungen an mindestens einer Stelle das Gleichheitszeichen gelten. Damit ist aber für den Fall $g'(t_1) > 0$ die Behauptung bewiesen. Für $g'(t_1) < 0$ ergibt sie sich in entsprechender Weise.

Die dissoziierte Ableitung $f'(t)$ soll in τ_1, τ_2 *monoton* genannt werden, wenn aus $t_1 < t_2$ entweder für das ganze dissoziierte Intervall stets $f'(t_1) \leqq f'(t_2)$ oder für das ganze Intervall $f'(t_1) \geqq f'(t_2)$ folgt. Gilt hierin niemals das Gleichheitszeichen, so sage ich, daß $f'(t)$ *monoton im engeren Sinne* sei.

Es ist klar, daß jede Funktion $f(t)$ mit monotoner Ableitung im üblichen Sinne auch eine monotone dissoziierte Ableitung hat.

Ferner ist die Funktion $f(t)$, wenn sie eine monotone dissoziierte Ableitung besitzt, an höchstens abzählbar vielen Stellen nicht im üblichen Sinne differenzierbar. Nimmt nämlich $f'(t)$ z. B. monoton zu, so läßt sich jeder Stelle t, an der $f(t)$ nicht im üblichen Sinne differenzierbar ist, ein Intervall

$$f'_-(t) < u < f'_+(t)$$

zuordnen. Wegen der Monotonie von $f'(t)$ überdecken diese Intervalle einander nicht. Daher gibt es höchstens abzählbar viele solcher Intervalle und, da die Zuordnung der Intervalle zu den Stellen, an denen $f(t)$ nicht differenzierbar ist, ebenfalls wegen der Monotonie von $f(t)$ eineindeutig ist, auch höchstens abzählbar viele Stellen t, an denen $f'_-(t) \neq f'_+(t)$ ist.

§ 2.

Es möge $f(t)$ im offenen Intervall (τ_1, τ_2) definiert sein und eine im engeren Sinne monotone dissoziierte Ableitung haben. Dann hat die Differentialgleichung

$$y = y'x + f(y') \tag{2}$$

sicher folgende Integrale:

a) *die linearen Funktionen*

$$y = cx + f(c), \tag{3}$$

wo c eine Konstante mit $\tau_1 < c < \tau_2$ ist;

b) *die Funktion, die geometrisch folgendermaßen beschrieben werden kann*[6]*: man legt die durch*[7])

$$\begin{cases} x = -f'(t), \\ y = -tf'(t) + f(t) \end{cases} \tag{4}$$

für die t des dissoziierten Intervalls (τ_1, τ_2) bestimmten Punkte x, y fest und schließt die Lücken, die, falls vorhanden, über offenen Intervallen der x-Achse liegen, indem man die über den Randpunkten dieser Intervalle liegenden Punkte x, y geradlinig verbindet;

c) *die Funktionen, die aus* b) *entstehen, indem von einem oder beiden Enden der Kurve* b) *ein Stück abgeschnitten und durch die Tangenten in den neuen Endpunkten ersetzt wird.*

Offenbar bedarf nur die b) betreffende Behauptung eines Beweises. Es sei $\overline{\mathfrak{S}}$ die Sprungmenge von $-f'(t)$. Es werde weiter für alle t in (τ_1, τ_2) [8])

$$a = \underline{\text{fin}}\,\{-f'(t)\}, \qquad b = \overline{\text{fin}}\,\{-f'(t)\}$$

gesetzt. Da $f'(t)$ monoton im engeren Sinne ist, folgt in Verbindung mit Hilfssatz 2, daß durch die erste Zeile von (4) die x der Menge $(a, b) - \overline{\mathfrak{S}}$ und die t des dissoziierten Intervalls (τ_1, τ_2) einander eindeutig zugeordnet sind. Daher ist y durch die beiden Gleichungen (4) als eindeutige Funktion von x für alle x der Menge $(a, b) - \overline{\mathfrak{S}}$ definiert. Ist dagegen x ein Punkt von $\overline{\mathfrak{S}}$, so gibt es genau ein t_0, so daß x zwischen $-f'_-(t_0)$ und $-f'_+(t_0)$ liegt, und es wird dann

$$y(x) = y_1 + (x - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{5}$$

---

[6]) Für die genauere analytische Formulierung siehe den Anfang des Beweises.

[7]) In (4) bedeutet t den Punkt, durch dessen eventuelle Aufspaltung t entstanden ist.

[8]) Es sei $\underline{\text{fin}}$ bzw. $\overline{\text{fin}}$ zur Abkürzung für die untere bzw. obere Grenze gesetzt.

gesetzt, wobei

$$x_1 = -f'_-(t_0), \qquad y_1 = -t_0 f'_-(t_0) + f(t_0),$$
$$x_2 = -f'_+(t_0), \qquad y_2 = -t_0 f'_+(t_0) + f(t_0)$$

sein soll. Setzt man diese Größen in (5) ein, so erhält man übrigens

$$y(x) = t_0 x + f(t_0) \tag{6}$$

für alle zwischen x_1 und x_2 inkl. liegenden Zahlen x. Damit ist $y(x)$ für alle x des Intervalls (a, b) eindeutig definiert.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $y(x)$ differenzierbar ist und der Differentialgleichung (2) genügt. Gehört x_0 zu $\overline{\mathfrak{S}}$, d. h. liegt x_0 zwischen einem Paar der soeben eingeführten Zahlen x_1 und x_2, so folgt aus (6) sofort $y'(x_0) = t_0$ und, wenn man in (6) t_0 durch den Wert $y'(x_0)$ ersetzt, weiter, daß $y(x)$ in der Punktmenge $\overline{\mathfrak{S}}$ die Differentialgleichung erfüllt. Ist x_0 dagegen Endpunkt dieses Intervalls, so ergibt sich wenigstens noch

$$y'_+(x_0) = t_0, \quad \text{wenn } x_0 \text{ linker Endpunkt,}$$

und

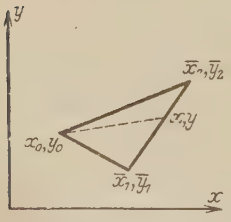
$$y'_-(x_0) = t_0, \quad \text{wenn } x_0 \text{ rechter Endpunkt}$$

des Intervalls mit den Endpunkten x_1 und x_2 ist.

Es sei nun x_0 ein Punkt in (a, b), der weder innerer Punkt noch linker Endpunkt eines der $\overline{\mathfrak{S}}$ bildenden Intervalle ist. Dann ist zu zeigen, daß

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \tag{7}$$

existiert. Dabei liegt x eventuell noch in Intervallen, die zu $\overline{\mathfrak{S}}$ gehören. Es möge ein derartiges Intervall die Endpunkte $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ haben. Wenn x in diesem Intervall liegt, so liegt der Punkt x, y auf der Verbindungsstrecke der Punkte $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ und $\bar{x}_2, \bar{y}_2$; da überdies die ganze Figur sich rechts von x_0, y_0 befindet, erkennt man sofort, daß der Differenzenquotient $\frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}$ zwischen den Differenzenquotienten $\frac{y(\bar{x}_2) - y(x_0)}{\bar{x}_2 - x_0}$ und $\frac{y(\bar{x}_1) - y(x_0)}{\bar{x}_1 - x_0}$ liegt. Es genügt daher, die Existenz von (7) für solche x zu beweisen, die nicht zur Menge $\overline{\mathfrak{S}}$ gehören. Zu jedem derartigen x ist aber vermöge (4) genau ein t zugeordnet. Aus (4) folgt dann



$$\frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = t - \frac{\{f(t) - f(t_0)\} - (t - t_0) f'(t_0)}{f'(t) - f'(t_0)}.$$

Nach Hilfssatz 1 gibt es zwischen t_0 und t eine Zahl τ, so daß $f(t) - f(t_0)$ zwischen $(t - t_0) f'_-(\tau)$ und $(t - t_0) f'_+(\tau)$, also wegen der Monotonie von

$f'(t)$ auch zwischen $(t-t_0)f'(t_0)$ und $(t-t_0)f'(t)$ liegt. Daher ist

$$\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0} = t-(t-t_0)\vartheta, \tag{8}$$

wo $0<\vartheta<1$ ist. Da nun durch die erste Zeile von (4) zwischen den x der Menge $(a,b)-\bar{\mathfrak{S}}$ und den t eine eineindeutige Zuordnung hergestellt wird und da $f'(t)$ monoton im engeren Sinne ist, ist $t \to t_0$ mit $x \to x_0$. Daher folgt aus (8)

$$y'_+(x_0) = t_0.$$

Ebenso ergibt sich für den Fall, daß x_0 weder innerer Punkt noch rechter Endpunkt eines der Intervalle von $\bar{\mathfrak{S}}$ ist,

$$y'_-(x_0) = t_0.$$

Damit ist gezeigt, daß an jeder Stelle des Intervalls (a,b) die Funktion $y(x)$ differenzierbar ist. Trägt man den für $y'(x_0)$ erhaltenen Wert t_0 in (4) ein, so erhält man wieder

$$y(x_0) = y'(x_0)\,x_0 + f(y'(x_0)),$$

d. h. $y(x)$ erfüllt für das ganze Intervall (a,b) die Differentialgleichung (2).

§ 3.

Beispiel 1. Es sei

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 & \text{für } t \leqq 0, \\ -\frac{1}{2}t^2 - t & \text{für } t \geqq 0. \end{cases}$$

Dann lauten die Gleichungen (4) des § 2

$$x = \begin{cases} t, \\ t+1, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, \\ \frac{1}{2}t^2. \end{cases}$$

Da die erste Zeile für $t \leqq 0$, die zweite für $t \geqq 0$ gilt, ist hierdurch y für $x \leqq 0$ bzw. $x \geqq 1$ bestimmt. Man erhält

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \leqq 0, \\ 0 & \text{für } 0 \leqq x \leqq 1, \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 & \text{für } x \geqq 1. \end{cases}$$

Beispiel 2. Es sei auf der Halbgeraden $t>0$ eine Menge $\mathfrak{J}$ von elementenfremden Intervallen $\langle a_\nu, b_\nu \rangle$ gegeben (also z. B. die Komplementärmenge einer perfekten Menge, wobei allerdings die offenen Intervalle der

Komplementärmenge zu abgeschlossenen ergänzt sind). Es möge $\chi_\nu(x)$ für $\nu = 1, 2, \ldots$ eine im Intervall $\langle a_\nu, b_\nu \rangle$ definierte Funktion sein, die für $x = a_\nu$ den Wert 0 hat und für die

$$\sum_{b_\nu \leqq T} |\chi_\nu(b_\nu)|$$

für jedes $T > 0$ konvergiert. Dann sei

$$\sum_{b_\nu \leqq T} \chi_\nu(b_\nu) + \vartheta \chi_\mu(T) = \begin{cases} \sum\limits_{b_\nu \leqq T} \chi_\nu(b_\nu) \\ \text{bzw.} \\ \sum\limits_{b_\nu \leqq T} \chi_\nu(b_\nu) + \chi_\mu(T), \end{cases}$$

je nachdem T keinem Intervall von $\mathfrak{J}$ oder dem Intervall $\langle a_\mu, b_\mu \rangle$ als innerer Punkt angehört.

Weiter setze ich jetzt voraus, daß

$$\sum_{\nu} (b_\nu - a_\nu) \text{ divergiert.}$$

Dann gibt es zu jedem $t > 0$ mindestens ein T, so daß

$$\sum_{b_\nu \leqq T} (b_\nu - a_\nu) + \vartheta (T - a_\mu) = t \tag{9}$$

ist. Es werde nun

$$f(t) = \sum_{b_\nu \leqq T} (b_\nu^2 - a_\nu^2) + \vartheta (T^2 - a_\mu^2) \tag{10}$$

gesetzt[9]). Die durch (10) definierte Funktion $f(t)$ ist dann eine eindeutige Funktion von t für alle $t > 0$.

Ich will zeigen, daß diese Funktion $f(t)$ eine im engeren Sinne monotone dissoziierte Ableitung hat.

Zunächst weise ich die Existenz von $f'_+(t)$ nach. Die zu einem t_0 durch (9) zugeordnete Zahl T_0 werde für diesen Zweck möglichst groß gewählt. Dann sind folgende beiden Fälle denkbar:

a) T_0 gehört einem Intervall $\langle a_\mu, b_\mu \rangle$ als linker Endpunkt oder innerer Punkt an;

b) in jeder rechtsseitigen Umgebung von T_0 liegen unendlich viele Intervalle von $\mathfrak{J}$.

Im Fall a) sind für alle hinreichend nahe an t_0 gelegenen $t > t_0$ die in (10) für $f(t_0)$ und $f(t)$ vorkommenden Summen dieselben, und es ist $t - t_0 = T - T_0$. Daher ist

[9]) D. h. es sind aus der Parabel t^2 die zu den Punkten von $\mathfrak{J}$ gehörenden Stücke herausgeschnitten und unter Anwendung einer Parallelverschiebung nach links unten aneinandergeheftet.

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \frac{(T^2-a_\mu^2)-(T_0^2-a_\mu^2)}{t-t_0}$$

$$= T+T_0 \to 2T_0 \quad \text{für} \quad t \to t_0.$$

Es ist also

$$f'_+(t_0) = 2T_0.$$

Im Fall b) ist nach (9)

$$t-t_0 = \sum_{b_\nu \leqq T}(b_\nu - a_\nu) + \vartheta(T-a_\mu) - \sum_{b_\nu \leqq T_0}(b_\nu - a_\nu)$$

$$= \sum_{T_0 < b_\nu \leqq T}(b_\nu - a_\nu) + \vartheta(T-a_\mu),$$

wobei $\vartheta(T-a_\mu)$ gleich $T-a_\mu$ oder 0 ist, je nachdem T einem Intervall (a_μ, b_μ) angehört oder nicht. Da sich ebenso der Ausdruck für $f(t)-f(t_0)$ vereinfachen läßt, wird

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \frac{\sum_{T_0 < b_\nu \leqq T}(b_\nu^2 - a_\nu^2) + \vartheta(T^2-a_\mu^2)}{\sum_{T_0 < b_\nu \leqq T}(b_\nu - a_\nu) + \vartheta(T-a_\mu)}.$$

In Zähler und Nenner sind die einzelnen Glieder positiv, wenn man das ϑ enthaltende Glied, falls es Null ist, fortläßt. Ferner konvergieren die Summen absolut, und die Intervalle, deren Grenzen vorkommen, liegen sämtlich rechts von T_0. Daher ist

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \begin{cases} \leqq \overline{\operatorname{fin}}_{T_0 < a_\nu < b_\nu \leqq T} \left\{ \frac{b_\nu^2 - a_\nu^2}{b_\nu - a_\nu}, \frac{T^2-a_\nu^2}{T-a_\nu} \right\} \leqq 2T, \\ \geqq \underline{\operatorname{fin}}_{T_0 < a_\nu < b_\nu \leqq T} \left\{ \frac{b_\nu^2 - a_\nu^2}{b_\nu - a_\nu}, \frac{T^2-a_\nu^2}{T-a_\nu} \right\} \geqq 2T_0. \end{cases}$$

Da $T \to T_0$ mit $t \to t_0$, ist also

$$f'_+(t_0) = 2T_0.$$

Für den Nachweis der Existenz von $f'_-(t_0)$ hat man die zu t_0 zugeordnete Zahl $\overline{T}_0$ möglichst klein zu wählen. Es ergibt sich dann

$$f'_-(t_0) = 2\overline{T}_0.$$

Da $\overline{T}_0 \leqq T_0$ ist, ist stets

$$f'_-(t_0) \leqq f'_+(t_0).$$

Da für $t_2 > t_1$ offenbar auch beide Zahlen T_1 und $\overline{T}_1$ kleiner als jede der Zahlen T_2 und $\overline{T}_2$ ist, ist der Nachweis erbracht, daß $f'(t)$ für alle $t > 0$ existiert und im engeren Sinne monoton zunimmt.

Daher hat für die durch (10) definierte Funktion $f(t)$ die Differentialgleichung

$$y = y'x + f(y')$$

ein für $x < 0$ definiertes nichtlineares Integral.

§ 4.

Es sei $y(x)$ für $a < x < b$ ein Integral der Differentialgleichung (2). *Dann ist $y'(x)$ für $a < x < b$ eine monotone und stetige Funktion von x.*[10])

Zum Beweise dieser Behauptung leite ich den folgenden Hilfssatz ab:

Hilfssatz 3. Es sei $y(x)$ im Intervall (a, b) ein Integral der Differentialgleichung (2) und möge an den Stellen $x_1 < x_2$ des Intervalls dieselbe Ableitung p haben. Dann ist $y' = p$ im ganzen Intervall $\langle x_1, x_2 \rangle$.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist

$$\begin{aligned} y(x_1) &= p x_1 + f(p), \\ y(x_2) &= p x_2 + f(p), \end{aligned} \tag{11}$$

also

$$\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = p,$$

d. h. die Kurve $y = y(x)$ hat an den beiden Stellen dieselbe Tangente. Das zwischen den beiden Punkten $x_1, y(x_1)$ und $x_2, y(x_2)$ liegende Stück der Tangente werde mit T bezeichnet. Es sei $\mathfrak{M}$ die dem abgeschlossenen Intervall $\langle x_1, x_2 \rangle$ angehörende Menge von Punkten x, für die $x, y(x)$ auf T liegt. Da $y(x)$ als differenzierbare Funktion stetig ist, ist $\mathfrak{M}$ abgeschlossen. Ich muß zeigen, daß $\mathfrak{M}$ gerade das ganze Intervall $\langle x_1, x_2 \rangle$ ist. In der Tat, gäbe es in diesem Intervall einen nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Punkt ξ, so wäre $x_1 < \xi < x_2$, und es gäbe ein größtes offenes Intervall (α, β), das ξ enthielte, aber keinen Punkt von $\mathfrak{M}$. Die Punkte α und β würden natürlich zu $\mathfrak{M}$ gehören. Daher gäbe es nach dem Mittelwertsatz ein $\alpha < \bar{\xi} < \beta$, so daß

$$y'(\bar{\xi}) = \frac{y(\beta) - y(\alpha)}{\beta - \alpha} = p$$

wäre. Wegen (2) wäre dann

$$y(\bar{\xi}) = p\,\bar{\xi} + f(p),$$

woraus in Verbindung mit (11)

$$\frac{y(\bar{\xi}) - y(x_1)}{\bar{\xi} - x_1} = p$$

folgen würde; d. h. $\bar{\xi}$ würde gegen die Definition des Intervalls (α, β) doch zu $\mathfrak{M}$ gehören. Der gewünschte Widerspruch ist also erzielt.

---

[10]) Über $f(t)$ wird also nur die Voraussetzung gemacht, daß $f(t)$ für die Ableitungen $y'(x)$ definiert ist, welche das Integral $y(x)$ im Intervall (a, b) besitzt.

Nun zu der eingangs aufgestellten Behauptung. Da $y'(x)$ als Ableitung jeden Zwischenwert annimmt, ist die Stetigkeit von y' bewiesen, sobald die Monotonie bewiesen ist. Auf jeden Fall ist y' in einem Teilintervall monoton; denn wenn y' nicht im ganzen Intervall (a, b) monoton ist, gibt es zwei Punkte x_1 und x_2, so daß in ihnen y' denselben Wert hat; dann ist aber y' nach Hilfssatz 3 im ganzen Intervall $\langle x_1, x_2 \rangle$ konstant, also monoton. Es ergibt sich aber auch, daß $y'(x)$ in dem ganzen Intervall (a, b) monoton ist. Denn angenommen, dieses sei nicht der Fall. Dann gibt es drei Punkte

$$a \leqq \alpha < \beta < \gamma \leqq b,$$

so daß entweder die Ungleichungen

$$y'(\alpha) > y'(\beta),\ y'(\gamma) > y'(\beta)$$

oder

$$y'(\alpha) < y'(\beta),\ y'(\gamma) < y'(\beta)$$

gelten. Da y' jeden Zwischenwert annimmt, gibt es dann zwei Zahlen

$$\alpha < \alpha_1 < \beta \quad \text{und} \quad \beta < \gamma_1 < \gamma,$$

so daß

$$y'(\alpha_1) = y'(\gamma_1) > y'(\beta)$$

bzw.

$$y'(\alpha_1) = y'(\gamma_1) < y'(\beta)$$

ist. Dann würde aber nach dem Hilfssatz 3 aus dem Bestehen der Gleichungen folgen, daß $y'(x)$ in dem ganzen Intervall $\langle \alpha_1, \gamma_1 \rangle$ konstant ist, im Widerspruch zu den zugleich geltenden Ungleichungen.

Es ist also insbesondere gezeigt, daß jede Integralkurve von (2) höchstens an einer Stelle eine horizontale Tangente hat und daß sie entweder überall nach oben konvex oder überall nach oben konkav ist, wobei jedoch geradlinige Teile noch zuzulassen sind.

§ 5.

Es sei $y = y(x)$ für $a < x < b$ ein Integral der Differentialgleichung

$$y = y'x + f(y') \tag{2}$$

und y' nicht im ganzen Intervall konstant. Es sei

$$\tau_1 = \underline{\text{fin}}\, y'(x), \qquad \tau_2 = \overline{\text{fin}}\, y'(x).$$

In dem Intervall τ_1, τ_2 sollen diejenigen Endpunkte zum Intervall selber gerechnet werden, die Werte von $y'(x)$ sind. Dann hat $f(t)$ im Intervall τ_1, τ_2 eine im engeren Sinne monotone dissoziierte Ableitung.

Da y' als Ableitung alle Zwischenwerte annimmt, ist zunächst $f(t)$ im ganzen Intervall τ_1, τ_2 definiert. Es sei nun ein Punkt t_0 im Intervall τ_1, τ_2 gegeben. Ich will zeigen, daß $f'_{\pm}(t_0)$ existiert. Es gibt jedenfalls mindestens ein x, so daß

$$y'(x) = t_0$$

ist. Es sei

$$x_0 = \underset{y'(x)=t_0}{\text{fin}}\, x. \tag{12}$$

Da y' stetig ist, ist[11]) auch $y'(x_0) = t_0$ und daher auch

$$\lim_{x \to x_0 - 0} y'(x) = t_0.$$

Aber auch umgekehrt gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $x_0 - x < \varepsilon$ ist, wenn $x < x_0$ irgendein Wert ist, für den

$$|y'(x) - y'(x_0)| < \delta$$

ist. Andernfalls gäbe es nämlich ein ε_0, so daß für eine konvergente Folge von Zahlen $x < x_0$, die $y'(x) \to y'(x_0)$ liefern, $x_0 - x \geqq \varepsilon_0$ wäre; für den Limes $\bar{x}_0$ dieser x wäre dann $\bar{x}_0 \leqq x_0 - \varepsilon_0$ und $y'(\bar{x}_0) = y'(x_0) = t_0$, was ein Widerspruch gegen (12) wäre. Für $a < x < x_0$ ist also $y'(x) \neq y'(x_0)$ und $x \to x_0$, falls $y'(x) \to y'(x_0)$ ist. Die Werte x, für die $a < x < x_0$ ist, liefern ferner für $y'(x)$ wegen der Monotonie dieser Funktion nur solche Werte t, die auf einer wohlbestimmten Seite von t_0 liegen, und zugleich auch sämtliche Werte t eines gewissen Intervalls mit dem Endpunkt t_0. Es sei nun t irgendein Wert dieses Intervalls und x so beschaffen, daß $y'(x) = t$ ist. Dann folgt aus (2)

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = -x\frac{y'(x)-y'(x_0)}{t-t_0} + \frac{y(x)-y(x_0)-(x-x_0)y'(x_0)}{t-t_0}$$

$$= -x + \frac{(x-x_0)\tau - (x-x_0)t_0}{t-t_0} = -x + \frac{\tau - t_0}{t-t_0}(x-x_0),$$

wobei τ nach dem Mittelwertsatz und wegen der Monotonie von y' ein zwischen t_0 und t liegender Wert ist. Es ist also

$$0 \leqq \frac{\tau - t_0}{t-t_0} \leqq 1,$$

und daher, weil $x \to x_0$ für $t \to t_0$ ist,

$$f'_{\pm}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = -x_0,$$

---

[11]) Die folgenden Ausführungen bis zum Schluß des Absatzes gelten nur, falls $x_0 > a$ ist.

wobei t auf das vorgenannte ganz auf einer Seite von t_0 liegende Intervall beschränkt ist.

Bildet man statt (12)

$$X_0 = \overline{\underset{y'(x)=t_0}{\text{fin}}}\, x,$$

so erhält man[12]) nach der vorstehenden Methode die für die andere Seite genommene Ableitung $f'_{\mp}(t_0)$ und hierfür den Wert

$$f'_{\mp}(t_0) = -X_0.$$

Es werde etwa angenommen, daß $y'(x)$ eine mit x monoton *zu*nehmende Funktion ist. Dann ist mit $x \leqq x_0$ auch $t \leqq t_0$. In diesem Falle ist daher

$$f'_-(t_0) = -x_0, \qquad f'_+(t_0) = -X_0, \tag{13}$$

wobei $x_0 \leqq X_0$ ist.

Tritt der in den Anmerkungen [11]) bzw. [12]) ausgeschlossene Fall ein, so gehört der linke bzw. rechte Endpunkt von τ_1, τ_2 noch zum Intervall und dann ergibt sich, wie behauptet, wenigstens noch die Existenz von $f'_+(\tau_1)$ bzw. $f'_-(\tau_2)$. Ist nun $\bar{t}_0 > t_0$, so lassen sich auch zu $\bar{t}_0$ nach dem obigen Verfahren Zahlen $\bar{x}_0$ und $\bar{X}_0$ bestimmen. Da y' als monoton *zu*nehmend angenommen war, ist dann $x_0 \leqq X_0 < \bar{x}_0 \leqq \bar{X}_0$, also wegen (13)

$$f'_-(t_0) \geqq f'_+(t_0) \geqq f'_-(\bar{t}_0) \geqq f'_+(\bar{t}_0),$$

d. h. $f(t)$ hat eine monotone dissoziierte Ableitung. $f'(t)$ ist aber auch im engeren Sinne monoton; denn $f'_+(t_0) = f'_-(\bar{t}_0)$ bedeutet $X_0 = \bar{x}_0$, d. h.

$$\overline{\underset{y'(x)=t_0}{\text{fin}}}\, x = \overline{\underset{y'(x)=\bar{t}_0}{\text{fin}}}\, x,$$

also wegen der Stetigkeit von y'

$$t_0 = y'(X_0) = y'(\bar{x}_0) = \bar{t}_0.$$

Damit sind alle Behauptungen für den Fall, daß y' monoton *zu*nimmt, bewiesen. Nimmt y' monoton *ab*, so ergeben sie sich in entsprechender Weise.

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt nun, daß *die in dem Satz von* § 2 *für* $f(t)$ *aufgestellten Voraussetzungen nicht nur hinreichende, sondern auch notwendige sind in dem Sinne, daß* $f(t)$, *wenn die Differentialgleichung* (2) *ein nichtlineares Integral besitzen soll, notwendig in einem*

[12]) Hierbei muß vorausgesetzt werden, daß $X_0 < b$ ist.

in (τ_1, τ_2) *enthaltenen Intervall eine im engeren Sinne monotone dissoziierte Ableitung haben muß.*

Ist also z. B. die Differentialgleichung

$$y = y'x + f(y')$$

gegeben, in der

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für rationales } t, \\ 1 & \text{für irrationales } t \end{cases}$$

ist, so kann sofort gesagt werden, daß sie nur lineare Integrale hat, nämlich

$$y = cx \qquad \text{für rationales } c$$

und

$$y = cx + 1 \qquad \text{für irrationales } c.$$

§ 6.

Die Clairautsche Differentialgleichung (2) *hat unter den in* § 2 *angegebenen Voraussetzungen keine andern Integrale* y *mit* $\tau_1 < y' < \tau_2$ *als die in* § 2 *angegebenen.*

Denn es sei $Y(x)$ für $A < x < B$ irgendein Integral von (2) mit $\tau_1 < Y' < \tau_2$. Nach § 4 ist $Y'(x)$ eine monotone Funktion, ich will etwa annehmen, daß $Y'(x)$ monoton zunehme. Es kann weiter angenommen werden, daß $Y'(x)$ nicht im ganzen Intervall (A, B) konstant ist. Das Intervall (A, B) hat dann ein Teilintervall $(\bar{a}, \bar{b})$, so daß Y' in den etwa existierenden Intervallen $A < x \leqq \bar{a}$ und $\bar{b} \leqq x < B$ konstant ist, aber in keiner Umgebung von $\bar{a}$ und in keiner Umgebung von $\bar{b}$. Ich bin mit dem Beweis fertig, wenn ich zeigen kann, daß $(\bar{a}, \bar{b})$ ein Teil des Intervalls (a, b) von § 2 ist und daß in diesem Teilintervall $Y(x)$ mit der durch § 2, b) definierten Funktion $y(x)$ übereinstimmt. Zu dem Intervall $(\bar{a}, \bar{b})$ kann nach der Vorschrift von § 5 ein Intervall $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$ bestimmt werden. Da die Ableitung Y' in keiner rechtsseitigen Umgebung von $\bar{a}$ und in keiner linksseitigen Umgebung von $\bar{b}$ konstant ist, ist das Intervall hier offen, also $(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$. Da auch $\tau_1 < Y' < \tau_2$ vorausgesetzt ist, ist $(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ ein Teilintervall von (τ_1, τ_2). Zu jedem $\bar{\tau}_1 < t_0 < \bar{\tau}_2$ gibt es nach § 5 Zahlen $x_0 \leqq X_0$, so daß

$$Y'(x_0) = Y'(X_0) = t_0 \tag{14}$$

und

$$f'_-(t_0) = -x_0, \qquad f'_+(t_0) = -X_0 \tag{15}$$

ist. Da Y der Differentialgleichung (2) genügt, ergibt sich in Verbindung mit (14) und (15)

$$Y(x_0) = -t_0 f'_-(t_0) + f(t_0), \qquad Y(X_0) = -t_0 f'_+(t_0) + f(t_0), \tag{16}$$

d. h. für alle t_0 des Intervalls $(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ sind die durch (15) und (16) bestimmten Punkte $x, Y(x)$ unserer Integralkurve identisch mit den durch (4) bestimmten Punkten $x, y(x)$ der Integralkurve b). Und auch die Ableitungen y' und Y' stimmen, wie sich aus § 2 und (14) ergibt, in diesen Punkten überein. Da also in jedem durch ein solches t_0 bestimmten Intervall $Y'(x_0) = Y'(X_0) = t_0$ ist, ergibt Hilfssatz 3, daß $Y' = t_0$ im ganzen Intervall $x_0 \leqq x \leqq X_0$ gilt, also in diesem Intervall die Integralkurve durch die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $x_0, Y(x_0)$ und $X_0, Y(X_0)$ gegeben ist, also auch hier mit der Kurve b) des § 2 übereinstimmt. Da $(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ ein Teilintervall von (τ_1, τ_2) ist, folgt aus (15) und der ersten Zeile von (4), daß $(\bar{a}, \bar{b})$ ein Teilintervall von (a, b) ist. Damit ist für monoton *zu*nehmendes Y' die Behauptung bewiesen. Für monoton *ab*nehmendes Y' ergibt sie sich in entsprechender Weise.

§ 7.

Bei der im vorhergehenden entwickelten Theorie der Clairautschen Differentialgleichung haben die Funktionen eine ausschlaggebende Rolle gespielt, die eine im engeren Sinne monotone dissoziierte Ableitung besitzen. Diese Funktionen lassen sich auch noch in anderer Weise charakterisieren. Es besteht nämlich der Satz:

Die Funktionen, die im offenen Intervall (a, b) eine monoton zunehmende (abnehmende) dissoziierte Ableitung besitzen, sind genau die in (a, b) stetigen konvexen (konkaven) Funktionen.

Die im vorhergehenden auftretenden Funktionen mit im engeren Sinne monotonen dissoziierten Ableitungen sind somit konvexe bzw. konkave Funktionen, die in keinem Teilintervall linear sind.

Es wird genügen, die Behauptung für die Funktionen mit monoton *zu*nehmender dissoziierter Ableitung und konvexe Funktionen zu beweisen.

Es sei also $f(t)$ im Intervall (a, b) stetig und konvex. Schon Herr Jensen hat gezeigt, daß dann an jeder Stelle t des Intervalls sowohl $f'_+(t)$ wie $f'_-(t)$ existiert und daß $f'_+(t) \geqq f'_-(t)$ ist[13]). Danach hat also $f(t)$ jedenfalls in (a, b) eine dissoziierte Ableitung; und die monotone Zunahme dieser Ableitung ist bewiesen, sobald noch gezeigt ist, daß für

$$a < t_1 < t_2 < b$$

stets

$$f'_+(t_1) \leqq f'_-(t_2)$$

[13]) Acta math. **30** (1906), S. 189f. Dort wird allerdings vorausgesetzt, daß $f(t)$ in (a, b) nach oben beschränkt ist. Der Beweis verwendet aber nur die aus dieser Voraussetzung folgende Stetigkeit.

ist. Dieses ergibt sich aber so: Es ist[14]) für jede natürliche Zahl n und für n beliebige Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ des Intervalls (a, b)

$$n f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqq f(x_1) + \ldots + f(x_n).$$

Ich setze nun zunächst $x_1 = \ldots = x_{n-1} = t_1$, $x_n = t_2$ und darauf $x_1 = t_1$, $x_2 = \ldots = x_n = t_2$. Dann ergibt sich aus der Ungleichung

$$n f\left(\frac{n-1}{n} t_1 + \frac{1}{n} t_2\right) \leqq (n-1) f(t_1) + f(t_2)$$

und

$$n f\left(\frac{1}{n} t_1 + \frac{n-1}{n} t_2\right) \leqq f(t_1) + (n-1) f(t_2).$$

Hieraus folgt

$$\frac{f\left(t_1 + \frac{t_2 - t_1}{n}\right) - f(t_1)}{\frac{1}{n}(t_2 - t_1)} \leqq \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \leqq \frac{f(t_2) - f\left(t_2 - \frac{t_2 - t_1}{n}\right)}{\frac{1}{n}(t_2 - t_1)}$$

für jede natürliche Zahl n. Für $n \to \infty$ ergibt sich daher die Behauptung

$$f'_+(t_1) \leqq f'_-(t_2).$$

Nun möge umgekehrt $f(t)$ in (a, b) eine monoton zunehmende dissoziierte Ableitung haben. Dann ist, da als Ableitungen hier nur endliche Zahlen zugelassen sind, $f(t)$ sicher stetig. Ich muß noch zeigen, daß für je zwei Zahlen $\alpha < \beta$ im Innern von (a, b)

$$f(\alpha) + f(\beta) \geqq 2 f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \tag{17}$$

ist. Das ergibt sich aber so: Nach meiner Voraussetzung ist im Intervall $\left\langle \alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$

$$f'_+(t) \leqq f'_-\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$

also ist nach einem Satz von Dini auch jeder Differenzenquotient dieses Intervalls höchstens gleich $f'_-\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$, insbesondere also

$$\frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{1}{2}(\beta - \alpha)} \leqq f'_-\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \tag{18}$$

[14]) Jensen, a. a. O., S. 179, letzte Zeile.

In entsprechender Weise ergibt sich

$$\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} \geqq f'_+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right). \tag{19}$$

Da nach der Voraussetzung die rechte Seite von (19) mindestens gleich der rechten Seite von (18) ist, ergibt sich aus (18) und (19) die Behauptung (17).

Tübingen, den 30. Januar 1927.

(Eingegangen am 1. Februar 1927.)

Ernst-Abbe-Gedächtnispreis für Mathematik und Physik.

Der von der Carl-Zeiss-Stiftung begründete Ernst-Abbe-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen und physikalischen Wissenschaften und deren Anwendungsgebiete sowie die mit dem Preise verbundene Abbe-Medaille kommt Ende des Jahres 1928 zum ersten Male für Anwendungsgebiete der Mathematik und Physik zur Vergebung. Das Preisgericht wird von den Herren Hecker-Jena, Prantl-Göttingen, Zenneck-München gebildet. Besondere Bewerbung ist nicht erforderlich.

Der erste mathematische Preis wurde 1924 Felix Klein für seine „Mathematischen Werke“ zuerkannt, der erste physikalische Preis 1926 Prof. Wilhelm Wien-München, „Einem Meister der Theorie und des Experiments“.

Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome.

Von

Eugen v. Egerváry in Budapest und Otto Szász in Frankfurt a. M.

§ 1.

Die Fragen, die wir im folgenden behandeln, sind spezielle Fälle des allgemeinen Problems:

Gegeben seien n (reelle oder komplexe) Zahlen

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \qquad c_\nu = a_\nu + i\,b_\nu \quad \text{und} \quad \text{eine reelle Zahl } c_0 = a_0;$$

jedem nichtnegativen trigonometrischen Polynom höchstens n-ter Ordnung,

$$(1) \qquad \tau(t) = 1 + \alpha_1 \cos t + \beta_1 \sin t + \ldots + \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt \geqq 0$$

mit dem konstanten Gliede 1, sei der lineare Ausdruck

$$(2) \qquad L(\tau) = a_0 + a_1\,\alpha_1 + b_1\,\beta_1 + \ldots + a_n\,\alpha_n + b_n\,\beta_n$$

zugeordnet. Welches sind die extremen Werte von $L(\tau)$ im Bereiche der trigonometrischen Polynome (1), und für welche $\tau(t)$ werden sie erreicht?

Herr Fejér hat zuerst einen speziellen Fall dieses Problems behandelt; er zeigte (C. R. Paris, 1913), daß $\tau(0) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \leqq n+1$ ist, wobei Gleichheit nur für

$$1 + \frac{2n}{n+1}\cos t + \ldots + \frac{2\cdot 1}{n+1}\cos nt = \frac{1}{n+1}\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2$$

gilt. Später hat Herr Fejér mit Hilfe einer von ihm und von Herrn F. Riesz herrührenden Parameterdarstellung der nichtnegativen trigonometrischen Polynome eine allgemeine Methode zur Behandlung der hierhergehörigen Fragen angegeben und auf weitere spezielle Fälle angewandt

(Crelles Journal, 1915). Der weitere Ausbau dieser Methode führte den einen von uns† zu folgendem Satz:

Gegeben seien $n+1$ Zahlen $c_0, \ldots, c_n$ (c_0 reell); die Zahlenmenge

$$(2') \qquad L(\tau) = \Re \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \gamma_\nu, \qquad \gamma_\nu = \alpha_\nu - i\beta_\nu, \qquad \gamma_0 = 1,$$

wobei $\tau(t) = \Re \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu e^{i\nu t} = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu \cos \nu t + \beta_\nu \sin \nu t)$ die Gesamtheit der nichtnegativen trigonometrischen Polynome mit dem konstanten Gliede 1 durchläuft, ist identisch mit dem Wertevorrat der Hermiteschen Form

$$(3) \qquad H_n(x) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu, \qquad (c_{-\nu} = \bar{c}_\nu) \text{ für } \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu \bar{x}_\nu = 1.\,\dagger\dagger$$

Bezeichnen daher ω, Ω die kleinste bzw. größte Wurzel der Gleichung

$$(4) \qquad D_n(c_0 - \lambda; c_1, \ldots, c_n) = \begin{vmatrix} c_0 - \lambda, & c_1, & c_2, & \ldots, & c_n \\ c_{-1}, & c_0 - \lambda, & c_1, & \ldots, & c_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{-n}, & c_{-n+1}, & c_{-n+2}, & \ldots, & c_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

so ist offenbar

$$\omega \leqq L(\tau) \leqq \Omega.$$

Die Polynome $\tau(t)$, für die hier links (bzw. rechts) Gleichheit gilt, ergeben sich durch Auflösung des homogenen, linearen Gleichungssystems

$$(5) \qquad \left.\begin{aligned} (c_0 - \lambda) x_0 + c_{-1} x_1 + \ldots + c_{-n} x_n &= 0 \\ c_1 x_0 + (c_0 - \lambda) x_1 + \ldots + c_{-n+1} x_n &= 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots & \\ c_n x_0 + c_{n-1} x_1 + \ldots + (c_0 - \lambda) x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \lambda = \omega \text{ (bzw. } \Omega).$$

Ist $u_0, u_1, \ldots, u_n$ eine Lösung, so liefern die Gleichungen

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\gamma_\nu = u_0 \bar{u}_\nu + u_1 \bar{u}_{\nu+1} + \ldots + u_{n-\nu} \bar{u}_n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

eines der gesuchten Polynome:

$$\tau^*(t) = \Re \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu e^{i\nu t} = \left(\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu e^{-i\nu t} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{n} \bar{u}_\nu e^{i\nu t} \right) = \left| \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu z^\nu \right|^2_{z=e^{-it}}.$$

Im folgenden gewinnen wir unter anderem für die einzelnen Koeffizienten γ_ν und für die Ableitung $\sum_{\nu=1}^{n} \nu \gamma_\nu$ die genauen Schranken durch Auf-

† O. Szász, Über harmonische Funktionen und L-Formen, Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 149–162; daselbst ausführlicher Literaturnachweis.

†† $\bar{z}$ bedeutet die zu z konjugierte komplexe Zahl. Diese Hermiteschen Formen hat zuerst Herr Toeplitz betrachtet.

lösung der zugehörigen charakteristischen Gleichung (4).† Die Auflösung dieser Gleichung spielt auch bei anderen Problemen eine Rolle, es sei daher betont, daß zu den wenigen bekannten Fällen hier einige neue hinzukommen, in denen die Wurzeln der Gleichung (4) bestimmt werden.

§ 2.

Es sei $c_\varkappa = \varepsilon$ $(|\varepsilon| = 1)$, $c_\nu = 0$ für $\nu \neq \varkappa$ $(\varkappa \geqq 1)$; die zugehörige charakteristische Gleichung ist

$$D_n(-\overset{0}{\lambda}; 0, \ldots, \overset{\varkappa}{\varepsilon}, \ldots, 0) = \begin{vmatrix} -\lambda, & 0, & 0, \ldots, & \varepsilon, & 0, \ldots, & 0 \\ 0, & -\lambda, & 0, \ldots, & 0, & \varepsilon, \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & -\lambda, \ldots, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{\varepsilon}, & 0, & 0, \ldots, & -\lambda, & 0, \ldots, & 0 \\ 0, & \bar{\varepsilon}, & 0, \ldots, & 0, & -\lambda, \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & 0, & 0, \ldots, & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda, & 0, & 0, \ldots, & 1, & 0, \ldots, & 0 \\ 0, & -\lambda, & 0, \ldots, & 0, & 1, \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & -\lambda, \ldots, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & 0, & 0, \ldots, & -\lambda, & 0, \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & 0, \ldots, & 0, & -\lambda, \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & \ldots, & \ldots, \ldots, & -\lambda \end{vmatrix} = 0.\text{††}$$

Es sei $n = p\varkappa + q$ $(0 \leqq q < \varkappa)$; wir ordnen die Zeilen bzw. Spalten der Determinante in der Reihenfolge der Indizes:

$$0, \varkappa, 2\varkappa, \ldots, p\varkappa;\ 1, \varkappa+1, \ldots, p\varkappa+1;\ \ldots;\ q, \varkappa+q, \ldots, p\varkappa+q;$$
$$q+1, \varkappa+q+1, \ldots, (p-1)\varkappa+q+1, \ldots;\ \varkappa-1, 2\varkappa-1, \ldots, p\varkappa-1.\text{†††}$$

---

† Die Resultate dieser Arbeit haben wir vor mehreren Jahren gefunden. Wir glauben, daß sie auch jetzt noch von Interesse sind; vgl. dazu G. Szegö, Koeffizientenabschätzungen bei ebenen und räumlichen harmonischen Entwicklungen, Math. Annalen 96 (1927), S. 601—632, insbes. S. 625.

†† Die Gleichheit der beiden Determinanten ergibt sich, indem man die ν-te Zeile mit $\overset{\nu}{\varepsilon^\varkappa}$ und die μ-te Spalte mit $\overset{\mu}{\bar{\varepsilon}^\varkappa}$ $(\nu, \mu = 0, 1, \ldots, n)$ multipliziert.

††† Die obere Folge enthält $q+1$ Gruppen von je $p+1$ Indizes, die untere $\varkappa - q - 1$ Gruppen von je p Indizes; im Falle $q = \varkappa - 1$ sind alle Indizes durch die obere Folge erschöpft.

Man erkennt sofort, daß jetzt die Determinante in folgendes Produkt zerfällt:

$$D_n = \Delta_{p+1}^{q+1} \Delta_p^{\varkappa-q-1}. \tag{7}$$

Hierbei ist

$$\Delta_p = \Delta_p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda, & 1, & 0, \ldots, & 0 \\ 1, & -\lambda, & 1, \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & -\lambda, \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & -\lambda \end{vmatrix} = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin\theta}, \tag{7'}$$

$$\lambda = -2\cos\theta. \dagger$$

Δ_p verschwindet also für $\theta = \frac{\pi}{p+1}, \frac{2\pi}{p+1}, \ldots, \frac{p\pi}{p+1}$. Demnach sind die Wurzeln von $D_n = 0$:

$$\begin{cases} \lambda = 2\cos\frac{\pi}{p+2}, 2\cos\frac{2\pi}{p+2}, \ldots, 2\cos\frac{(p+1)\pi}{p+2} \text{ mit der} \\ \qquad\qquad \text{Multiplizität } q+1, \\ \lambda = 2\cos\frac{\pi}{p+1}, 2\cos\frac{2\pi}{p+1}, \ldots, 2\cos\frac{p\pi}{p+1} \text{ mit der} \\ \qquad\qquad \text{Multiplizität } \varkappa - q - 1. \end{cases} \tag{8}$$

Somit ist wegen $p = \left[\frac{n}{\varkappa}\right]$

$$\omega = -2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2}, \qquad \Omega = 2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2};$$

also ist unter der Bedingung (1)

$$-2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2} \leqq \Re\,\varepsilon\gamma_\varkappa \leqq 2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2}, \qquad |\varepsilon| = 1. \tag{9}$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$|\gamma_\varkappa| = (\alpha_\varkappa^2 + \beta_\varkappa^2)^{\frac{1}{2}} \leqq 2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2}. \tag{10}$$

Um die Fälle der Gleichheit in (9) und (10) zu bestimmen, haben wir die Lösungen des Gleichungssystems zu berechnen

$$\left.\begin{array}{rl} -\lambda x_0 + \bar{\varepsilon} x_\varkappa = 0 \\ -\lambda x_1 + \bar{\varepsilon} x_{\varkappa+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon x_\nu - \lambda x_{\nu+\varkappa} + \bar{\varepsilon} x_{\nu+2\varkappa} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon x_{n-\varkappa} - \lambda x_n = 0 \end{array}\right\} \lambda = \pm 2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2}, \quad \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1. \tag{11}$$

† Für die Berechnung von Δ_p vgl. z. B. Pascal, Die Determinanten, Leipzig 1900, S. 155–156.

Wie man aus der oben angegebenen Umstellung der Zeilen und Spalten ersieht, zerfällt das Gleichungssystem (11) in $\varkappa$ voneinander unabhängige Gleichungssysteme, von denen die letzten $\varkappa - q - 1$ Systeme wegen $\Delta_p \neq 0$ nur die trivialen Lösungen

$$x_\nu = x_{\nu+\varkappa} = \ldots = x_{\nu+(p-1)\varkappa} = 0 \quad (\nu = q+1, q+2, \ldots, \varkappa - 1)$$

besitzen. Im Falle $q = \varkappa - 1$ treten diese nicht auf.

Die Lösungen der ersten $q+1$ Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned} -\lambda x_\nu + \bar{\varepsilon} x_{\nu+\varkappa} &= 0 \\ \varepsilon x_\nu - \lambda x_{\nu+\varkappa} + \bar{\varepsilon} x_{\nu+2\varkappa} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \varepsilon x_{\nu+(p-1)\varkappa} - \lambda x_{\nu+p\varkappa} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, q)$$

sind für $\lambda = 2\cos\dfrac{\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2}$ †

$$x_{\nu+\mu\varkappa} = \varrho_\nu \varepsilon^\mu \sin\frac{(\mu+1)\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2} \qquad \begin{matrix}(\nu = 0, 1, \ldots, q)\\ (\mu = 0, 1, \ldots, p),\end{matrix}$$

wo die ϱ_ν beliebige Zahlen sind, die nur der Bedingung genügen müssen:

$$\sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = \sum_{\nu=0}^{q}\sum_{\mu=0}^{p} |\varrho_\nu|^2 \sin^2\frac{(\mu+1)\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2} = \left(\sum_{\nu=0}^{q} |\varrho_\nu|^2\right)\left(\sum_{\mu=0}^{p} \sin^2\frac{(\mu+1)\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2}\right) = 1;$$

dies entspricht der $q+1$-fachen Multiplizität der Wurzel. Hierbei ist offenbar

$$\sum_{\mu=0}^{p} \sin^2\frac{(\mu+1)\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2} = \sum_{\mu=0}^{p} \sin^2\frac{(\mu+1)\pi}{p+2} = \frac{p+2}{2},$$

also

$$\sum_{\nu=0}^{q} |\varrho_\nu|^2 = \frac{2}{p+2}. \tag{12}$$

Die nichtnegativen trigonometrischen Polynome, für die in der zweiten Ungleichung von (9) Gleichheit gilt, sind nun nach (6):

$$\tau^*(t) = \left|\sum_{\nu=0}^{q}\sum_{\mu=0}^{p} \varrho_\nu \varepsilon^\mu \sin\frac{(\mu+1)\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2} z^{\nu+\mu\varkappa}\right|^2_{z=e^{-it}} \tag{13}$$

$$= \left|\sum_{\nu=0}^{q} \varrho_\nu z^\nu\right|^2 \left|\sum_{\mu=0}^{p} \sin\frac{(\mu+1)\pi}{p+2} (\varepsilon z^\varkappa)^\mu\right|^2_{z=e^{-it}}, \qquad p = \left[\frac{n}{\varkappa}\right].$$

† Vgl. O. Szász, a. a. O. in § 1, S. 157–158; daselbst ist die Lösung des zu $\varepsilon = 1$ gehörigen Gleichungssystems angegeben; diesem genügen offenbar die Größen $\varepsilon^{-\mu} \cdot x_{\nu+\mu\varkappa}$.

Eine einfache Rechnung ergibt für $\varepsilon = e^{i\varkappa\psi}$, $z = e^{-it}$

$$\left| \sum_{\mu=0}^{p} \sin\frac{(\mu+1)\pi}{p+2} (\varepsilon z^{\varkappa})^{\mu} \right|^2$$

$$= \frac{p+2}{2} + \sum_{\mu=1}^{p} \left\{ (p-\mu+1)\cos\frac{\mu\pi}{p+2} + \frac{\sin\frac{(\mu+1)\pi}{p+2}}{\sin\frac{\pi}{p+2}} \right\} \cos\mu\varkappa(t-\psi);$$

der erste Faktor von $\tau^*(t)$ ist ein beliebiges, nichtnegatives trigonometrisches *Polynom q-ter Ordnung* mit dem konstanten Gliede $\frac{2}{p+2}$.

Wenn in (9) Gleichheit gilt, so besteht offenbar auch in (10) Gleichheit und es ist $\gamma_{\varkappa} = 2\bar{\varepsilon}\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2}$; umgekehrt, wenn in (10) Gleichheit gilt, dann gilt offenbar auch in (9) Gleichheit bei passender Wahl von ε $\left(\varepsilon = \frac{\overline{\gamma_{\varkappa}}}{|\gamma_{\varkappa}|}\right)$, also besteht in (10) Gleichheit nur für die trigonometrischen Polynome (13).

Somit gilt der Satz:

I. *Es sei*

$$\tau_n(t) = 1 + \alpha_1\cos t + \beta_1\sin t + \ldots + \alpha_n\cos nt + \beta_n\sin nt \geqq 0 \quad (0 \leqq t < 2\pi),$$

dann ist

$$(\alpha_{\varkappa}^2 + \beta_{\varkappa}^2)^{\frac{1}{2}} \leqq 2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq n);$$

Gleichheit gilt hier nur für die nichtnegativen trigonometrischen Polynome

$$\tau_n^*(t) = \tau_q(t)\cdot\left\{1 + \frac{2}{p+2}\sum_{\mu=1}^{p}\left[(p-\mu+1)\cos\frac{\mu\pi}{p+2} + \frac{\sin\frac{(\mu+1)\pi}{p+2}}{\sin\frac{\pi}{p+2}}\right]\cos\mu\varkappa(t-\psi\right.$$

hierbei ist $\tau_q(t)$ ein beliebiges, nichtnegatives trigonometrisches Polynom höchstens q-ter Ordnung mit dem konstanten Gliede 1; *p und q sind durch $n = p\varkappa + q$, $0 \leqq q < \varkappa$ bestimmt, ψ ist beliebig* †.

---

† Für die Fälle $\varkappa = 1$ und $\varkappa > \frac{n}{2}$ vgl. L. Fejér, Über trigonometrische Polynome, Journal f. Math. **146** (1915), S. 53–82, insb. S. 72–74, 77–80; O. Szász, a. a. O. in § 1, insbes. S. 157–158 und: Über nichtnegative trigonometrische Polynome, Sitzungsber. München 1917, S. 307–320, insb. S. 309–310; G. Szegö, a. a. O. in § 1, S. 621 ff. Auf ähnlichem Wege hat den Satz I Herr M. Krafft gefunden und dem einen von uns vor Jahren mitgeteilt. Vgl. auch Szász, Elementare Extremalprobleme ..., Sitzungsb. München (1927), S. 185–196.

Setzt man z. B. $\tau_\varrho(t) \equiv 1$, $\psi = 0$ bzw. $\psi = \frac{\pi}{\varkappa}$, so wird offenbar

$$\tau_n^*(t) = 1 \pm 2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]+2}\cos\varkappa t + \ldots,$$

so daß schon $\alpha_\varkappa$ hier die genauen Schranken erreicht.

§ 3.

Es sei jetzt $c_\varkappa = \varepsilon$, $c_{n-\varkappa+1} = \delta$ ($|\varepsilon| = 1, |\delta| = 1$) und sonst $c_\nu = 0$. Die charakteristische Gleichung ist nun

$$D_n\left(\underset{-\lambda}{\overset{0}{}}; \ldots \underset{\varepsilon}{\overset{\varkappa}{}}, \ldots \overbrace{\delta, \ldots}^{n-\varkappa+1}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda \ldots & \varepsilon & \ldots & \delta & \ldots \ldots \\ \ldots & -\lambda \ldots & \varepsilon & \ldots & \delta & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{\varepsilon} & \ldots & -\lambda \ldots & \varepsilon & \ldots & \ldots \\ \ldots & \bar{\varepsilon} & \ldots & -\lambda \ldots & \varepsilon & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{\delta} & \ldots & \bar{\varepsilon} & \ldots & -\lambda \ldots & \ldots \\ \ldots & \bar{\delta} & \ldots & \bar{\varepsilon} & \ldots & -\lambda \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \bar{\delta} & \ldots & \bar{\varepsilon} & \ldots -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda \ldots & \eta & \ldots & \bar{\eta} & \ldots \ldots \\ \ldots & -\lambda \ldots & \eta & \ldots & \bar{\eta} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{\eta} & \ldots & -\lambda \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \bar{\eta} & \ldots & -\lambda \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \eta & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots -\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

hierbei ist $\eta = (\bar{\delta}^\varkappa \varepsilon^{n-\varkappa+1})^{\frac{1}{n+1}}$, oder wenn $\varepsilon = e^{i\varphi}$, $\delta = e^{i\psi}$ gesetzt wird, so ist $\eta = e^{i\frac{(n-\varkappa+1)\varphi - \varkappa\psi}{n+1}}$ †; ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $1 \leqq \varkappa < n-\varkappa+1$ angenommen werden. Die zweite Determinante ist eine zyklische, daher ist

$$(14) \quad D_n = \prod_{\nu=0}^{n}\left(-\lambda + \eta e^{\frac{2i\nu\varkappa\pi}{n+1}} + \bar{\eta} e^{\frac{2i\nu(n-\varkappa+1)\pi}{n+1}}\right)$$

$$= \prod_{\nu=0}^{n}\left(-\lambda + e^{i\frac{(n-\varrho+1)\varphi - \varkappa\psi + 2\nu\varkappa\pi}{n+1}} + e^{-i\frac{(n-\varkappa+1)\varphi - \varkappa\psi + 2\nu\varkappa\pi}{n+1}}\right)$$

$$= \prod_{\nu=0}^{n}\left(2\cos\frac{(n-\varkappa+1)\varphi - \varkappa\psi + 2\nu\varkappa\pi}{n+1} - \lambda\right),$$

† Man erhält die Determinantengleichheit, indem man die ν-te Zeile von D_n mit $(\varepsilon\delta)^{\frac{\nu}{n+1}}$, und die μ-te Spalte mit $(\bar{\varepsilon}\bar{\delta})^{\frac{\mu}{n+1}}$ multipliziert.

mit den charakteristischen Wurzeln:

$$(15)\qquad 2\cos\frac{(n-\varkappa+1)\varphi-\varkappa\psi}{n+1},\ 2\cos\frac{(n-\varkappa+1)\varphi-\varkappa\psi+2\varkappa\pi}{n+1},\ \ldots,$$
$$2\cos\frac{(n-\varkappa+1)\varphi-\varkappa\psi+2n\varkappa\pi}{n+1}.$$

Bezeichnen wir den kleinsten und größten in dieser Folge auftretenden Wert mit $\omega_\varkappa(\eta)$ bzw. $\Omega_\varkappa(\eta)$, so gelten die Ungleichungen

$$(16)\qquad \omega_\varkappa(\eta)\leqq\Re(\varepsilon\gamma_\varkappa+\delta\gamma_{n-\varkappa+1})\leqq\Omega_\varkappa(\eta),$$

das heißt für jedes $\tau(t)$ gilt

$$(16')\quad \omega_\varkappa(\eta)\leqq\alpha_\varkappa\cos\varphi+\beta_\varkappa\sin\varphi+\alpha_{n-\varkappa+1}\cos\psi+\beta_{n-\varkappa+1}\sin\psi\leqq\Omega_\varkappa(\eta),$$

Offenbar ist nach (15) für jedes η und $\varkappa$

$$(17)\qquad -2\leqq\omega_\varkappa(\eta)<\Omega_\varkappa(\eta)\leqq 2,$$

und aus (16) folgt nun unmittelbar

$$(18)\qquad |\gamma_\varkappa|+|\gamma_{n-\varkappa+1}|=(\alpha_\varkappa^2+\beta_\varkappa^2)^{\frac{1}{2}}+(\alpha_{n-\varkappa+1}^2+\beta_{n-\varkappa+1}^2)^{\frac{1}{2}}\leqq 2.$$

Die Schranke 2 wird von $\Omega_\varkappa(\eta)$ nur für $\eta=e^{-i\frac{2\varkappa\nu\pi}{n+1}}$ erreicht; die Schranke -2 wird von $\omega_\varkappa(\eta)$, wie auch die Formel (14) zeigt, nur für $\eta=-e^{-i\frac{2\varkappa\nu\pi}{n+1}}$, $\nu=0,1,\ldots,n$, erreicht.

Bei der Bestimmung der Grenzfälle in (16′) beschränken wir uns auf den Fall $\varkappa=1$; es handelt sich also um die Berechnung derjenigen $\tau^*(t)$, für die in

$$(16'')\qquad \omega_1(\eta)\leqq\Re(\varepsilon\gamma_1+\delta\gamma_n)\leqq\Omega_1(\eta)$$

links bzw. rechts die Gleichheit gilt. Nach dem in § 1 zitierten Satz haben wir dazu folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$(19)\qquad \left.\begin{array}{rrrrr} -\lambda x_0+\bar\varepsilon x_1+ & & & +\bar\delta x_n=0\\ \varepsilon x_0-\lambda x_1+\bar\varepsilon x_2 & & & =0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ & \varepsilon x_{n-2}-\lambda x_{n-1}+\bar\varepsilon x_n=0\\ \delta x_0 & & +\varepsilon x_{n-1}-\lambda x_n=0 \end{array}\right\},\ \lambda=\omega_1(\eta)\text{ bzw. }\lambda=\Omega_1(\eta).$$

Ersetzen wir die Unbekannten x_ν durch neue Unbekannte ξ_ν vermöge der Substitution $x_\nu=(\varepsilon\delta)^{\frac{\nu}{n+1}}\xi_\nu$, $\nu=0,1,\ldots,n$, und multiplizieren wir die so entstehenden Gleichungen mit $(\bar\varepsilon\bar\delta)^{\frac{\nu}{n+1}}$, $\nu=0,1,\ldots,n$, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\lambda\xi_0 + \bar{\eta}\xi_1 + \quad & + \eta\xi_n = 0 \\ \eta\xi_0 - \lambda\xi_1 + \bar{\eta}\xi_2 \quad & = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \eta\xi_{n-2} - \lambda\xi_{n-1} + \bar{\eta}\xi_n & = 0 \\ \bar{\eta}\xi_0 + \eta\xi_{n-1} - \lambda\xi_n & = 0. \end{aligned}$$

Eine leichte Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes ergibt für die zu der letzten Zeile gehörigen Unterdeterminanten d_ν die Werte:

$$d_\nu = (-1)^\nu \Delta_\nu(\Omega_1)\,\bar{\eta}^{n-\nu} + (-1)^{n-\nu+1}\Delta_{n-\nu-1}(\Omega_1)\,\eta^{\nu+1},$$

wobei der Wert von $\Delta_p(\lambda)$ in $(7')$ angegeben ist †. Es sei r der Index der größten charakteristischen Wurzel, d. h. $\Omega_1 = 2\cos\frac{n\varphi-\psi+2r\pi}{n+1}$; man beachte ferner, daß

$$\Delta_\nu(-\lambda) = (-1)^\nu \Delta_\nu(\lambda)$$

ist. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} d_\nu &= \frac{\sin(\nu+1)\frac{n\varphi-\psi+2r\pi}{n+1}\cdot\bar{\eta}^{n-\nu} + \eta^{\nu+1}\sin(n-\nu)\frac{n\varphi-\psi+2r\pi}{n+1}}{\sin\frac{n\varphi-\psi+2r\pi}{n+1}} \\ &= \frac{e^{-\frac{2i(\nu+1)r\pi}{n+1}}(\eta^{n+1}-\bar{\eta}^{n+1})}{2i\sin\frac{n\varphi-\psi+2r\pi}{n+1}}; \end{aligned}$$

daher die Lösung des Gleichungssystems (19) für $\lambda = \Omega_1$

$$x_\nu = \frac{1}{\sqrt{n+1}}(\varepsilon\delta)^{\frac{\nu}{n+1}}\cdot e^{-\frac{2i(\nu+1)r\pi}{n+1}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

was man auch durch Einsetzen unmittelbar bestätigt. Das nichtnegative trigonometrische Polynom, für das in $(16'')$ die obere Schranke erreicht wird, ist somit nach (6)

$$(20)\qquad \tau^*(t) = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{\nu=0}^{n}{}'\left[(\varepsilon\delta)^{\frac{1}{n+1}}e^{-\frac{2ir\pi}{n+1}}e^{-it}\right]^\nu\right|^2$$

$$= 1 + \frac{2}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}{}'(n-\nu+1)\cos\nu\left(t - \frac{\varphi+\psi-2r\pi}{n+1}\right).$$

Entsprechende Gestalt hat das zur unteren Schranke ω_1 gehörige trigonometrische Polynom bei passender Wahl von r.

† Auch hier ist die Bemerkung der Fußnote zu D_n in § 2 entsprechend zu beachten.

Zusammenfassend haben wir folgenden Satz bewiesen:

II. *Es sei*

$$\tau_n(t) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu \cos \nu t + \beta_\nu \sin \nu t) \geqq 0 \quad \textit{für alle } t,$$

dann ist

$$(21) \quad \omega_\varkappa \leqq \alpha_\varkappa \cos \varphi + \beta_\varkappa \sin \varphi + \alpha_{n-\varkappa+1} \cos \psi + \beta_{n-\varkappa+1} \sin \psi \leqq \Omega_\varkappa,$$

wobei $\omega_\varkappa$ *bzw.* $\Omega_\varkappa$ *den kleinsten bzw. den größten in der Folge* $2 \cos \frac{(n-\varkappa+1)\varphi - \varkappa\psi + 2\nu\varkappa\pi}{n+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ *vorkommenden Wert bedeuten;* φ *und* ψ *sind hier beliebig gegeben. Somit ist auch*

$$(22) \qquad (\alpha_\varkappa^2 + \beta_\varkappa^2)^{\frac{1}{2}} + (\alpha_{n-\varkappa+1}^2 + \beta_{n-\varkappa+1}^2)^{\frac{1}{2}} \leqq 2.$$

Die Fälle der Gleichheit in diesen Ungleichungen können angegeben werden; speziell für $\varkappa = 1$ *gilt in* (21) *rechts das Gleichheitszeichen für*

$$\tau^*(t) = 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} (n - \nu + 1) \cos \nu \left(t - \frac{\varphi + \psi - 2r\pi}{n+1} \right),$$

wobei r *der Index des größten Gliedes in der Folge* $2 \cos \frac{n\varphi - \psi + 2\nu\pi}{n+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ *ist.*

§ 4.

Es sei jetzt $c_\nu = \nu i \varepsilon^\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n;\ |\varepsilon| = 1)$. Es handelt sich also um die Gleichung

$$D_n(-\lambda; i\varepsilon, 2i\varepsilon^2, \ldots, ni\varepsilon^n) = \begin{vmatrix} -\lambda, & i\varepsilon, & 2i\varepsilon^2, & \ldots, & ni\varepsilon^n \\ -i\bar{\varepsilon}, & -\lambda, & i\varepsilon, & \ldots, & (n-1)i\varepsilon^{n-1} \\ -2i\bar{\varepsilon}, & -i\bar{\varepsilon}, & -\lambda, & \ldots, & (n-2)i\varepsilon^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -ni\bar{\varepsilon}^n, & -(n-1)i\bar{\varepsilon}^{n-1}, & \ldots, & & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda, & i, & 2i, & \ldots, & ni \\ -i, & -\lambda, & i, & \ldots, & (n-1)i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -ni, & -(n-1)i, & \ldots, & & -\lambda \end{vmatrix} = 0; \dagger$$

nun ist

$$D_n = (-\lambda)^{n+1} + (-\lambda)^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n} \begin{vmatrix} 0 & \nu i \\ -\nu i & 0 \end{vmatrix} (n - \nu + 1), \dagger\dagger$$

---

† Hier haben wir die ν-te Zeile mit ε^ν, die μ-te Spalte mit $\bar{\varepsilon}^\mu$ multipliziert.

†† Die Hauptminoren dritter und höherer Ordnung von D_n $(0; i, \ldots, ni)$ verschwinden; denn durch Subtraktion der ersten Spalte von allen folgenden entstehen Spalten mit lauter gleichen Gliedern.

d. h.

$$D_n = (-\lambda)^{n-1}[\lambda^2 - (n\cdot 1^2 + (n-1)2^2 + \ldots + 1\cdot n^2)]$$
$$= (-\lambda)^{n-1}\left[\lambda^2 - \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}\right].$$

Die charakteristischen Wurzeln sind also

$$\omega = -\sqrt{\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}}, \quad 0, \quad \sqrt{\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}} = \Omega;$$

somit gelten die Ungleichungen

$$(23) \qquad -\sqrt{\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}} \leqq \Re\sum_{\nu=1}^{n} \nu i \varepsilon^\nu \gamma_\nu \leqq \sqrt{\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}},$$

oder für $\varepsilon = e^{i\varphi}$

$$(23') \quad -\sqrt{\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}} \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \nu(-\alpha_\nu \sin\nu\varphi + \beta_\nu \cos\nu\varphi) \leqq \sqrt{\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}}.$$

Es ist also

$$(23'') \qquad |\tau'(\varphi)| \leqq \sqrt{\frac{n+1}{2}\binom{n+2}{3}}.$$

Die Fälle der Gleichheit ergeben sich durch Auflösung des Gleichungssystems

$$(24) \qquad -\lambda x_\nu + i\sum_{\mu=0}^{n}(\nu-\mu)\varepsilon^{\nu-\mu}x_\mu = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n;\ \lambda = \omega, \Omega);$$

setzt man $x_\mu = \varepsilon^\mu \xi_\mu$ und multipliziert man die ν-te Gleichung mit $\bar{\varepsilon}^\nu$, so geht dieses Gleichungssystem über in

$$(24') \qquad -\lambda \xi_\nu + i\sum_{\mu=0}^{n}(\nu-\mu)\xi_\mu = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Hieraus folgt

$$-\lambda\xi_\nu = i\sum_{\mu=0}^{n}\mu\xi_\mu - \nu i\sum_{\mu=0}^{n}\xi_\mu = -\lambda(A+\nu B),$$

wo A und B nur von n abhängende Größen sind. Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (24′) erhält man

$$-\lambda(A+\nu B) + i\sum_{\mu=0}^{n}(\nu-\mu)(A+\mu B) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Diese Gleichungen können nur bestehen für

$$\lambda A + i\sum_{\mu=0}^{n}\mu(A+\mu B) = 0,$$

$$\lambda B - i\sum_{\mu=0}^{n}(A+\mu B) = 0.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\sigma_\varkappa = \sum_{\mu=0}^{n} \mu^\varkappa$ $(\sigma_0 = n+1)$, so wird

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + i\sigma_1)A \quad + i\sigma_2 B &= 0, \\ -i\sigma_0 A + (\lambda - i\sigma_1)B &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (\lambda = \omega, \Omega).$$

Hier ist

$$\lambda^2 = \sigma_0\sigma_2 - \sigma_1^2 = \frac{1}{6}(n+1)^2 n(2n+1) - \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{n+1}{2}\binom{n+2}{3};$$

schließlich wird

$$A : B = -i\sigma_2 : (\lambda + i\sigma_1) = (\lambda - i\sigma_1) : i\sigma_0,$$

also

$$x_\nu = \varepsilon^\nu \xi_\nu = \varrho\,\varepsilon^\nu(\lambda - i\sigma_1 + i\nu\sigma_0) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

wobei

$$\varrho^2 = \frac{1}{(n+1)\lambda^2 + \sum_{\nu=0}^{n}(\nu\sigma_0 - \sigma_1)^2} = \frac{6}{n(n+1)^3(n+2)}$$

ist.

Das zu Ω gehörige trigonometrische Polynom ist nun

$$\tau^*(t) = \varrho^2 \left| \sum_{\nu=0}^{n} (\Omega - i\sigma_1 + i\nu\sigma_0)(\varepsilon e^{-it})^\nu \right|^2 \qquad (\varepsilon = e^{i\varphi}).$$

Zusammenfassend gilt der Satz:

III. *Es sei*

$$\tau_n(t) = 1 + \sum_{\nu=0}^{n}(\alpha_\nu \cos\nu t + \beta_\nu \sin\nu t) \geqq 0 \quad \textit{für alle } t,$$

dann ist

$$|\tau_n'(t)| \leqq \sqrt{\frac{n+1}{2}\binom{n+2}{3}}.$$

Gleichheit gilt nur für

$$\tau^*(t) = \frac{6}{n(n+1)^3(n+2)} \left| \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ \pm\sqrt{\frac{n+1}{2}\binom{n+2}{3}} - i\binom{n+1}{2} + i\nu(n+1) \right\} e^{i\nu(\varphi - t)} \right|^2$$

(Eingegangen am 20. Mai 1927.)

Eine Verallgemeinerung der Theorie der konfokalen F_2.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Die Lehre von den „konfokalen“ Kegelschnitten geht bis auf Tschirnhaus (1695) zurück und seither haben sich viele hervorragende Mechaniker und Geometer mit den konfokalen F_2 beschäftigt, es genügt vielleicht aus der älteren Geschichte die Namen Laplace, Ivory, Gauß, dann Dupin, Chasles und Jacobi zu nennen †.

Es erscheint mir nun bemerkenswert, daß sich ein großer Teil der hier für die Euklidische Geometrie gefundenen Tatsachen auf viel allgemeinere Gebilde in Riemannschen Räumen übertragen läßt, nämlich auf die Koordinatenflächen $u, v, w =$ konst. der von P. Stäckel †† eingeführten Räume mit dem Bogenelement

$$(1) \qquad ds^2 = \begin{vmatrix} U & V & W \\ U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \end{vmatrix} \left\{ \frac{du^2}{V_1 W_2 - V_2 W_1} + \frac{dv^2}{W_1 U_2 - W_2 U_1} + \frac{dw^2}{U_1 V_2 - U_2 V_1} \right\}.$$

Darin bedeuten z. B. U, U_1, U_2 unabhängige Funktionen nur von u. Es zeigt sich beispielsweise, daß die von O. Staude 1882 ††† gefundene Fadenkonstruktion des Ellipsoids auch noch in diesem Fall gültig bleibt.

Die Beweise gestalten sich in unserem allgemeinen Stäckelschen Fall nicht verwickelter, sondern einfacher als die bisher im Euklidischen Fall

† Vgl. Enzyklopädie III, C 2. O. Staude, S. 204 u. ff.

†† P. Stäckel, Habilitationsschrift, Halle 1891 und: Über die Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit, Math. Annalen 42 (1893), S. 537—563, insbesondere S. 549.

††† O. Staude, Über Fadenkonstruktionen des Ellipsoids, Math. Annalen 20 (1882), S. 147—184. Vgl. auch S. Finsterwalder, ebenda 26, S. 546—556.

üblichen. Wir werden uns der Kürze halber auf Räume von drei (oder zwei) Dimensionen beschränken, obwohl viele unserer Überlegungen ohne weiteres für $n > 3$ Dimensionen gültig bleiben †.

§ 1.

Ivorys Diagonaleigenschaft führt auf Stäckels Bogenelement.

Sind u, v, w „elliptische Koordinaten" im Euklidischen Raum, so daß also die Koordinatenflächen konfokale F_2 sind, so haben zwei Punkte mit den Koordinaten (u_0, v_0, w_0) und (u_1, v_1, w_1) dieselbe Entfernung wie z. B. die Punkte (u_0, v_0, w_1) und (u_1, v_1, w_0). Mit anderen Worten: *In jedem Gebiet* $u_0 < u < u_1$, $v_0 < v < v_1$, $w_0 < w < w_1$ *sind die Entfernungen der vier Paare von Gegenecken einander gleich.* Diese Tatsache wollen wir als *„Ivorys Diagonaleigenschaft"* bezeichnen, da sie in einem von J. Ivory 1809 gefundenen Ergebnis steckt, wenn sie auch erst 1840 von M. Chasles ausdrücklich hervorgehoben wurde ††.

Wir wollen nun umgekehrt die Aufgabe stellen: *Alle Riemannschen Räume zu bestimmen, in denen es krummlinige Koordinaten* u, v, w *gibt, für die Ivorys Diagonaleigenschaft gilt,* wobei statt „Entfernung" natürlich „geodätische Entfernung" gemeint ist. Wir wollen zeigen, daß die Lösung dieser Aufgabe uns durch das Bogenelement (1) von Stäckel gegeben wird.

Zunächst wollen wir einsehen: aus unserer Forderung folgt, daß u, v, w in unserem Riemannschen Raum, dessen Bogenelement wir etwa positiv definit nehmen wollen, *orthogonale* Koordinaten sein müssen, das heißt, daß das Bogenelement die Form

$$ds^2 = e\,du^2 + g\,dv^2 + h\,dw^2 \tag{2}$$

haben muß, indem die gemischten Glieder wie $2f\,du\,dv$ fehlen. Für genügend kleine $u_1 - u_0$, $v_1 - v_0$, $w_1 - w_0$ nähern sich nämlich die Verhältnisse der geodätischen Abstände und die Winkel unseres *„Quaders" G*, $u_0 < u < u_1$, $v_0 < v < v_1$, $w_0 < w < w_1$ denen eines Euklidischen Quaders (Parallelflachs), bei dem man aber tatsächlich aus der Gleichheit der räumlichen Diagonalen auf die Rechtwinkligkeit schließen kann.

---

† Teile der hier darzustellenden Ergebnisse sind veröffentlicht a) in der Hamburger Dissertation von K. Zwirner, Orthogonalsysteme, in denen Ivorys Theorem gilt, Hamburger Abhandlungen **5** (1927), S. 313–336; ferner b) W. Blaschke, Sull' elemento lineare di Liouville, Rendiconti Accademia Lincei (6) **5**, I (1927), S. 396—400 und c) in dem Vortrage W. Blaschke, Sugli elementi lineari di Liouville e di Stäckel, der am 2. 4. 1927 in der Universität Neapel gehalten wurde und im Giornale di Battaglini gedruckt wird.

†† J. Ivory, London Philosophical Transactions 1809 I, S. 355; M. Chasles, Liouvilles Journal (1) **5** (1840), S. 485, 486.

Für genügend kleine $u_1 - u_0$, $v_1 - v_0$, $w_1 - w_0$ wird ferner unser Quader G in einem „*geodätisch konvexen*" Gebiet G_0 enthalten sein, so daß zwei Punkte von G_0 nur eine geodätische Verbindung in G_0 zulassen. Schließlich können wir G geeignet so klein wählen, daß die vier geodätischen Diagonalen von G in G liegen, ohne seine Seitenflächen zu berühren.

Die Länge D der geodätischen Diagonale von G, die (u_0, v_0, w_0) mit (u_1, v_1, w_1) verbindet — wir schreiben später kürzer: die Diagonale (000) (111) — erfährt, wenn man ihren Endpunkt (111) um $\delta u, \delta v, \delta w$ verrückt, nach einer bekannten Formel der Variationsrechnung die Änderung

$$\delta D = e\frac{du}{ds}\delta u + g\frac{dv}{ds}\delta v + h\frac{dw}{ds}\delta w. \tag{3}$$

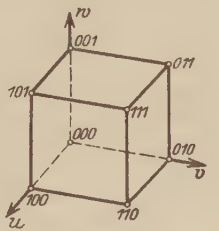


Fig. 1.

Darin sind die Werte von e, g, h in diesem Endpunkt (111) zu nehmen und du, dv, dw; ds beziehen sich auf das Endelement der Diagonale. Die Bogenelemente ds wollen wir für den Augenblick ins Äußere von G positiv zählen.

Ändern wir in unserem Quader (Fig. 1), der durch die sechs Koordinaten u_0, v_0, w_0; u_1, v_1, w_1 festgelegt ist, zuerst nur u_1 um δu_1, so finden wir für die nach Voraussetzung gleichen Änderungen δD der gleichen Diagonalen (000) (111) und (001) (110) nach (3)

$$\frac{\delta D}{\delta u_1} = \left[e\frac{du}{ds}\right]_{111} = \left[e\frac{du}{ds}\right]_{110}. \tag{4}$$

Ebenso bei Änderung von v_1 allein

$$\frac{\delta D}{\delta v_1} = \left[g\frac{dv}{ds}\right]_{111} = \left[g\frac{dv}{ds}\right]_{110}. \tag{5}$$

Bezeichnen wir

$$\frac{du}{ds}, \quad \frac{dv}{ds}, \quad \frac{dw}{ds}$$

als „*kontragrediente Richtungskoordinaten*", so haben wir wegen (2) oder

$$\left(e\frac{du}{ds}\right)\frac{du}{ds} + \left(g\frac{dv}{ds}\right)\frac{dv}{ds} + \left(h\frac{dw}{ds}\right)\frac{dw}{ds} = 1 \tag{6}$$

die Größen

$$e\frac{du}{ds} = \varphi, \qquad g\frac{dv}{ds} = \psi, \qquad h\frac{dw}{ds} = \omega \tag{7}$$

als „*kogrediente Richtungskoordinaten*" zu benennen. Zwischen ihnen besteht nach (2) die Beziehung

$$\frac{\varphi^2}{e} + \frac{\psi^2}{g} + \frac{\omega^2}{h} = 1. \tag{8}$$

Nach (4), (5) haben die in den Punkten (111) und (110) endigenden Diagonalen von G dieselben kogredienten Koordinaten φ, ψ. Ferner ist, da wir $w_0 < w_1$ nahmen, $\omega_{111} > 0$ und $\omega_{110} < 0$, da die Diagonalen nach Voraussetzung aus dem Innern von G kommen.

Es ist also in (111)

$$\frac{\varphi_{111}^2}{e} + \frac{\psi_{111}^2}{g} < 1 \tag{9}$$

und wegen der Stetigkeit wird für genügend kleines $w_1 - w_0$ diese Beziehung längs der ganzen Kante von G gelten, die die Ecken (111), (110) verbindet. Um also aus der Diagonalrichtung in (111) die in (110) zu gewinnen, brauchen wir die erste nur stetig so längs der die Ecken verbindenden Kante zu verschieben, daß dabei von den drei Koordinaten φ, ψ, ω die Koordinaten φ, ψ festbleiben und nur ω sich gemäß (8) stetig ändert und am Schluß noch das Vorzeichen von ω umzukehren.

Ebenso verschieben wir die Endrichtung der Diagonale in (110) stetig unter alleiniger Änderung von ψ längs der v-Kante (Fig. 1) bis (100) und erhalten hier durch Vorzeichenänderung von ψ die hier endigende Diagonalrichtung. Ebenso haben wir schließlich auf der Kante, die von (100) nach (000) hinführt, mit φ zu verfahren. Wenn wir beachten, daß bei den besprochenen „Verschiebungen" Richtungen, die sich nur um das Vorzeichen der Koordinaten φ, ψ, ω unterscheiden, wieder in solche übergehen, so sehen wir: Wenn wir die ins Äußere von G weisende Diagonalrichtung in (111) zuerst längs der w-Kante nach (110) unter alleiniger (stetiger) Änderung von ω, dann längs der v-Kante bis (100) bei bloßer Änderung von ψ und schließlich längs der u-Kante bei Änderung von φ verschieben, so kommen wir an der Ecke (000) mit der ins Innere von G gerichteten dort beginnenden Diagonalrichtung an.

Halten wir jetzt die Ecke (000) und die hier durchgehende Diagonale fest und lassen wir die Gegenecke (111) auf dieser Diagonale wandern, so erkennen wir, daß diese geodätische Diagonale ein Gleichungssystem

$$\varphi = \varphi(u), \qquad \psi = \psi(v), \qquad \omega = \omega(w) \tag{10}$$

befriedigt, das sich nach (7) ausführlich so schreibt:

$$e\frac{du}{ds} = \varphi(u), \qquad g\frac{dv}{ds} = \psi(v), \qquad h\frac{dw}{ds} = \omega(w). \tag{11}$$

Da aber der Punkt (000) keine ausgezeichnete Rolle spielt, so sehen wir *Es muß in unserem Riemannschen Raum eine zweiparametrige Schar von Extremalen (geodätischen Linien) geben, die den Gleichungen* (11) *genügt*

Die Funktionen φ, ψ, ω hängen dabei noch von zwei wesentlichen Konstanten c_1, c_2, nämlich von der Wahl der Anfangsrichtung $\varphi_{000}, \psi_{000}, \omega_{00}$

ab. Die Gleichung (8) bekommt daher, wenn wir z. B. für φ^2 zur Abkürzung U schreiben, die Gestalt

$$\frac{U}{e}+\frac{V}{g}+\frac{W}{h}=1, \tag{12}$$

worin $U=U(u; c_1, c_2)$, $V=V(v; c_1, c_2)$, $W=W(w; c_1, c_2)$ ist.

Durch Teilableitung nach c_1 und c_2 † folgt hieraus

$$\begin{aligned}\frac{U_1}{e}+\frac{V_1}{g}+\frac{W_1}{h}&=0,\\ \frac{U_2}{e}+\frac{V_2}{g}+\frac{W_2}{h}&=0,\end{aligned} \tag{13}$$

worin z. B.

$$V_2=\frac{\partial}{\partial c_2}V(v; c_1, c_2)$$

sein soll.

Wir haben in (12), (13) ein System linearer Gleichungen für die reziproken Werte von e, g, h gefunden. In (000) ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} U & V & W\\ U_1 & V_1 & W_1\\ U_2 & V_2 & W_2\end{vmatrix} \tag{14}$$

des Systems in c_1, c_2 nicht identisch Null, da in (000) die Diagonalrichtung $\varphi:\psi:\omega$ in weitem Ausmaß beliebig gewählt werden kann.

Somit können wir die Gleichungen (12), (13) nach e, g, h auflösen und finden das Bogenelement (1) von Stäckel. Wir haben somit bewiesen:

Satz I. *Sollen die Parameterflächen $u, v, w =$ konst. eines Riemannschen Raumes Ivorys Diagonaleigenschaft haben, so hat das Bogenelement dieses Raumes notwendig die Gestalt* (1) *von Stäckel.*

§ 2.

Umgekehrt: Stäckels Bogenelement hat Ivorys Diagonaleigenschaft.

Gehen wir von einem positiv definiten Bogenelement (1) aus und suchen wir in dem dadurch erklärten Riemannschen Raum eine Kurvenschar zu bestimmen, die einem Gleichungssystem von der Form (11) genügt. Dann gilt nach (8), wenn man darin für e, g, h aus (1) die Werte einsetzt,

$$\begin{vmatrix} \varphi^2 & \psi^2 & \omega^2\\ U_1 & V_1 & W_1\\ U_2 & V_2 & W_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} U & V & W\\ U_1 & V_1 & W_1\\ U_2 & V_2 & W_2\end{vmatrix}. \tag{15}$$

† Die Ableitbarkeit folgt aus bekannten Existenzsätzen über Systeme von Differentialgleichungen. Vgl. etwa E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, London 1927, 3·22, 3·3.

Die allgemeinste Lösung enthält zwei willkürliche Größen C_1, C_2:

$$\varphi = \sqrt{U + C_1 U_1 + C_2 U_2},$$
$$\psi = \sqrt{V + C_1 V_1 + C_2 V_2}, \tag{16}$$
$$\omega = \sqrt{W + C_1 W_1 + C_2 W_2}.$$

C_1, C_2 hängen nach den ersten zwei dieser Gleichungen nicht von w, nach den letzten zwei nicht von u und nach der ersten und letzten nicht von v ab, sind also konstant.

Nehmen wir C_1, C_2 so, daß die drei Ausdrücke unter den Wurzeln in (16) positiv werden und greifen wir von den Wurzeln irgend drei — etwa die positiven — heraus. Dann behaupten wir: *Die Integralkurven der zugehörigen Differentialgleichungen* (11) *bilden in der Umgebung von* (000) *ein Feld geodätischer Linien, das eine Schar von Parallelflächen orthogonal durchsetzt.*

Dazu brauchen wir nur das Kurvenintegral

$$p = \int \varphi\, \delta u + \psi\, \delta v + \omega\, \delta w \tag{17}$$

zu bilden. Darin sollen φ, ψ, ω die kogredienten Richtungskoordinaten der Kurve des Feldes $\delta u : \delta s$, $\delta v : \delta s$, $\delta w : \delta s$ die kontragredienten Richtungskoordinaten der Integrationslinie bedeuten.

Aus der Gestalt rechts in (17) folgt, daß bei festen Enden das Integral nicht vom Weg abhängt, da z. B. φ nur u enthält. Ferner, daß man das Integral auch so schreiben kann,

$$p = \int \delta s \cdot \cos \alpha, \tag{18}$$

wenn

$$\cos \alpha = \varphi \frac{\delta u}{\delta s} + \psi \frac{\delta v}{\delta s} + \omega \frac{\delta w}{\delta s} \tag{19}$$

den Kosinus des Winkels zwischen Feldrichtung und Integrationsrichtung bedeutet. Erstrecken wir das Integral (17) zwischen zwei Punkten einer Kurve des Feldes, so wird nach (18)

$$p = \int ds \tag{20}$$

gleich der Länge der Feldkurve. Für jede andere Kurve, die dieselben Punkte verbindet, haben wir wegen (18)

$$p \leqq \int \delta s. \tag{21}$$

Somit sind die Feldlinien kürzeste:

$$\int ds \leqq \int \delta s, \tag{22}$$

wie behauptet war. Die Flächen $p =$ konst. sind die Orthogonalflächen des Feldes. p ist nichts anderes als das Beltrami-Hilbertsche „Unabhängig-

keitsintegral“ der Variationsrechnung. Dabei ist das Integral p von einem festen Anfangspunkt zu einem veränderlichen Endpunkt erstreckt gedacht.

Die geodätischen Linien, die zu den Flächen $p = \text{konst.}$, worin p durch (17), (16) erklärt ist, orthogonal sind, genügen den Gleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial C_1} = \text{konst.}, \qquad \frac{\partial p}{\partial C_2} = \text{konst.} \tag{23}$$

Aus (8) folgt nämlich durch Ableitung etwa nach C_1

$$\frac{\varphi}{e}\frac{\partial \varphi}{\partial C_1} + \frac{\psi}{g}\frac{\partial \psi}{\partial C_1} + \frac{\omega}{h}\frac{\partial \omega}{\partial C_1} = 0 \tag{24}$$

oder, wenn wir hierin (11) oder z. B.

$$e\frac{du}{ds} = \varphi = \frac{\partial p}{\partial u} \tag{25}$$

einsetzen,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial C_1}\frac{du}{ds} + \frac{\partial^2 p}{\partial v\,\partial C_1}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 p}{\partial w\,\partial C_1}\frac{dw}{ds} = 0. \tag{26}$$

Diese Gleichung (26) stimmt aber mit der Behauptung $(23)_1$ tatsächlich überein, daß längs der geodätischen Linien unseres Feldes $\partial p : \partial C_1 = \text{konst.}$ ist.

Die Gleichungen (23) unseres Feldes sehen ausführlich geschrieben so aus

$$\begin{aligned} U^* + V^* + W^* &= \text{konst.}, \\ U^{**} + V^{**} + W^{**} &= \text{konst.}, \end{aligned} \tag{27}$$

worin z. B.

$$U^* = \int \frac{U_1}{\sqrt{U + C_1 U_1 + C_2 U_2}}\,du, \qquad U^{**} = \int \frac{U_2}{\sqrt{U + C_1 U_1 + C_2 U_2}}\,du \tag{28}$$

bedeutet.

Neben dem Felde, das zu unserem Integrale p gehört, betrachten wir nun noch drei andere Felder geodätischer Linien, die zu den Integralen

$$\begin{aligned} q &= +\int \varphi\,du - \int \psi\,\delta v - \int \omega\,\delta w, \\ r &= -\int \varphi\,du + \int \psi\,\delta v - \int \omega\,\delta w, \\ t &= -\int \varphi\,du - \int \psi\,\delta v + \int \omega\,\delta w, \end{aligned} \tag{29}$$

gehören, so daß

$$p + q + r + t = 0 \tag{30}$$

wird. Dann liegen an jeder Stelle die Tangenten an die hindurchgehenden vier geodätischen Linien der vier Felder symmetrisch zu den Tangentenebenen der drei hindurchgehenden Flächen u, v, w konst. Ferner genügen z. B. die Geodätischen des Feldes, die die Flächen t konst. orthogonal durchschneiden, den zu (27) entsprechenden Gleichungen

$$\begin{aligned} -U^* - V^* + W^* &= \text{konst.}, \\ -U^{**} - V^{**} + W^{**} &= \text{konst.} \end{aligned} \tag{31}$$

Wir behaupten nun: Nimmt man einen Quader $u_0 < u < u_1$, $v_0 < v < v_1$, $w_0 < w < w_1$ so an, daß seine geodätische Diagonale (000), (111) dem Felde (27) angehört, so gehört z. B. die Diagonale (110), (001) dem Felde (31) an.

Aus der Annahme folgt nämlich wegen (27)

$$U_0^* + V_0^* + W_0^* = U_1^* + V_1^* + W_1^*,$$
$$U_0^{**} + V_0^{**} + W_0^{**} = U_1^{**} + V_1^{**} + W_1^{**},$$

wo z. B. $U_0^* = U^*(u_0)$ ist. Daraus folgt durch Umstellen

$$-U_1^* - V_1^* + W_0^* = -U_0^* - V_0^* + W_1^*,$$
$$-U_1^{**} - V_1^{**} + W_0^{**} = -U_0^{**} - V_0^{**} + W_1^{**}$$

und diese Gleichungen stimmen nach (31) mit unserer Behauptung überein.

Berechnen wir die Längen unserer beiden Diagonalen! Für die Diagonale (000) (111) finden wir aus (17)

$$p = +\int_{u_0}^{u_1} \varphi\, du + \int_{v_0}^{v_1} \psi\, dv + \int_{w_0}^{w_1} \omega\, dw \tag{32}$$

und für die zweite Diagonale (110) (001) aus $(29)_3$

$$t = -\int_{u_1}^{u_0} \varphi\, du - \int_{v_1}^{v_0} \psi\, dv + \int_{w_0}^{w_1} \omega\, dw. \tag{33}$$

Nach (32), (33) ist $p = t$, d. h. die Diagonalen sind tatsächlich gleich lang.

Damit ist die folgende Umkehrung des Ergebnisses von § 1 bewiesen:

Satz II. *In jedem Koordinatenquader $u_0 < u < u_1$, $v_0 < v < v_1$, $w_0 < w < w_1$ eines Stäckelraumes sind, wenn der Quader in einem geodätisch-konvexen Gebiet des Raumes liegt, die vier geodätischen Diagonalen gleich.*

Natürlich liegt darin, daß auch die Paare geodätischer Diagonalen der Seitenflächen des Quaders, wie z. B. (000) (011), (001) (010) gleich lang sind, wie aus $u_1 \to u_0$ folgt. Dabei sind aber diese Diagonalen im Raume und nicht nur etwa auf den Seitenflächen zu messen. Daß aber auch die auf den Flächen gemessenen Diagonalen gleich sind, werden wir im folgenden § 3 einsehen.

§ 3.

Über die Koordinatenflächen eines Stäckelraumes.

Die Überlegungen von § 1 und § 2 gelten für jede Dimensionszahl n. Nehmen wir insbesondere den einfachsten Fall $n = 2$, so finden wir einen

vereinfachten Beweis für das Hauptergebnis der Dissertation von K. Zwirner†:

Satz III. *Sollen auf einer Fläche mit dem Bogenelement*

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 \tag{34}$$

in jedem Viereck $u_0 < u < u_1$, $v_0 < v < v_1$, *das einem geodätisch-konvexen Gebiet der Fläche angehört, die beiden geodätischen Diagonalen des Vierecks gleich lang sein, so ist dafür notwendig und hinreichend, daß das Bogenelement die Gestalt von Liouville hat:*

$$ds^2 = \begin{vmatrix} U^* & V^* \\ U_1^* & V_1^* \end{vmatrix} \left\{ \frac{du^2}{V_1^*} - \frac{dv^2}{U_1^*} \right\}. \tag{35}$$

Im positiv definiten Fall ($ds^2 > 0$) können wir stets, (wenn es nötig sein sollte, durch einen gleichzeitigen Vorzeichenwechsel von U_1^*, V_1^*) erreichen, daß $U_1^* > 0$, $V_1^* < 0$ wird und die neuen Veränderlichen u^*, v^* so einführen, daß

$$du^{*2} = +\,U_1^*\,du^2, \qquad dv^{*2} = -V_1^*\,dv^2$$

wird. Dann nimmt ds^2 die Gestalt an

$$ds^2 = \left(\frac{U^*}{U_1^*} - \frac{V^*}{V_1^*}\right)(du^{*2} + dv^{*2}).$$

Bei geeigneter Vereinfachung der Bezeichnung entsteht hieraus Liouvilles Linienelement im engeren Sinne, nämlich

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2). \tag{35*}$$

Wir wollen beweisen:

Satz IV. *Für ein Bogenelement* (1) *von Stäckel sind z. B. die Parameter* u, v *in jeder Fläche* $w =$ konst. *Liouvillesch.*

Um das zunächst ohne Rechnung einzusehen, verfahren wir so. Wir gehen von einem System (11), (16) von geodätischen Linien unseres Raumes aus und wählen die Konstanten C_1, C_2 so, daß $\omega(w_0) = 0$ wird.

Dann haben wir in der Fläche $w = w_0$ unseres Raumes eine von einem wesentlichen Parameter abhängige Kurvenschar

$$\begin{aligned} e\frac{du}{ds} &= \varphi = \sqrt{U + C_1 U_1 + C_2 U_2}, \\ g\frac{dv}{ds} &= \psi = \sqrt{V + C_1 V_1 + C_2 V_2}, \\ h\frac{dw}{ds} &= \omega = \sqrt{W + C_1 W_1 + C_2 W_2} = 0, \end{aligned} \tag{36}$$

† Siehe S. 654, Fußnote †.

von der man mittels der Schlußweise von Beginn des § 2 zeigt, daß sie aus geodätischen Linien der Fläche besteht, d. h. aus Extremalen des Variationsproblems δ Länge $= 0$ mit der Nebenbedingung $w = w_0$. Ferner zeigt die Schlußweise von (12), (13), auf den Fall von zwei Dimensionen übertragen, daß das Bogenelement in $w = w_0$ tatsächlich die Gestalt (35) haben muß.

Hierin ist ein weiteres geometrisches Ergebnis enthalten. Nämlich die (räumlich-)geodätischen Linien des betrachteten Systems (11) berühren die Fläche $w = w_0$ und haben dort die Schar (36) (flächen-)geodätischer Linien dieser „Brennfläche" $w = w_0$ als Einhüllende. Es ist das ein Sonderfall eines allgemeinen Satzes von Carathéodory aus der Variationsrechnung†, der für den Sonderfall des Euklidischen Raumes lange bekannt ist und dort aussagt: Die Normalen einer Fläche umhüllen auf den zugehörigen „Evolutenflächen" geodätische Linien.

Bestätigen wir unseren Satz IV auch noch durch Rechnung!

Wir können die Determinante (14) so umformen

$$\begin{vmatrix} U + C_1 U_1 + C_2 U_2 & V + C_1 V_1 + C_2 V_2 & 0 \\ U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \end{vmatrix},$$

worin für $w = w_0$ gesetzt zu denken ist, so daß

$$W + C_1 W_1 + C_2 W_2 = 0$$

wird. Dann geht aber (1) tatsächlich in die Gestalt (35) über, worin

$$U^* = U + C_1 U_1 + C_2 U_2, \qquad U_1^* = U_1 W_2 - U_2 W_1,$$
$$V^* = V + C_1 V_1 + C_2 V_2, \qquad V_1^* = V_1 W_2 - V_2 W_1$$

ist.

In § 2 hatten wir bemerkt, daß in einem Koordinatenquader eines Stäckelraumes nicht nur die vier geodätischen Verbindungslinien der vier Paare von gegenüberliegenden Ecken gleich lang sind, sondern auch immer je zwei der *räumlich-geodätisch gemessenen* Diagonalen der sechs Seitenflächen. Aus unseren Sätzen III und IV folgt jetzt, daß diese Diagonalen auch *auf den Seitenflächen geodätisch-gemessen* einander gleich sind.

Betrachten wir jetzt eine geodätische Linie unseres Stäckelraumes, die zwei Koordinatenflächen, etwa $v = v_0$ und $w = w_0$ berührt. Dann zeigt

† C. Carathéodory, Über die Enveloppen der Extremalen eines Feldes in mehrdimensionalen Räumen. *Δέλτιον τῆς Ἑλλην. Μαθημ. Ἑταιρείας* **4** (1923).

die Schlußweise (36), daß alle geodätischen Linien des Systems (11), das die erste enthält, unsere beiden Koordinatenflächen berühren.

Wir finden somit:

Satz V. *Die gemeinsamen geodätischen Tangenten zweier Koordinatenflächen zerfallen in Systeme, die je eine Schar von Parallelflächen orthogonal durchsetzen.*

Anders ausgedrückt: *Die räumlichen geodätischen Tangenten einer (Flächen-) Geodätischen auf einer Koordinatenfläche $u = u_0$ berühren auch die Koordinatenfläche $v = v_0$, wenn die Flächengeodätische die Schnittlinie $u = u_0$, $v = v_0$ berührt.*

Es sind dies Verallgemeinerungen von Ergebnissen, die M. Chasles 1846 über konfokale F_2 gefunden hat†.

Es ist leicht einzusehen, daß die Eigenschaft IV Stäckels Bogenelemente nicht kennzeichnet††. Schwieriger scheint die Frage der Umkehrbarkeit von Satz V zu sein.

§ 4.

Staudes Fadenkonstruktion.

Man pflegt folgenden Satz nach Th. Graves††† zu benennen: *Schlingt man um eine Ellipse* (Fig. 2) *einen geschlossenen unausdehnbaren Faden, den man durch einen kleinen Ring in der Ebene der Ellipse spannt, so ist dieser Ring auf einer zur gegebenen konfokalen Ellipse beweglich.* Schrumpft die erste Ellipse auf die Strecke zwischen ihren Brennpunkten zusammen, so sieht man, daß in diesem Satz von Graves als Sonderfall die bekannte Brennpunkteigenschaft der Ellipse enthalten ist. G. Darboux hat dann bemerkt, daß die Fadenkonstruktion von Graves auch für die Koordinatenlinien eines Liouvilleschen Bogenelements gestattet, aus einer Koordinatenlinie andere zu gewinnen††††. Staude††††† hat die Fadenkonstruktion von Graves auf die konfokalen F_2 übertragen.

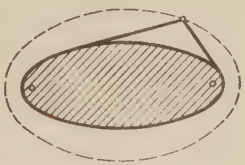


Fig. 2.

---

† M. Chasles, Sur les lignes géodésiques..., Liouvilles Journal (1) **11** (1846), S. 5—20. Vgl. etwa auch L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale II (1924), § 536, S. 728.

†† Beispielsweise hat das Bogenelement

$$ds^2 = (U_1 - W_2)(V_1 - U_2)\,du^2 + (V_1 - U_2)(W_1 - V_2)\,dv^2 + (W_1 - V_2)(U_1 - W_2)\,dw^2$$

die Eigenschaft IV, ist aber nicht Stäckelsch, wenn z. B. $U_1, U_2, 1$ linear unabhängig sind.

††† Literaturangaben in der Enzyklopädie III. C 1, S. 120, 121.

†††† G. Darboux, Theorie des Surfaces III, Paris 1894, Nr. 589, S. 21, 22.

††††† Siehe S. 653, Fußnote †††

Entsprechend der Verallgemeinerung, die Darboux von dem Ergebnis Graves' erzielt hat, soll hier gezeigt werden, daß Staudes Fadenkonstruktion auch für Stäckels Orthogonalsystem gültig bleibt.

Betrachten wir zwei Flächen, etwa $u = u_0$ und $v = v_0$, die den Punkt (000) gemein haben mögen und sich hier in der regulären w-Kurve schneiden mögen. Wir wollen der einfacheren Vorstellung halber annehmen die Fläche $u = u_0$ (und ebenso auch $v = v_0$) sei in der Umgebung der Stelle $(000) = (u_0, v_0, w_0)$ geodätisch konvex. D. h. eine genügend enge geodätisch konvexe Umgebung von (000) soll durch $u = u_0$ in zwei Gebiete zerlegt werden, von denen das eine (etwa $u < u_0$) wieder geodätisch konvex sein soll. Durch einen Punkt $R(u, v, w)$ in genügender Nähe von (000) und auf der konvexen Seite beider Flächen ($u > u_0$ und $v > v_0$) gehen dann genau zwei gemeinsame geodätische Tangenten, die die Flächen in der Nähe von (000) berühren. Die Richtungskegel an die geodätischen Tangenten in R an $u = u_0$ sowohl wie an $v = v_0$ unterscheiden sich nämlich um beliebig wenig von Kegeln zweiter Ordnung und diese Richtungskegel geodätischer Tangenten schneiden sich in zwei Erzeugenden, da die Kegel, wenn R auf die Kurve $u = u_0$, $v = v_0$ rückt, in die rechtwinkligen Tangentenebenen der beiden Flächen $u = u_0$ und $v = v_0$ übergehen. Wählen wir ferner unseren Punkt R nahe an $u = u_0$, so werden wir die Verhältnisse vor uns haben, wie sie in Fig. 3 dargestellt ist. Von R aus gehen räumliche geodätische Tangenten an $u = u_0$, die in den Punkten A_1 und A_2 diese Fläche berühren. Von dort aus gehen tangentiell weiter zwei Flächengeodätische $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, die die Kurve $u = u_0$, $v = v_0$ in B_1, B_2 berühren.

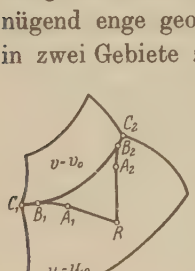


Fig. 3.

Befestigen wir jetzt in zwei Punkten C_1, C_2 der Linie $u = u_0$, $v = v_0$ jenseits von B_1, B_2 die Enden eines undehnbaren Fadens $C_1 B_1 A_1 R A_2 B_2 C_2$, der in dem konvexen Teil $u > u_0$, $v > v_0$ unserer beiden glatten Flächen $u = u_0$, $v = v_0$ zu bleiben genötigt ist, so ist diese Lage des Fadens eine Gleichgewichtslage, wenn er in R durch einen kleinen Ring läuft und von R aus in geeigneter Weise gespannt wird.

Wir behaupten nun:

Satz VI. *Der Ring R ist auf einer Fläche $v = konst.$ beweglich.*

Die durch die verschiedenen Lagen von R gehenden geodätischen Tangenten RA_1 und RA_2, die zuerst die Fläche $u = u_0$ und dann in der Verlängerung die Fläche $v = v_0$ berühren, bilden nämlich nach Satz V zwei Felder

$$(37)_1 \qquad e\frac{du}{ds} = +\varphi(u), \qquad g\frac{dv}{ds} = +\psi(v), \qquad h\frac{dw}{ds} = +\omega(w)$$

und

$$(37)_2 \qquad e\frac{du}{ds} = +\varphi(u), \quad g\frac{dv}{ds} = -\psi(v), \quad h\frac{dw}{ds} = +\omega(w)$$

mit

$$(38) \qquad \varphi(u_0) = 0, \quad \psi(v_0) = 0.$$

Aus (37) folgen jetzt für die Längen einzelner Teile unseres Fadens folgende Werte

$$(39) \quad \begin{aligned} B_1 A_1 &= \quad * \quad + \int_{v_0}^{v_2} \psi\, dv + \int_{w_1}^{w_2} \omega\, dw, \\ A_1 R &= + \int_{u_0}^{u} \varphi\, du + \int_{v_2}^{v} \psi\, dv + \int_{w_2}^{w} \omega\, dw, \\ R A_2 &= + \int_{u}^{u_0} \varphi\, du - \int_{v}^{v_3} \psi\, dv + \int_{w}^{w_3} \omega\, dw, \\ A_2 B_2 &= \quad * \quad - \int_{v_3}^{v_0} \psi\, dv + \int_{w_3}^{w_1} \omega\, dw, \end{aligned}$$

wenn $B_1 = (u_0, v_0, w_1)$, $A_1 = (u_0, v_2, w_2)$, $R = (u, v, w)$, $A_2 = (u_0, v_3, w_3)$, $B_2 = (u_0, v_0, w_4)$ gesetzt wird. Für die Länge des Fadens zwischen B_1 und B_2 folgt aus (39) durch Addition

$$(40) \qquad B_1 A_1 R A_2 B_2 = 2\int_{v_0}^{v} \psi\, dv + B_1 B_2,$$

worin

$$(41) \qquad B_1 B_2 = \int_{w_1}^{w_3} \omega\, dw$$

der auf der Kurve $u = u_0$, $v = v_0$ zwischen B_1, B_2 gemessene Bogen ist. Aus (40) folgt für die Gesamtlänge unseres Fadens

$$(42) \qquad C_1 B_1 A_1 R A_2 B_2 C_2 = 2\int_{v_0}^{v} \psi\, dv + C_1 C_2,$$

worin der letzte Bogen wieder auf der Kurve $u = u_0$, $v = v_0$ zu messen ist.

Da in (42) die rechte Seite nur von v nicht aber von u und w abhängt, ist darin die Richtigkeit unserer Behauptung VI enthalten.

Läßt man insbesondere den Knickpunkt R unseres Fadens auf der Fläche $u = u_0$ wandern, so erhält man aus unserer Fadenkonstruktion als Sonderfall die von Graves und Darboux für die Kurve $u = u_0$, $v =$ konst. innerhalb der Fläche $u = u_0$.

§ 5.

Ein Satz von Weihnacht.

Um nun festzustellen, welche Bedeutung unsere bisherigen Untersuchungen für den Euklidischen Raum haben, wollen wir folgenden von Weihnacht† durch nicht unerhebliche Rechnungen bewiesenen Satz auf Grund unserer Betrachtungen noch einmal beweisen:

Satz VII. *Die einzigen dreifachen Orthogonalsysteme Stäckels im Euklidischen Raum sind die konfokalen F_2 und deren Entartungen.*

Wir haben also in (1) die Funktionen $U, \ldots, W_2$ so zu bestimmen, daß das Bogenelement Euklidisch wird. Das ist der Weg, den Weihnacht eingeschlagen hat. Wegen unserer Sätze I und II genügt es aber auch: im Euklidischen Raum alle dreifachen Flächensysteme mit der Diagonaleigenschaft Ivorys aufzusuchen. Das ist aber sehr leicht.

Es seien nämlich $\{x_i, y_i, z_i\} = (u_i, v_i, w)$ und $\{x_i^*, y_i^*, z_i^*\} = (u_i, v_i, w^*)$ zweimal vier Punkte in einem Euklidischen Raum, in dem x, y, z Cartesische und u, v, w krummlinige Koordinaten mit Ivorys Eigenschaft (also Stäckelsche Koordinaten) bedeuten. Dann gilt für zwei Punkte $\{x, y, z\} = (u, v, w)$ und $\{x^*, y^*, z^*\} = (u, v, w^*)$ wegen der Gleichheit der Diagonalen

$$\sum (x - x_i^*)^2 - (x^* - x_i)^2 = 0; \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{43}$$

Subtrahieren wir eine dieser Gleichungen von den drei anderen, so erhalten wir drei *lineare* Gleichungen in x, y, z; x^*, y^*, z^*. Ließen diese sich nicht z. B. nach x^*, y^*, z^* auflösen, so könnten wir diese Koordinaten eliminieren und erhielten eine lineare Beziehung zwischen x, y, z. Dies können wir ausschließen, wenn wir annehmen, die betrachtete Fläche $w = \text{konst.}$ sei uneben. Dadurch werden nur die dreifachen Orthogonalsysteme beiseite gelassen, die nur aus Ebenen bestehen, also im wesentlichen nur die Systeme $x, y, z = \text{konst.}$

Wir können also unsere drei Gleichungen auflösen und erhalten so x^*, y^*, z^* als lineare Ausdrücke in x, y, z mit von Null verschiedener Determinante. *Durch die Zuordnung* $(u, v, w) \to (u, v, w^*)$ *sind also die beiden Flächen* w, w^* *affin aufeinander bezogen.* Setzen wir ferner die gefundenen Werte für x^*, y^*, z^* in eine der Gleichungen (43), so erhalten wir — falls nicht alles wegfällt — eine quadratische oder eine lineare Gleichung in x, y, z als Gleichung der Fläche $w = \text{konst.}$ in Cartesischen Koordinaten. Was wir für die Flächen $w = \text{konst.}$ gezeigt haben, gilt

† J. Weihnacht, Über die bedingt-periodischen Bewegungen eines Massenpunkts, Math. Annalen **91** (1924), S. 279—299; insbesondere S. 299.

natürlich auch für die Flächen $u = \text{konst.}$ und $v = \text{konst.}$ Die Parameterflächen sind also im allgemeinen F_2 oder Ebenen.

Den Fall $x, y, z = \text{konst.}$, daß nur Ebenen auftreten, haben wir schon betrachtet, wir können also annehmen, unsere Fläche $w = \text{konst.}$ sei eine unebene F_2. Eine Fläche $u = \text{konst.}$ muß dann ebenfalls eine F_2 sein, die nach Dupins Satz über dreifache Orthogonalsysteme† aus $w = \text{konst.}$ eine Krümmungslinie ausschneidet. Ist $w = \text{konst.}$ kein Drehkegel oder Drehzylinder und keine Kugel, so sind die Krümmungslinien dieser Fläche im allgemeinen Kurven vierter Ordnung, die aus der Fläche durch zu ihr konfokale F_2 ausgeschnitten werden. Durch eine solche Kurve, etwa $u = \text{konst.}$, $w = \text{konst.}$ kann außer $u = \text{konst.}$ keine andere F_2 gehen, die $w = \text{konst.}$ längs dieser Kurve $u = \text{konst.}$, $w = \text{konst.}$ orthogonal schneidet, denn sonst würde sie die $u = \text{konst.}$ längs einer Kurve vierter Ordnung berühren. Somit besteht in diesem allgemeinen Fall das Orthogonalsystem wirklich aus konfokalen F_2.

Wir haben nun die Sonderfälle zu betrachten, daß unser System nur Ebenen, Kugeln, Drehkegel und Drehzylinder enthält.

Ist die Fläche $w = \text{konst.}$ ein Drehkegel oder Drehzylinder, so lehrt dieselbe Überlegung, die wir soeben angestellt haben, daß die Ebenen durch die Drehachse der Fläche dem dreifachen Orthogonalsystem angehören, daß das System infolgedessen durch die Drehungen um diese Achse in sich übergeführt wird. Die unserer Fläche $w = \text{konst.}$, wie wir gezeigt haben, affinen anderen Flächen derselben Schar sind somit ebenfalls Drehkegel (-Zylinder), die mit dem ersten die Drehachse gemein haben. Der Schnitt unseres Systems mit einer Ebene durch die Drehachse enthält somit eine Geradenschar, deren orthogonale Trajektorien Kegelschnitte oder Geraden sind. Das kann aber nur ein Geradenbüschel mit den Orthogonalkreisen oder ein Parallelenbüschel sein. Wir erhalten also als dreifaches Orthogonalsystem entweder koaxiale konzentrische Drehkegel, die Ebenen durch die Drehachse und die konzentrischen Kugeln oder koaxiale Drehzylinder mit deren Symmetrieebenen.

Dreifache Orthogonalsysteme endlich, die nur Ebenen und Kugeln enthalten, sind leicht zu ermitteln†† und es bleibt deshalb nur noch der Fall zu erledigen, daß beim Einsetzen der linearen Ausdrücke x^*, y^*, z^* in (43) alle diese Gleichungen identisch in x, y, z erfüllt werden. Die vorhin betrachtete affine Zuordnung $\{x, y, z\} \rightarrow \{x^*, y^*, z^*\}$ läßt dann die Punkte x_i^*, y_i^*, z_i^* nach (43) wieder rückwärts in die Punkte x_i, y_i, z_i übergehen und hat die Eigenschaft, jedes Punktepaar x, y, z; x_i^*, y_i^*, z_i^*

† Vgl. etwa W. Blaschke, Differentialgeometrie I, 1924, § 39, S. 64.

†† Vgl. etwa das in vorhergehender Fußnote genannte Lehrbuch, S. 68.

in das Paar x^*, y^*, z^*; x_i, y_i, z_i mit derselben Entfernung überzuführen. Somit erhält diese Affinität *alle* Entfernungen, d. h. ist eine kongruente Abbildung. Da ferner in dieser Zuordnung die Punkte x_i^*, y_i^*, z_i^* wieder rückwärts in x_i, y_i, z_i übergehen, so ist diese kongruente Abbildung involutorisch, d. h. es kann sich nur um die Spiegelung an einer Ebene oder an einer Geraden handeln. Lassen wir w^* nach w rücken, so sehen wir, daß die vier Punkte x_i, y_i, z_i notwendig einer Ebene angehören. Wir kommen also wieder auf den Fall zurück, daß unser dreifaches Orthogonalsystem nur aus Ebenen besteht.

Auf Fragen, die sich an die hier vorgetragenen Untersuchungen anknüpfen, hoffe ich noch zurückzukommen.

Hamburg, Mathematisches Seminar, im Juni 1927.

(Eingegangen am 20. Juni 1927).

Die Axiomatisierung der Mengenlehre[1]).

Von

J. v. Neumann in Budapest.

Inhaltsverzeichnis.

Bezeichnungen.

I. Die Axiome.

1. Einleitung.
2. Diskussion der Axiome.
3. Systematisches zur Herleitung.

II. Die elementaren Operationen der Mengenlehre.

1. Hilfssätze.
2. Grunddefinitionen.
3. Einstellen-Funktionen und Elementarmengen.
4. Zusammensetzung von Funktionen.
5. Summe, Durchschnitt und Differenz von zwei Bereichen.
6. Rechenregeln.

III. Die allgemeinen Operationen der Mengenlehre.

1. Vereinigungsbereich und Durchschnitt eines Bereiches von Mengen.
2. Der Bildbereich.
3. Der Potenzbereich (Bereich aller Teilmengen).
4. Der Paarbereich.
5. Der allgemeine Potenzbereich.

[1]) Der Gegenstand dieser Arbeit stimmt in vielen Teilen mit dem meiner Doktor-Dissertation: Der axiomatische Aufbau der allgemeinen Mengenlehre, Budapest, September 1925 (ungarisch), überein.

IV. Grundbegriffe der Wohlordnung.

1. Die unvollständige Ordnung. Abschnitte.
2. Auferlegte und übertragene Ordnung. Subsumptionsordnung.
3. Eigenschaften der auferlegten und der übertragenen Ordnung.
4. Ähnlichkeit.
5. Vollständige und Wohlordnung.
6. Abschnitte in wohlgeordneten Bereichen.

V. Theorie der Ordnungszahlen.

1. Zählung, Ordnungszahl, Zählbarkeit.
2. Eindeutigkeit der Zählung.
3. Existenz der Zählung.
4. Subsumptionsordnung von Ordnungszahlen.
5. Charakteristische Eigenschaften von Ordnungszahlen.
6. Der Bereich der Ordnungszahlen.

VI. Ähnlichkeit und Ordnungszahlen. Der Wohlordnungssatz.

1. Ähnlichkeit und Ordnungszahlen.
2. Vergleichbarkeit, Eindeutigkeit der Abbildung.
3. Die Wohlordnung des Bereiches aller I-Dinge.
4. Die Wohlordnung beliebiger Bereiche.

VII. Die Äquivalenz und die Kardinalzahlen.

1. Die Äquivalenz.
2. Die Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten.
3. Die Vergleichbarkeit.

VIII. Die Endlichkeit. Die ersten Ordnungszahlen.

1. Die Endlichkeit.
2. Eigenschaften der Endlichkeit.
3. Grundoperationen mit Ordnungszahlen.
4. Die natürlichen Zahlen, ω.

IX. Induktionssätze.

1. Die transfinite Induktion.
2. Ein Spezialfall. Die finite (gewöhnliche vollständige) Induktion.

Schluß.

Bezeichnungen.

Wir geben hier eine Zusammenstellung der Zeichen, Namen und Symbole, die in dieser Arbeit benützt werden.

Zeichen.

Für I-Dinge (vgl. Kap. I, §§ 1, 2) a, b, c, d, e und $r, s, t, u, v, w, x, y, z$.
Für II-Dinge (vgl. Kap. I, §§ 1, 2) f, g, h, j, k, l, m, n und $\varphi, \psi, \chi, \xi, \zeta$.
Für Bereiche und Mengen (vgl. Kap. II, § 2) H, J, K, L, M, N.
Für Ordnungszahlen (vgl. Kap. V, § 1) P, Q, R, S, T.
Für Bereiche und Mengen von Ordnungszahlen $\mathfrak{H}, \mathfrak{J}, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$.

Namen und Symbole.

Symbol.	Name.	Erstes Auftreten.
I-Ding, II-Ding, I II-Ding	Funktion, Argument, Argument-Funktion.	Kap. I, §§ 1, 2.
$[f, x]$	Wert der Funktion f für das Argument x.	
$\langle x, y\rangle$	Paar der Argumente x, y.	
	Menge, Bereich.	Kap. II, § 2.
$x \varepsilon H$	x ist Element von H.	
$H \lesssim J,\ J \gtrsim H$	H ist ein Teilbereich (Teilmenge)	
$\varphi \lesssim \psi,\ \psi \gtrsim \varphi$	von J.	
$H < J,\ J > H$	H ist ein echter Teilbereich (echte	
$\varphi < \psi,\ \psi > \varphi$	Teilmenge) von J.	
$\varphi \sim \psi$		
$\left\{\begin{matrix} u, - \\ v, w \end{matrix}\right\}$		Kap. II, § 3.
0	Nullmenge.	
$\{u\}$		
$\left(\frac{f \mid g}{h}\right)$	Aus f und g mit Hilfe von h zusammengesetzte Funktion.	Kap. II, § 4.
$H + J$	Summe von H und J.	Kap. II, § 5.
$H \cdot J$	Durchschnitt (Produkt) von H und J.	
$H - J$	Differenz von H und J.	
$\mathfrak{B}(f)$	Basis von f.	
$\{u, v\}$		Kap. II, § 6.
Ω	Bereich aller I-Dinge (Argumente).	
$\mathfrak{S}(H)$	Vereinigungsbereich (Menge) aller Elemente von H.	Kap. III, § 1.
$\mathfrak{D}(H)$	Durchschnittsbereich (Menge) aller Elemente von H.	
$\|[f, H]\|$	Durch f vermittelter Bildbereich (Menge) von H.	Kap. III, § 2.

Symbol.	Name.	Erstes Auftreten.
$\mathfrak{P}(H)$	Potenzbereich (Bereich aller Teilmengen bzw. Menge usw.) von H.	Kap. III, § 3.
$\|\langle H, J\rangle\|$	Paarbereich (Menge) von H und J.	Kap. III, § 4.
H^J	H hoch J, J-te Potenz von H.	Kap. III, § 5.
$J\,\mathcal{UO}\,H$, $J\,\mathcal{VO}\,H$, $J\,\mathcal{WO}\,H$	J ist eine unvollständige, vollständige, Wohlordnung von H.	Kap. IV, §§ 1—5.
$u \dot{<} v \ldots (J)$ $u \dot{>} v \ldots (J)$ $u \parallel v \ldots (J)$	u liegt bei der Ordnung J vor, nach, unvergleichbar mit v.	
$\mathcal{UO}(H)$, $\mathcal{VO}(H)$, $\mathcal{WO}(H)$	Menge der unvollständigen, vollständigen, Wohlordnungen von H.	
$\mathfrak{Abs}(x; H, J)$	Der durch das Element x in dem nach J geordneten H bestimmte Abschnitt.	Kap. IV, § 1.
$\left(\frac{H'}{H}\right) J$	Die durch J dem Teilbereiche H' auferlegte Ordnung.	Kap. IV, § 2.
$[f]\,J$	Die durch die Abbildung f übertragene Ordnung J.	
Ω^*	Bereich aller Mengen.	
Σ	Die Subsumptionsordnung.	
$H, J \approx H', J' \ldots (f)$ $H, J \approx H', J'$	Das nach J geordnete H ist dem nach J' geordneten H' ähnlich.	Kap. IV, § 4.
$f\,\mathbf{Z}\,H, J$	f ist eine Zählung des nach J geordneten H.	Kap. V, § 1.
$\mathbf{POZ}\,H, J$	P ist eine Ordnungszahl des nach J geordneten H.	
$\mathbf{Z}\,H, J$	Das nach J geordnete H ist zählbar.	
$\mathbf{POZ}$	P ist eine Ordnungszahl.	
Ω^{**}	Der Bereich aller Ordnungszahlen.	
$\mathbf{Z}(H, J)$	Die Zählung des nach J geordneten H.	Kap. V, § 2.
$\mathbf{OZ}(H, J)$	Die Ordnungszahl des nach J geordneten H.	
$H, J \ll H', J'$ $H, J \gg H', J'$		Kap. VI, § 2.
W	Eine Wohlordnung des Bereiches aller I-Dinge.	Kap. VI, § 3.

Symbol.	Name.	Erstes Auftreten.
$H \approx H' \ldots (f)$		Kap. VII, § 1.
$H \approx H'$	H ist dem H' äquivalent.	
PKZ	P ist eine Kardinalzahl (Anfangszahl, Aleph, Mächtigkeit).	Kap. VII, § 2.
$KZ(H)$	Die Kardinalzahl (Anfangszahl usw.) von H.	
Γ	Der Bereich aller Kardinalzahlen.	
$H \ll H'$		Kap. VII, § 3.
$H \gg H'$		
HE, HU	H ist endlich; H ist unendlich.	Kap. VIII, § 1.
$\overline{E}$	Der Bereich aller endlichen Mengen.	
$P + 1$	Die auf P folgende Ordnungszahl.	Kap. VIII, § 3.
PLZ	P ist eine Limeszahl.	
ω		Kap. VIII, § 4.
PNZ	P ist eine natürliche Zahl (d. h. eine nicht-negative ganze rationale Zahl).	
$J(f)$		Kap. IX, § 1.
$J(f, P)$		Kap. IX, § 2.
$J(f, u)$		

I. Die Axiome.

1. Einleitung.

In meiner Arbeit „Eine Axiomatisierung der Mengenlehre“ [2]) habe ich ein Axiomensystem für die allgemeine Mengenlehre angegeben, und dasselbe vom allgemeinen und prinzipiellen Standpunkte aus näher untersucht. Eine detaillierte Diskussion desselben, d. h. die tatsächliche Herleitung der allgemeinen Mengenlehre oder wenigstens ihrer hauptsächlichsten Resultate, wurde dort nicht vorgenommen. Diese Herleitung soll nun in der vorliegenden Arbeit erfolgen. Bei der Beschreibung des Axiomensystems, sowie bei allen Fragen von allgemein-prinzipiellem Charakter werden wir uns hingegen auf das notwendige Minimum beschränken; für nähere diesbezügliche Ausführungen sei auf die unter [2]) zitierte Arbeit verwiesen. (Immerhin setzt diese Arbeit nirgends die Kenntnis der unter [2]) zitierten voraus.)

Auch gewisse in meiner Arbeit [2]) nur flüchtig berührte prinzipielle Fragen (Relativität der Wohlordnung und Endlichkeit, Fehlen der Kate-

[2]) Journal für reine und angewandte Mathematik **154** (1925), S. 219–240.

gorizität), sowie die Probleme der Unabhängigkeit und Widerspruchfreiheit der Axiome fallen außerhalb des Rahmens dieses Artikels. Ich beabsichtige auf einen Teil derselben bei einer späteren Gelegenheit zurückzukommen.

Wir beginnen mit der Beschreibung des zu axiomatisierenden Systems und mit der Angabe der Axiome. Eine kurze Erläuterung des Sinnes der einzelnen Symbole und Axiome lassen wir nachfolgen (dieselbe ist in der Arbeit [2]) detaillierter durchgeführt). Es ist übrigens selbstverständlich, daß man bei axiomatischen Untersuchungen, wie die unsere, die Ausdrucksweise „Sinn eines Symbols“ oder „Sinn eines Axioms“ nicht wörtlich nehmen darf: diese Symbole und Axiome haben (im Prinzip wenigstens) keinerlei Sinn, sie vertreten nur (in mehr oder minder vollständiger Weise) gewisse Begriffsbildungen der unhaltbar gewordenen „naiven Mengenlehre“. Wenn wir von „Sinn“ sprechen, so ist damit also stets der Sinn der ersetzten Begriffe der „naiven Mengenlehre“ gemeint.

Unser Axiomensystem lautet folgendermaßen:

Wir beschäftigen uns mit zwei Systemen, dem System der I-Dinge und der II-Dinge. Die beiden Systeme sind nicht identisch, sie überdecken sich aber teilweise: diejenigen Dinge, die zugleich I-Dinge und II-Dinge sind, nennen wir I II-Dinge.

Ferner beschäftigen wir uns mit den Dingen A, B, sowie mit den beiden Zwei-Variablen-Operationen $[f, x]$ und $\langle x, y\rangle$.

Alle diese müssen die folgenden Axiome erfüllen:

Einleitende Axiome.

I. 1. A, B sind I-Dinge.

2. $[f, x]$ hat dann und nur dann Sinn, wenn f ein II- und x ein I-Ding ist; es ist dann selbst ein I-Ding.

3. $\langle x, y\rangle$ hat dann und nur dann Sinn, wenn x und y beide I-Dinge sind, es ist dann selbst auch ein I-Ding.

4. f, g seien II-Dinge. Wenn für jedes I-Ding x $[f, x] = [g, x]$ ist, so ist $f = g$.

Arithmetische Konstruktionsaxiome.

II. 1. Es gibt ein II-Ding f, so daß stets $[f, x] = x$ ist.

2. u sei ein I-Ding. Es gibt dann ein II-Ding f, so daß stets $[f, x] = u$ ist.

3. Es gibt ein II-Ding f, so daß stets $[f, \langle x, y\rangle] = x$ ist.

4. Es gibt ein II-Ding f, so daß stets $[f, \langle x, y\rangle] = y$ ist.

5. Es gibt ein II-Ding f, so daß stets $[f, \langle x, y\rangle] = [x, y]$ ist. (Natürlich muß hier x ein I II-Ding sein, sonst ist die Gleichung sinnlos.)

6. f, g seien II-Dinge. Es gibt ein II-Ding h, so daß stets $[h, x] = \langle [f, x], [g, x] \rangle$ ist.
7. f, g seien II-Dinge. Es gibt ein II-Ding h, so daß stets $[h, x] = [f, [g, x]]$ ist.

Logische Konstruktionsaxiome.

III. 1. Es gibt ein II-Ding f, so daß $x = y$ (für I-Dinge x, y) mit $[f, \langle x, y \rangle] + A$ gleichbedeutend ist.
2. f sei ein II-Ding. Es gibt ein II-Ding g, so daß dann und nur dann $[g, x] + A$ ist, wenn für alle (I-Dinge) y $[f, \langle x, y \rangle] = A$ ist.
3. f sei ein II-Ding. Es gibt ein II-Ding g, so daß für jedes x, bei dem für ein und nur ein (I-Ding) y $[f, \langle x, y \rangle] + A$ ist, $[g, x]$ diesem y gleich ist.

I II-Dinge.

IV. 1. Es gibt ein II-Ding f, so daß ein I-Ding x dann und nur dann I II-Ding ist, wenn $[f, x] + A$ ist.
2. Ein II-Ding f ist dann und nur dann kein I II-Ding, wenn es ein II-Ding g mit der folgenden Eigenschaft gibt: Zu jedem I-Ding x existiert ein I-Ding y mit $[f, y] + A$, $[g, y] = x$.

Unendlichkeitsaxiome.

Hier erweist es sich als praktisch, die folgenden abkürzenden Bezeichnungsweisen einzuführen: f sei ein II-Ding; für $[f, x] + A$ schreiben wir auch $x \varepsilon f$. f, g seien II-Dinge; wenn für alle x aus $x \varepsilon f$ $x \varepsilon g$ folgt, so schreiben wir $f \lesssim g$. Für $g \lesssim f$ schreiben wir auch $f \gtrsim g$. Wenn $f \lesssim g$ und $f \gtrsim g$ ist, so schreiben wir $f \sim g$; wenn $f \lesssim g$, aber nicht $f \gtrsim g$ ist, so schreiben wir $f < g$; wenn $f \gtrsim g$, aber nicht $f \lesssim g$ ist, so schreiben wir $f > g$.

V. 1. Es gibt ein I II-Ding f mit den folgenden Eigenschaften: Es gibt I II-Dinge x mit $x \varepsilon f$. Wenn x ein I II-Ding mit $x \varepsilon f$ ist, so gibt es auch ein I II-Ding y mit $y \varepsilon f$, für welches $x < y$ ist.
2. f sei ein I II-Ding. Es gibt dann ein I II-Ding g mit der folgenden Eigenschaft: Aus $x \varepsilon y$, $y \varepsilon f$ (y ist also auch ein I II-Ding) folgt $x \varepsilon g$.
3. f sei ein I II-Ding. Es gibt dann ein I II-Ding g mit der folgenden Eigenschaft: Wenn für ein I II-Ding $x \lesssim f$ ist, so gibt es ein I II-Ding y mit $x \sim y$, $y \varepsilon g$.

Das ist unser Axiomensystem. Zu seiner Erläuterung wollen wir noch folgendes anführen.

2. Diskussion der Axiome.

Wir haben statt dem Begriffe der Menge hier den Begriff der Funktion zum Grundbegriffe gemacht: die beiden Begriffe sind ja leicht aufeinander zurückzuführen[3]). Die technische Durchführung gestaltet sich jedoch beim Zugrundelegen des Funktionsbegriffes wesentlich einfacher, allein aus diesem Grunde haben wir uns für denselben entschieden.

Die I-Dinge sind die „Elemente“ oder „Argumente“, aus ihnen werden die „Mengen“ und „Funktionen“ gebildet. Die II-Dinge hingegen sind die „Funktionen“, sie sind für I-Dinge, d. h. für „Argumente“ definiert, und haben auch solche als Werte. Die Operation $[f, x]$ bildet aus der „Funktion“ (d. h. II-Ding) f und dem „Argumente“ (d. h. I-Ding) x den „Wert der Funktion f an der Stelle x“ $[f, x]$, der seinerseits wieder „Argument“ (d. h. I-Ding) ist. Die charakteristische Eigenschaft der Funktionen, durch ihren Wertverlauf eindeutig festgelegt zu sein, wird durch das „Bestimmtheitsaxiom“ I. 4. ausgedrückt. (D. h. I. 4. besagt, daß jeder Wertverlauf durch *höchstens* eine Funktion dargestellt wird, ob es aber überhaupt eine solche Funktion gibt, ist dadurch noch nicht gesagt.)

Die zulässigen Wege zur Herstellung von Funktionen werden in den Gruppen II, III angegeben. Die Einteilung ist so getroffen, daß die Herstellungsarten, die einen logischen Charakter haben, in III zusammengestellt sind, und die übrigen in II. Das Axiom IV. 1. könnte aus diesem Gesichtspunkte eigentlich auch noch zu III gezählt werden[4]).

Wesentlich ist ferner die Frage, welche „Funktionen“ fähig sind, Argumente anderer Funktionen zu sein (das wesentlichste „imprädikative“ oder „zirkelhafte“ Element der allgemeinen Mengenlehre liegt an diesem Punkte), d. h. welche II-Dinge gleichzeitig I II-Dinge sind. Alle können es nicht sein, denn dies würde, bei den Hilfsmitteln, die uns durch die Axiome der Gruppen II, III zur Herstellung von Funktionen geliefert werden, zu einer Antinomie führen, die der Russellschen entspricht[5]).

[3]) Eine Funktion f kann als Menge aller Paare $x, f(x)$ betrachtet werden, und eine Menge als eine Funktion, die nur zweier Werte („Element-Sein“ und „Nicht-Element-Sein“) fähig ist.

[4]) Das Axiom IV. 1. kann auch als Dual von IV. 2. angesehen werden: es bestimmt wann ein I-Ding auch I II-Ding ist, während IV. 2. bestimmt wann ein II-Ding I II-Ding ist. Es ist aber im Gegensatze zu IV. 2. ziemlich oberflächlich, und könnte z. B. sehr gut durch die Forderung, daß jedes I-Ding gleichzeitig I II-Ding sei, ersetzt werden. (Fraenkel z. B. tut etwas derartiges.)

[5]) Diese Antinomie kann z. B. so hergeleitet werden: Wir wählen f nach III. 1 dann ist für jedes I II-Ding (d. h. jede Argument-Funktion) $[f, \langle [x, x], A\rangle] \neq A$ oder $= A$, je nachdem $[x, x] = A$ oder $\neq A$ ist. Also ist stets $[f, \langle [x, x], A\rangle] \neq [x, x]$

(Fortsetzung der Fußnote [5]) auf der nächsten Seite.)

Wir beantworten die Frage in einem Sinne, die wohl die sinngemäße Übertragung des Russell-Zermeloschen Idee ist, wonach die „nicht zu großen“ Mengen allein zulässig sind. Dies geschieht durch das Axiom IV. 2., welches im wesentlichen aussagt: Eine „Funktion“ f ist dann und nur dann auch „Argument“ (d. h. ein II-Ding f auch I II-Ding), wenn es nicht für zu viele x solche Werte $[f, x]$ hat, die $= A$ sind. Oder genau formuliert: Wenn diejenigen x, für die $[f, x] = A$ ist, nicht auf alle x überhaupt abgebildet werden können. (Diese Präzisierung des Begriffes „zu groß“ bzw. „zu viele“ ist freilich etwas willkürlich und über die Russell-Zermelosche Idee hinausgehend, sie kann nur an ihren Konsequenzen geprüft werden.)

Das Axiom IV. 2. enthält übrigens das „Aussonderungsaxiom“ von Zermelo und Fraenkel[6]), das „Ersetzungsaxiom“ von Fraenkel[7]), und den Wohlordnungssatz (d. h. das „Multiplikationsaxiom“ von Zermelo und Fraenkel[6])). Diese Umstände werden wir noch an den betreffenden Orten unserer Herleitung der Mengenlehre entsprechend hervorheben[8]).

Die Gruppe V (Unendlichkeitsaxiome) umfaßt schließlich alle Axiome, die zur Herstellung der unendlichen Mächtigkeiten (außer dem „Ersetzungsaxiom“, vgl. Fußnote [7])) notwendig sind. Sie entsprechen den Axiomen von der „unendlichen Menge“, der „Vereinigungsmenge“ und der „Potenz-

---

Wir können nun $[f, \langle [x, x], A \rangle]$ mit Hilfe der Axiome II. 1.—7. auf die Form $[g, x]$ bringen (vgl. Kap. II, § 1, Hilfssatz 1, der hier ohne weiteres angewandt werden kann); damit haben wir ein II-Ding (Funktion) g gewonnen, bei dem für jedes I II-Ding (jede Argument-Funktion) $[g, x] \neq [x, x]$ ist.

Wäre nun jedes II-Ding gleichzeitig auch I-Ding (jede Funktion auch Argument), so würde hieraus die Unmöglichkeit $[g, g] \neq [g, g]$ folgen.

Unsere Funktion g entspricht der Russellschen „Menge aller Mengen, die sich selbst nicht enthalten“.

[6]) Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Math. Annalen **65** (1908), S. 261—281. Fraenkel, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. Math. Zeitschr. **22** (1925), S. 250—273.

[7]) Fraenkel, Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre. Math. Annalen **86** (1922), S. 230—237. Das Ersetzungsaxiom lautet in der ursprünglichen Fassung von Fraenkel folgendermaßen: „Wenn wir jedes Element x einer Menge H durch ein ξ ersetzen (ξ abhängig von x), so bilden auch die ξ eine Menge.“ In der bei [6]) zitierten Arbeit von Fraenkel wird dieses Axiom übrigens vermieden, aber zunächst kein anderes damit adäquates aufgestellt. Irgendein Axiom von diesem Charakter ist jedenfalls notwendig, um die ganze Reihe der Mächtigkeiten und die Theorie der Ordnungszahlen aufstellen zu können.

[8]) Dem „Aussonderungsaxiom“ entspricht das Schlußresultat im Kap. II, § 2; dem „Ersetzungsaxiom“ der Satz 10b (Kap. III, § 2); und das Auswahlprinzip (d. h. das „Multiplikationsaxiom“) wird im Satz 56 und im Satz 57 (Kap. VI, § 3) ausgesprochen.

menge“ bei Zermelo und Fraenkel[9]). Die Existenz von II-Dingen mit den dort verlangten Eigenschaften folgt immer aus den Axiomen der Gruppen I bis IV[10]), die wesentliche Forderung ist hier stets, daß es I II-Dinge sein sollen.

Es ist hier am Platze, zu erklären, was wir unter „Menge“ verstehen (genauer: wodurch wir die Mengen der „naiven Mengenlehre“ ersetzen wollen), da bisher bloß die „Funktion“ erklärt wurde. Wir nennen eine Funktion (d. h. ein II-Ding) f einen „Bereich“, wenn er nur der zwei Werte A, B fähig ist (d. h. wenn stets $[f,x]=A$ oder $[f,x]=B$ ist). Seine „Elemente“ sind diejenigen „Argumente“, für die sein „Wert“ $=B$ ist. Und wir nennen einen „Bereich“ eine „Menge“, wenn er gleichzeitig „Argument“ (d. h. I II-Ding) ist. Hier liegt der wesentliche Unterschied unseres Axiomensystems vom Zermelo-Fraenkelschen: Dort sind die „zu großen“ Mengen einfach verboten, unherstellbar; bei uns können sie (als „Bereiche“) gebildet werden, nur sind sie unfähig, Elemente anderer „Mengen“ oder „Bereiche“ zu sein. Dies ist zumindest formal bequemer, und zur Vermeidung der Antinomien (insbesondere der Russellschen) reicht es bereits aus.

Wie man sieht, ist übrigens die Wahl von B gleichgültig, wir mußten diesen „zweiten Wert der Bereich-artigen Funktionen“ (der „erste Wert“ ist ja jedenfalls A) nur ein- für allemal festlegen, er geht aber nicht mehr in die Axiome ein[11]).

Schließlich müssen wir noch die Operation $\langle x,y\rangle$ erklären. Es ist der Begriff des „Paares“ (von „Argumenten“, d. h. I II-Dingen), der unbedingt notwendig ist, um mit Hilfe unseres Funktionsbegriffes, der offenbar ein-variablig ist, auch mehr-variablige Funktionen beherrschen zu können. Seine wesentlichste Eigenschaft ist, daß aus $\langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle$ $x=x', y=y'$ folgt. Dies kommt unter unseren Axiomen in dieser Form nicht vor, weil es aus den Axiomen II. 3. und II. 4. ohne weiteres folgt.

3. Systematisches zur Herleitung.

Wir wollen nun noch eine kurze Skizze der Anordnung geben, in der wir im folgenden die Hauptresultate der Mengenlehre aus unseren Axiomen herleiten werden.

---

[9]) Vgl. die bei [6]) zitierten Arbeiten.

[10]) Es genügt ja dann ein f zu finden, für welches stets $[f,x]\neq A$ ist. Wir können also f nach II. 2. mit einem $u\neq A$ wählen, z. B. mit $u=B$.

[11]) Auch die Existenz eines I-Dinges, das $\neq A$ ist, folgt aus den Axiomen: Wir wählen f nach III. 1., dann ist $[f,\langle A,A\rangle]\neq A$. — Wenn wir B aus den Axiomen nicht ausschlössen, so ließe sich das Axiom V. 3. (von der „Potenzmenge“) etwas einfacher formulieren.

In den Kapiteln II und III leiten wir zunächst die grundlegenden Operationen der Mengenlehre her, die in der „naiven Mengenlehre" sich ganz von selbst verstehen. Wir müssen uns in diesen Kapiteln sozusagen die notwendige Bewegungsfreiheit verschaffen.

Die wesentlichen Überlegungen, nämlich die Herleitung der Theorien von der Endlichkeit, Äquivalenz, Ähnlichkeit und Wohlordnung geschieht in den Kapiteln IV — VIII. Hierbei kehren wir die soeben angeführte, allgemein übliche Reihenfolge der Behandlung um: Wir beginnen mit der Ähnlichkeit (IV), dann folgt einiges über die Wohlordnung im allgemeinen (IV), die Theorie der Ordnungszahlen (V), der Wohlordnungssatz (VI), und zum Schlusse kommt erst die Äquivalenz (VII) und die Endlichkeit (VIII). Dies stößt zwar den historischen Gang der Entwicklung um, ist aber vom systematischen Standpunkte weit angenehmer: erst durch den Besitz des Ordnungszahlen-Begriffes und des Wohlordnungssatzes wird man in die Lage versetzt, die Probleme der Äquivalenz und der Endlichkeit schnell und vollständig zu erledigen.

Es ist eine Eigenheit unserer Axiome (insbesondere des Axioms VI. 2.), daß wir dabei zwei klassische Gedankenreihen der „naiven Mengenlehre" nicht benützen müssen noch können: nämlich den Bernsteinschen „Äquivalenzsatz" und die Zermelosche Herleitung des „Wohlordnungssatzes" aus dem „Auswahlprinzip[12]). Wie diese Sätze hier bewiesen werden, werden wir an den entsprechenden Stellen der Herleitung hervorheben[13]).

Die Aufstellung der Theorie der Ordnungszahlen wird auf einem Wege durchgeführt, der von dem in der naiven Mengenlehre üblichen wesentlich abweicht: Steht uns doch der dort reichlich benutzte Begriff des „Definierens durch Abstraktion" nicht zur Verfügung. Die in Frage kommende Theorie habe ich bereits in meiner Arbeit „Zur Einführung der transfiniten Ordnungszahlen"[14]) entwickelt, allerdings in der Ausdrucksweise der „naiven Mengenlehre". Auch die Einführung der Mächtigkeiten bedingt ähnliche Vorsichtsmaßregeln.

[12]) Der „Äquivalenzsatz" wurde zuerst von F. Bernstein bewiesen, zuerst veröffentlicht in E. Borel's Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, S. 103ff. Sowohl Zermelo wie Fraenkel haben ihn in ihren Formalismus übertragen. Die Herleitung des „Wohlordnungssatzes" aus dem „Auswahlprinzip" stammt von Zermelo, und zwar wurde sie in seinen zwei folgenden Arbeiten durchgeführt: Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, Math. Annalen **59** (1906), S. 514—516. Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, Math. Annalen **65** (1908), S. 107—128. Besonders interessant ist der zweite Beweis Zermelos, der von der Theorie der Wohlordnung unabhängig ist.

[13]) Zum „Äquivalenzsatz" vgl. Satz 68 und Satz 69 (Kap. VII, § 3) und Fußnote [31]), zum „Wohlordnungssatz" Satz 54 und Satz 55 (Kap. VI, §§ 3, 4).

[14]) J. v. Neumann, Zur Einführung der transfiniten Ordnungszahlen, Acta universitatis Franc. Jos., Szeged, **1** (1923), S. 199—208.

Im letzten Kapitel (IX) folgt schließlich ein Beweis der eindeutigen Möglichkeit der „Definition durch transfinite bzw. finite (d. h. gewöhnliche vollständige) Induktion". Diese beiden Prinzipien wurden in der „naiven Mengenlehre" vielfach als keines Beweises bedürftige evidente Wahrheiten angesehen. In einer axiomatischen Mengenlehre ist beides jedenfalls unzulässig; und wenn auch der inhaltliche evidente Charakter der „finiten Induktion" zuzugeben ist, so ist dafür die „transfinite Induktion" höchst fraglich. (Der anschaulich-empirische Charakter der der „finiten Induktion" zugrunde liegenden natürlichen Zahlen, d. h. der nicht-negativen ganzen rationalen Zahlen, ist ja unanfechtbar; mit den der „transfiniten Induktion" zugrunde liegenden Ordnungszahlen verhält es sich wohl anders. Wenn auch die sich unmittelbar an ω anschließende Partie

$$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, 2\omega, 2\omega+1, 2\omega+2, \ldots, 3\omega, \ldots, 4\omega, \ldots, \ldots,$$
$$\omega^2, \ldots, 2\omega^2, \ldots, 3\omega^2, \ldots, \ldots, \omega^3, \ldots, 2\omega^3, \ldots, 3\omega^3, \ldots, \ldots, \omega^4, \ldots,$$
$$\omega^5, \ldots, \omega^6, \ldots, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{(\omega^\omega)}, \ldots, \varepsilon, \ldots$$

noch einen gewissen anschaulichen Sinn hat, so wird doch der *volle* Verlauf der Ordnungszahlen-Reihe kaum anders als eine rein formalistische Begriffsbildung gedeutet werden können[15]). Der Beweis dieser Definitionsprinzipien mag auch darum nicht uninteressant sein, weil er im Rahmen einer axiomatischen Mengenlehre wohl noch nie geführt wurde.

II. Die elementaren Operationen der Mengenlehre.

1. Hilfssätze.

Wir beweisen zuerst drei Hilfssätze, die notwendig sind, um uns die wünschenswerte Freiheit im Umgehen mit den Operationen $[f, x]$ und $\langle x, y\rangle$ zu verschaffen. Sie lauten folgendermaßen:

Hilfssatz 1. $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sei ein Ausdruck, der aus den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und irgendwelchen Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ durch Anwendung der Operationen $[f, x]$ und $\langle x, y\rangle$ zusammengesetzt ist. Dabei durchlaufen die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die I-Dinge, während die Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ I-Dinge oder II-Dinge sind.

Der Ausdruck $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ braucht nicht für jedes System von I-Dingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Sinn zu haben (z. B. hat $[\langle x_1, x_2\rangle, x_2]$ dann und nur dann Sinn, wenn $\langle x_1, x_2\rangle$ ein I II-Ding ist), wenn er aber Sinn hat,

---

[15]) Ich hoffe, auf diese Eigentümlichkeit der Ordnungszahlen-Reihe, die auch mit der Frage der „Kategorizität" der Mengenlehre zusammenhängt, noch in einer späteren Arbeit zurückkommen zu können. Bezüglich verwandter Fragen vgl. die §§ II 3, 5 meiner bei [1]) zitierten Arbeit. Über die Ordnungszahlen-Reihe vgl. auch Kap. IX, § 1 dieser Arbeit.

soll er ein I-Ding sein. (Hierdurch wird der eine Fall ausgeschlossen, daß $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gleich c_p ist, wobei die Konstante c_p ein II-Ding ist, aber kein I II-Ding.)

Es gibt dann ein II-Ding f (f ist natürlich von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig, aber von $c_1, c_2, \ldots, c_m$ abhängig), so daß für alle Systeme von von I-Dingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für die $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ einen Sinn hat, stets

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [f, \langle\langle \ldots \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle \ldots\rangle, x_n\rangle]$$

ist. (Für $n = 1$ verstehen wir unter $\langle\langle \ldots \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle \ldots\rangle, x_n\rangle$ einfach x_1.)

Bemerkung. Bei diesem Hilfssatze sind wohl zwei erläuternde Bemerkungen angebracht.

Erstens über seinen Sinn. In unserem System ist die Normalform eines ein-variabligen Funktionen-Verlaufes der Ausdruck $[f, x]$ (f konstant, x variabel), dies folgt aus der Deutung der II-Dinge f als „Funktionen". Zur Normalform des mehr-variabligen Funktionen-Verlaufes wollen wir nun $[f, \langle\langle \ldots \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle, \ldots\rangle, x_n\rangle]$ machen (f konstant, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variabel); und dies wird uns durch diesen Hilfssatz ermöglicht, welcher garantiert, daß alle Ausdrücke mit Konstanten und Variablen auf diese Normalform gebracht werden können.

Zweitens über seine prinzipielle Zulässigkeit. Wir benützen den allgemeinen Begriff der natürlichen Zahl, sowie den Begriff eines „durch sukzessives Anwenden gewisser Operationen entstandenen Ausdrucks", d. h. im wesentlichen die Definition durch finite Induktion. Dies ist aber bei der Begründung der axiomatischen Mengenlehre jedenfalls zu vermeiden, denn alle diese Begriffe können und sollen doch auf axiomatisch-mengentheoretischer Grundlage hergeleitet werden[16]). (Vgl. Kap. VIII, § 4 und Kap. IX, § 2.) Wie ist das mit dem Aufstellen unseres Hilfssatzes 1 zu vereinen?

Die Antwort ist einfach: Wir werden den Hilfssatz 1 niemals als allgemeinen Satz ansehen (als welcher er offenbar unzulässig wäre), sondern nur auf konkrete Spezialfälle anwenden. Ein in concreto gegebener Ausdruck der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $c_1, c_2, \ldots, c_m$ hat mit dem Prinzip der finiten Induktion nichts zu tun, unser weiter unten zu führender induktiver Beweis des Hilfssatzes 1 wird dann zu einer endlich durchführbaren Konstruktion. Wollten wir von der allgemeinen Formulierung des Hilfssatzes 1 absehen (was prinzipiell konsequent wäre), so müßten wir bei jeder später vorkommenden Reduktion eines Ausdruckes auf die Normalform dieselbe Konstruktion detailliert ausführen. Es ist technisch bequemer, die Methode

[16]) Fraenkel (vgl. seine bei [6]) zititierte Arbeit) nimmt einen anderen Standpunkt ein: er benützt das Prinzip der (anschaulichen) vollständigen Induktion (natürlich nur der finiten!) beim axiomatischen Behandeln der Mengenlehre.

dieser Konstruktionen hier allgemein anzugeben und sich später einfach darauf zu berufen. Lediglich deshalb sprechen wir diesen Hilfssatz hier allgemein aus, und stellen sofort fest, daß wir ihn nicht als einen exakten, allgemeinen Satz unserer Theorie ansehen, sondern vielmehr etwa als die Skizze einer allgemeinen Beweismethode.

(Die Bemerkung liegt nahe, daß die vorangehenden Ausführungen eigentlich keine Einschränkung des Geltungsbereiches von Hilfssatz 1 involvieren, sondern nur eine Umschreibung des Beriffes eines „allgemeinen Satzes" sind; also daß diese Ausführungen zwecklos sind. Es sei erlaubt, demgegenüber darauf hinzuweisen, daß ein auf eine unendliche Anzahl von Spezialfällen bezogener „allgemeiner Satz" etwas mehr ist, als die Summe seiner Spezialfälle; daß hier jedenfalls noch ein neues transzendentes Moment hinzukommt, wie es die moderne Kritik der Grundlagen der Logik und Mathematik gezeigt hat.)

Beweis. Wir können bei jedem Ausdrucke $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die Anzahl der in ihm vorkommenden Operationen $[f, x]$ und $\langle x, y\rangle$ feststellen, und nennen dieselbe seinen Grad. Der Grad ist $= 0, 1, 2, \ldots$. Wir werden unsere Behauptung für alle $\mathfrak{A}$-s vom Grade 0 beweisen; und dann daraus, daß sie für alle $\mathfrak{A}$-s von Graden $< k$ zutrifft ($k = 1, 2, \ldots$), ihre Gültigkeit für die $\mathfrak{A}$-s vom Grade k herleiten.

Zuerst zeigen wir aber, daß es genügt, wenn wir uns mit dem Falle $n = 1$ beschäftigen. Ist nämlich $n > 1$, so wählen wir f nach II. 3. und g nach II. 4., dann ist:

$$\begin{aligned}
x_1 &= [f, [f, [\ldots [f, \langle\langle\ldots\langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle\ldots\rangle, x_n\rangle]\ldots]]],\\
x_2 &= [g, [f, [\ldots [f, \langle\langle\ldots\langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle\ldots\rangle, x_n\rangle]\ldots]]],\\
x_3 &= \quad [g, [\ldots [f, \langle\langle\ldots\langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle\ldots\rangle, x_n\rangle]\ldots]],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= \qquad\qquad [g, \langle\langle\ldots\langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle\ldots\rangle, x_n\rangle].
\end{aligned}$$

Wenn wir dies in $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ einsetzen, so wird:

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathfrak{A}^*(\langle\langle\ldots\langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle\ldots\rangle, x_n\rangle),$$

und wenn der Satz für $n = 1$ schon bewiesen ist,

$$= [f^*, \langle\langle\ldots\langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle\ldots\rangle, x_n\rangle].$$

Es sei also $n = 1$. Wenn $\mathfrak{A}(x)$ den Grad 0 hat, so ist $\mathfrak{A}(x) = c_p$ (c_p ist dann I-Ding) oder $\mathfrak{A}(x) = x$. Wir wählen also f nach II. 2. ($u = c_p$) oder nach II. 1., und sind damit am Ziele.

Wenn $\mathfrak{A}(x)$ den Grad k hat ($k = 1, 2, \ldots$) und für alle $\mathfrak{B}(x)$ mit Graden $< k$ schon alles bewiesen ist, so schließen wir so:

$\mathfrak{A}(x)$ hat eine der drei folgenden Formen:

$$[f, \mathfrak{B}(x)], \quad \langle \mathfrak{C}(x), \mathfrak{B}(x) \rangle, \quad [\mathfrak{C}(x), \mathfrak{B}(x)],$$

wo $\mathfrak{B}(x)$, $\mathfrak{C}(x)$ ebensolche Ausdrücke sind und f ein II-Ding (aber kein I II-Ding, denn dann haben wir wieder $[\mathfrak{C}(x), \mathfrak{B}(x)]$) ist. $\mathfrak{B}(x)$, $\mathfrak{C}(x)$ haben offenbar Grade $\leqq k-1 < k$, also ist

$$\mathfrak{B}(x) = [g, x], \qquad \mathfrak{C}(x) = [h, x],$$

also

$$\mathfrak{A}(x) = [f, [g, x]], \ \langle [h, x], [g, x] \rangle, \ [[h, x], [g, x]].$$

Der erste Ausdruck ist mit Hilfe von II. 7. sofort auf die gewünschte Form $[j, x]$ zu bringen, der zweite mit Hilfe von II. 6.; beim dritten schließlich müssen wir sukzessiv II. 5., 6. und 7. anwenden.

Damit ist die Behauptung restlos bewiesen.

Hilfssatz 2a. φ sei ein II-Ding. Es gibt ein II-Ding ψ, so daß $[\varphi, x] + A$ mit $[\psi, x] = A$ gleichbedeutend ist und folglich $[\varphi, x] = A$ mit $[\psi, x] + A$.

Hilfssatz 2b. φ, ψ seien II-Dinge. Es gibt ein II-Ding χ, so daß dann und nur dann $[\chi, x] + A$ ist, wenn $[\varphi, x] + A$ oder $[\psi, x] + A$ ist.

Hilfssatz 2c. φ, ψ seien II-Dinge. Es gibt ein II-Ding χ, so daß dann und nur dann $[\chi, x] + A$ ist, wenn zugleich $[\varphi, x] + A$ und $[\psi, x] + A$ ist.

Beweis. (Für 2a.) Wir wählen f nach III. 1., dann wird $[\varphi, x] + A$ mit $[f, \langle A, [\varphi, x] \rangle] = A$ gleichbedeutend, und wenn wir $[f, \langle A, [\varphi, x] \rangle]$ auf die Form $[\psi, x]$ bringen, mit $[\psi, x] = A$.

(Für 2b.) $[\varphi, x] + A$ oder $[\psi, x] + A$ bedeutet $\langle [\varphi, x], [\psi, x] \rangle + \langle AA \rangle$ (denn $\langle u, v \rangle = \langle u', v' \rangle$ bedeutet wegen II. 3. und II. 4. $u = u'$, $v = v'$), also $[f \langle \langle [\varphi, x], [\psi, x] \rangle, \langle A, A \rangle \rangle] = A$, d.h. $[f, \langle [f, \langle \langle [\varphi, x], [\psi, x] \rangle, \langle A, A \rangle \rangle], A \rangle] + A$. Und wenn wir die linke Seite auf die Normalform $[\chi, x]$ bringen, so wird hieraus $[\chi, x] + A$.

(Für 2c.) Dies folgt direkt aus 2a und 2b.

Hilfssatz 3. φ sei ein II-Ding. Wenn wir in $[\varphi, \langle x, y \rangle]$ φ und x als Konstante und y als Variable ansehen, so können wir diesen Ausdruck auf die Normalform $[\xi, y]$ bringen. Wegen I. 4. wird es nur ein II-Ding ξ geben, für welches stets $[\varphi, \langle x, y \rangle] = [\xi, y]$ (ξ abhängig vom φ und x!) ist.

Es gibt nun zwei II-Dinge ψ und χ (abhängig von φ!), so daß $[\psi, x] + A$ damit gleichbedeutend ist, daß das II-Ding ξ auch ein I II-Ding ist, und daß in diesem Falle immer $\xi = [\chi, x]$ ist.

Beweis. Daß ein I-Ding ξ ein I II-Ding ist, können wir nach IV. 1. so schreiben: $[f, \xi] \neq A$. — $[\varphi, \langle x, y\rangle] = [\xi, y]$ drückt sich so aus: $[g, \langle[\varphi, \langle x, y\rangle], [\xi, y]\rangle] \neq A$. Wenn wir dies auf die Normalform bringen, so wird: $[h, \langle\langle x, \xi\rangle, y\rangle] \neq A$ oder $[j, \langle\langle x, \xi\rangle, y\rangle] = A$. Daß dies für alle y der Fall ist, bedeutet nach III. 2.: $[k, \langle x, \xi\rangle] \neq A$. — Da wir auch $[f, \xi] \neq A$ auf die Normalform $[l, \langle x, \xi\rangle] \neq A$ bringen können, so können wir sagen: ein I II-Ding ξ, für welches stets $[\varphi, \langle x, y\rangle] = [\xi, y]$ ist, existiert dann und nur dann, wenn $[k, \langle x, \xi\rangle] \neq A$ und $[l, \langle x, \xi\rangle] \neq A$ zugleich erfüllbar ist, d. h. wenn $[m, \langle x, \xi\rangle] \neq A$ erfüllbar ist. Dies bedeutet nach III. 2. $[n, x] = A$, d. h. $[\psi, x] \neq A$. Und wenn es ein solches ξ gibt, so gibt es wegen I. 4. nur ein einziges, also brauchen wir χ nur nach III. 3. zu wählen, und es wird $[\chi, x] = \xi$. —

Damit haben wir alle Hilfssätze hergeleitet, deren wir zur Inangriffnahme unserer Aufgaben benötigen. Wir wollen nun noch die wesentlichsten Definitionen und Begriffsbildungen zusammenstellen, die wir in Kap. I bereits entwickelt haben.

2. Grunddefinitionen.

Diese Definitionen sind die folgenden:

φ sei ein II-Ding. Wir nennen es einen Bereich, wenn für alle x $[\varphi, x] = A$ oder $[\varphi, x] = B$ ist. Wenn ein Bereich sogar I II-Ding ist, so nennen wir ihn eine Menge.

φ sei ein II-Ding, x ein I-Ding. Für $[\varphi, x] \neq A$ schreiben wir auch $x \varepsilon \varphi$.

φ, ψ seien II-Dinge. Wenn aus $x \varepsilon \varphi$ $x \varepsilon \psi$ folgt, so schreiben wir $\varphi \lesssim \psi$. Für $\psi \lesssim \varphi$ schreiben wir auch $\varphi \gtrsim \psi$.

Wenn $\varphi \lesssim \psi$ und $\varphi \gtrsim \psi$ ist, so schreiben wir $\varphi \sim \psi$; wenn $\varphi \lesssim \psi$ aber nicht $\varphi \gtrsim \psi$ ist, so schreiben wir $\varphi < \psi$; wenn $\varphi \gtrsim \psi$ aber nicht $\varphi \lesssim \psi$ ist, so schreiben wir $\varphi > \psi$.

Wenn H ein Bereich (oder sogar eine Menge) ist, so sagen wir für $x \varepsilon H$ auch: x ist Element von H, x gehört zu H, H enthält x.

Wenn H, J Bereiche (oder sogar Mengen) sind, so sagen wir für $H \lesssim J$ oder $J \gtrsim H$ auch: H ist ein Teilbereich (bzw. Teilmenge) von J; und für $H < J$ oder $J > H$ sagen wir auch: H ist echter Teilbereich (bzw. echte Teilmenge) von J.

Man sieht sofort, daß den Relationen $\lesssim$, $\gtrsim$, $<$, $>$, $\sim$ die folgenden elementaren Eigenschaften zukommen:

Aus $\varphi \lesssim \psi$, $\psi \lesssim \chi$ folgt $\varphi \lesssim \chi$. Aus $\varphi \gtrsim \psi$, $\psi \gtrsim \chi$ folgt $\varphi \gtrsim \chi$. Aus $\varphi < \psi$, $\psi < \chi$ folgt $\varphi < \chi$. Aus $\varphi > \psi$, $\psi > \chi$ folgt $\varphi > \chi$.

Es ist $\varphi \sim \varphi$. Aus $\varphi \sim \psi$ folgt $\psi \sim \varphi$. Aus $\varphi \sim \psi$, $\psi \sim \chi$ folgt $\varphi \sim \chi$. Aus $\varphi \sim \varphi'$, $\psi \sim \psi'$ und $\varphi \bullet \psi$ ($\bullet$ irgendeine Relation $\lesssim$, $\gtrsim$, $<$, $>$) folgt $\varphi' \bullet \psi'$, und umgekehrt.

Ferner schließt man aus I. 4. ohne weiteres, daß für Bereiche H, J $H \sim J$ mit $H = J$ gleichbedeutend ist. Schließlich bemerken wir noch die folgende höchstwichtige Konsequenz von IV. 2.:

Wenn φ, ψ II-Dinge sind und $\varphi \lesssim \psi$ ist, so folgt daraus, daß ψ ein I II-Ding ist, auch daß φ ein I II-Ding ist.

Die Gültigkeit dieser Behauptung sieht man sofort an der Form von IV. 2. Sie entspricht dem „Aussonderungsaxiom" von Zermelo und Fraenkel (vgl. Fußnote [6]).

3. Einstellen-Funktionen und Elementarmengen.

Wir gehen nun daran, die einfachsten Funktionen und Mengen auf Grund unserer Axiome herzustellen.

Satz 1a. *u, v, w seien I-Dinge. Es gibt ein und nur ein II-Ding φ, für welches $[\varphi, u] = v$ ist, und für $x \neq u$ stets $[\varphi, x] = w$ ist. Dieses φ bezeichnen wir mit $\left\{\begin{smallmatrix} u, & - \\ v, & w \end{smallmatrix}\right\}$.*

Satz 1b. *Wenn $w = A$ ist, so ist $\left\{\begin{smallmatrix} u, & - \\ v, & A \end{smallmatrix}\right\}$ ein I II-Ding, und es gibt ein (von u und v unabhängiges!) φ, so daß stets $[\varphi, \langle u, v\rangle] = \left\{\begin{smallmatrix} u, & - \\ v, & A \end{smallmatrix}\right\}$ ist.*

Beweis. (Für 1a.) Aus I. 4. folgt, daß es höchstens ein solches φ gibt, es genügt also die Existenz zu beweisen.

$x = u$, $y = v$ können wir so schreiben: $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$, oder ($f$ nach III. 1.): $[f, \langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle] \neq A$. $x \neq u$, $y = w$ können wir so schreiben: $[f, \langle x, u\rangle] = A$, $y = w$, oder: $\langle[f, \langle x, u\rangle], y\rangle = \langle A, w\rangle$, oder: $[f, \langle\langle[f, \langle x, u\rangle], y\rangle, \langle A, w\rangle\rangle] \neq A$.

Daß entweder $x = u$, $y = v$ oder $x \neq u$, $y = w$ der Fall ist, lautet folglich so:

$$\langle[f, \langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle], [f, \langle\langle[f, \langle x, u\rangle], y\rangle, \langle A, w\rangle\rangle]\rangle \neq \langle A, A\rangle$$

oder wenn wir auf die Normalform bringen:

$$[g, \langle\langle\langle u, v\rangle, w\rangle, x\rangle, y\rangle] \neq \langle A, A\rangle$$

oder auch

$$[f, \langle[g, \langle\langle\langle u, v\rangle, w\rangle, x\rangle, y\rangle], \langle A, A\rangle\rangle] = A,$$

$$[f, \langle[f, \langle[g, \langle\langle\langle u, v\rangle, w\rangle, x\rangle, y\rangle], \langle A, A\rangle\rangle], A\rangle] \neq A,$$

und wieder auf die Normalform gebracht:

$$[h, \langle\langle\langle u, v\rangle, w\rangle, x\rangle, y\rangle] \neq A.$$

Zu jedem u, v, w, x ist dies für ein einziges y der Fall, nämlich bei $x = u$ für $y = v$, und bei $x \neq u$ für $y = w$. Wenn wir also j nach III. 3. wählen, so wird:

$$[j, \langle\langle u, v\rangle, w\rangle, x\rangle] = \begin{cases} v, & \text{für } x = u, \\ w, & \text{für } x \neq u. \end{cases}$$

Es genügt nun auf die Normalform $[\varphi, x]$ zu bringen (φ hängt von u, v, w ab!), um das gewünschte II-Ding φ zu haben.

(Für 1 b.) Wenn $w = A$ ist, so kann nur für $x = u$ $\left[\left\{\begin{smallmatrix} u, & - \\ v, & A \end{smallmatrix}\right\}, x\right] \neq A$ sein. $\left\{\begin{smallmatrix} u, & - \\ v, & A \end{smallmatrix}\right\}$ ist aber nach IV. 2. sicher ein I II-Ding, wenn es kein II-Ding f gibt, für welches zu jedem x ein y mit $\left[\left\{\begin{smallmatrix} u, & - \\ v, & A \end{smallmatrix}\right\}, y\right] \neq A$, $[f, y] = x$ existiert; d. h. wenn bei keinem f für jedes I-Ding x $[f, u] = x$ ist. Das ist aber sicher der Fall, wenn es zwei verschiedene I-Dinge gibt, und solche gibt es: z. B. A und B.

Es bleibt noch übrig, $\left\{\begin{smallmatrix} u, & - \\ v, & A \end{smallmatrix}\right\}$ auf die Form $[\varphi, \langle u, v\rangle]$ zu bringen. Wir sahen, daß

$$\left[\left\{\begin{smallmatrix} u, & - \\ v, & A \end{smallmatrix}\right\}, x\right] = [j, \langle\langle\langle u, v\rangle, A\rangle, x\rangle] = [k\langle\langle u, v\rangle, x\rangle]$$

ist, und da $\left\{\begin{smallmatrix} u, & - \\ v, & A \end{smallmatrix}\right\}$ ein I II-Ding ist, so brauchen wir φ nur nach dem Hilfssatz 3 zu wählen, damit $[\varphi, \langle u, v\rangle] = \left\{\begin{smallmatrix} u, & - \\ v, & A \end{smallmatrix}\right\}$ sei.

Satz 2 a. *Es gibt eine und nur eine Menge, die gar keine Elemente hat. Wir bezeichnen sie mit* 0.

Satz 2 b. *u sei ein I-Ding. Es gibt eine und nur eine Menge, die das einzige Element u hat. Wir bezeichnen sie mit $\{u\}$. Es gibt ein (von u unabhängiges) II-Ding φ, so daß stets $\{u\} = [\varphi, u]$.*

Beweis. (Für 2 a.) $\left\{\begin{smallmatrix} A, & - \\ A, & A \end{smallmatrix}\right\}$ ist I II-Ding und hat stets den Wert A, also ist es eine Menge ohne Elemente. Daß es die einzige ist, folgt aus I. 4.

(Für 2 b.) $\left\{\begin{smallmatrix} u, & - \\ B, & A \end{smallmatrix}\right\}$ ist I II-Ding und hat für u den Wert B, sonst den Wert A, also ist es eine Menge mit dem einzigen Elemente u. Daß es die einzige ist, folgt aus I. 4. Und schließlich ist nach Satz 1 b

$$\{u\} = [f, \langle u, B\rangle] = [\varphi, u].$$

4. Zusammensetzung von Funktionen.

Im nun folgenden Satz 3 werden wir ein Konstruktionsprinzip angeben, welches für die Herstellung von Funktionen und Bereichen grundlegend ist.

Satz 3a. *φ, ψ, χ seien II-Dinge. Es gibt ein und nur ein II-Ding ζ, für welches für alle x*

$$[\zeta, x] = \begin{cases} [\varphi, x], & \text{für } [\chi, x] \neq A, \\ [\psi, x], & \text{für } [\chi, x] = A \end{cases}$$

ist. Wir bezeichnen dieses ζ mit $\left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$.

Satz 3b. *μ sei eine der Zahlen $1, 2, 3$; $f_1, \ldots, f_\mu$ irgendwelche μ unter dem φ, ψ, χ; und $g_1, \ldots, g_{3-\mu}$ die übrigen. Es gibt ein bloß von $g_1, \ldots, g_{3-\mu}$ abhängiges (und von den $f_1, \ldots, f_\mu$ unabhängiges) II-Ding ζ, so daß für alle $f_1, \ldots, f_\mu$, für die sowohl diese, als auch $\left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$ I II-Dinge sind,*

$$[\xi; v] = \left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$$

ist, wobei $v = f_1$ bzw. $= \langle f_1, f_2 \rangle$ bzw. $= \langle\langle f_1, f_2 \rangle, f_3 \rangle$ ist (je nachdem $\mu = 1, 2, 3$ ist).

Beweis. (Für 3a.) Daß es höchstens ein solches ζ gibt, folgt aus I. 4., wir brauchen also bloß die Existenz zu beweisen.

$[\varphi, x] = y$, $[\chi, x] \neq A$ können wir auch so schreiben (f nach III. 1.):

$$[f, \langle A, [\chi, x] \rangle] = A, \quad [\varphi, x] = y,$$

d. h.

$$\langle [f, \langle A, [\chi, x] \rangle], [\varphi, x] \rangle = \langle A, y \rangle,$$

$$[f \langle \langle [f, \langle A, [\chi, x] \rangle], [\varphi, x] \rangle, \langle A, y \rangle \rangle] \neq A,$$

oder auf die Normalform gebracht: $[g, \langle x, y \rangle] \neq A$ (g hängt von φ und χ ab).

Ebenso verfahren wir mit $[\psi, x] = y$, $[\chi, x] = A$:

$$\langle [\psi, x], [\chi, x] \rangle = \langle y, A \rangle,$$

$$[f, \langle \langle [\psi, x], [\chi, x] \rangle, \langle y, A \rangle \rangle] \neq A,$$

$$[h, \langle x, y \rangle] \neq A$$

(h hängt von ψ und χ ab). Daß entweder $[\chi, x] \neq A$, $[\varphi, x] = y$ oder $[\chi, x] = A$, $[\psi, x] = y$ ist, bedeutet also:

$$\langle [g, \langle x, y \rangle], [h, \langle x, y \rangle] \rangle \neq \langle A, A \rangle,$$

$$[f, \langle \langle [g, \langle x, y \rangle], [h, \langle x, y \rangle] \rangle, \langle A, A \rangle \rangle] = A,$$

$$[f, \langle [f, \langle \langle [g, \langle x, y \rangle], [h, \langle x, y \rangle] \rangle, \langle A, A \rangle \rangle], A \rangle] \neq A,$$

d. h. $[j, \langle x, y \rangle] \neq A$ (j hängt von φ, ψ und χ ab).

Für jedes x erfüllt genau ein y diese Bedingung: Für $[\chi, x] \neq A$ ist

es $y = [\varphi, x]$, für $[\chi, x] = A$ ist es $y = [\psi, x]$. Wir können also III. 3. anwenden, und es wird

$$[\zeta, x] = \begin{cases} [\varphi, x], & \text{für } [\chi, x] \neq A, \\ [\psi, x], & \text{für } [\chi, x] = A. \end{cases}$$

Damit haben wir das gewünschte II-Ding hergestellt.

(Für 3b.) Wir beweisen die Behauptung für den (willkürlich herausgegriffenen) Spezialfall $\mu = 2$, $f_1 = \varphi$, $f_2 = \chi$, $g_1 = \psi$; in jedem der übrigen sechs Spezialfälle ist der Beweis ganz analog zu führen.

Wir schlagen genau denselben Weg ein wie bei der Herleitung von $[j, \langle x, y\rangle] \neq A$ im obigen Beweise von 3a; nur bringen wir immer an Stelle der Normalform nach x und y auf die Normalform nach φ, χ, x und y. So erhalten wir statt

$$[g, \langle x, y\rangle] \neq A, \quad [h, \langle x, y\rangle] \neq A, \quad [j, \langle x, y\rangle] \neq A$$

sukzessiv

$$[g^*, \langle\langle\langle \varphi, \chi\rangle, x\rangle, y\rangle] \neq A, \ [h^*, \langle\langle\langle \varphi, \chi\rangle, x\rangle, y\rangle] \neq A, \ [j^*, \langle\langle\langle \varphi, \chi\rangle, x\rangle, y\rangle] \neq A$$

(g^*, h^*, j^* hängen nur von ψ ab), und kehren dann wieder mit Hilfe von III. 3. um, wobei statt $[\zeta, x]$ analog $[k^*, \langle\langle \varphi, \chi\rangle, x\rangle]$ entsteht (k^* hängt auch nur von ψ ab).

Wir haben nun

$$[k^*, \langle\langle \varphi, \chi\rangle, x\rangle] = \begin{cases} [\varphi, x], & \text{für } [\chi, x] \neq A, \\ [\psi, x], & \text{für } [\chi, x] = A, \end{cases}$$

d. h.

$$[k^*, \langle\langle \varphi, \chi\rangle, x\rangle] = \left[\left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right), x\right].$$

Wenn also $\left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$ auch ein I II-Ding ist, so können wir den Hilfssatz 3 anwenden und erhalten dann

$$[\xi, \langle \varphi, \chi\rangle] = \left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$$

(ξ nur von ψ abhängig), wie behauptet wurde.

5. Summe, Durchschnitt und Differenz von Bereichen.

Der Satz 3 liefert uns das Mittel, an die Konstruktion der im Tite dieses Paragraphen genannten mengentheoretischen Operationen heranzutreten.

Satz 4a. *H, J seien zwei Bereiche. Es gibt einen und nur einen Bereich K, für den $x \varepsilon K$ damit gleichbedeutend ist, daß $x \varepsilon H$ oder $x \varepsilon J$ ist. Dieses K bezeichnen wir mit $H + J$ und nennen es die Summe von H und J.*

Satz 4b. *Wenn H, J beide Mengen sind, so ist auch $H+J$ eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H, J*

$$[\varphi, \langle H, J\rangle] = H + J$$

ist.

Beweis. (Für 4a.) Daß es höchstens einen solchen Bereich gibt, folgt aus I. 4.; es genügt also die Existenz zu beweisen. Es ist aber klar, daß das II-Ding $\left(\frac{H \mid J}{H}\right)$ alle gewünschten Eigenschaften besitzt.

(Für 4b.) Wir müssen zeigen: Wenn H, J Mengen, d. h. I II-Dinge sind, so ist auch $H+J$ Menge, d. h. I II-Ding. Die zweite Behauptung folgt dann hierauf sofort mit Hilfe von Satz 3b: Es ist dann

$$H + J = \left(\frac{H \mid J}{H}\right) = [f, \langle\langle H, J\rangle, H\rangle] = [\varphi, \langle H, J\rangle].$$

Also seien H, J I II-Dinge, es gilt (nach IV. 2.) zu zeigen, daß für kein II-Ding g zu jedem x ein y mit $[H+J, y] \neq A$ $[g, y] = x$ existieren kann. $[H+J, y] \neq A$ bedeutet $y \varepsilon H$ oder $y \varepsilon J$, es gilt also zu zeigen: Es gibt ein (I-Ding) x, welches von allen $[g, y]$ mit $y \varepsilon H$ oder $y \varepsilon J$ verschieden ist.

Wir wählen h, j nach II. 3. bzw. II. 4. und setzen:

$$[h, [g, x]] = [k, x], \quad [j, [g, x]] = [l, x].$$

Da H, J beide I II-Dinge sind, so gibt es (nach IV. 2.) ein I-Ding r, so daß für kein $y \varepsilon H$ $[k, y] = r$ ist; und ein I-Ding s, so daß für kein $y \varepsilon J$ $[l, y] = s$ ist.

Hieraus folgt aber: Es kann für kein $y \varepsilon H$ $[g, y] = \langle r, s\rangle$ sein, denn dann wäre

$$[k, y] = [h, [g, y]] = [h, \langle r, s\rangle] = r$$

entgegen der Annahme; ebensowenig dann für ein $y \varepsilon J$ $[g, y] = \langle r, s\rangle$ sein, da daß

$$[l, y] = [j, [g, x]] = [j, \langle r, s\rangle] = s$$

zur Folge hätte. Also haben wir in $x = \langle r, s\rangle$ das gewünschte x gefunden.

Satz 5a. *H, J seien zwei Bereiche. Es gibt einen und nur einen Bereich K, für den $x \varepsilon K$ damit gleichbedeutend ist, daß zugleich $x \varepsilon H$ und $x \varepsilon J$ ist. Dieses K bezeichnen wir mit $H \cdot J$ und nennen es den Durchschnitt von H und J.*

Satz 5b. *Wenn H oder J eine Menge ist, so ist $H \cdot J$ auch eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ bzw. ψ bzw. χ, welches von H bzw. von J bzw. von H und J unabhängig ist, so daß immer wenn H bzw. J bzw. H und J Menge ist,*

$$H \cdot J = [\varphi, H] \text{ bzw. } = [\psi, J] \text{ bzw. } = [\chi, \langle H, J\rangle]$$

ist.

Beweis. (Für 5a.) Die Eindeutigkeit folgt wieder aus I. 4., die Existenz des geforderten Bereiches ist klar, denn das II-Ding $\left(\frac{J|H}{H}\right)$ hat die gewünschten Eigenschaften.

(Für 5b.) Wieder genügt es den Mengencharakter von $H \cdot J$ zu beweisen, alles übrige folgt durch Anwendung des Satzes 3b.

Diesen sieht man so ein: Es ist offenbar $H \cdot J \lesssim H$ und $H \cdot J \lesssim J$, also ist $H \cdot J$ immer Menge, d. h. I II-Ding, wenn H oder J es ist.

Satz 6a. *H, J seien zwei Bereiche. Es gibt einen und nur einen Bereich K, für den $x \varepsilon K$ damit gleichbedeutend ist, daß $x \varepsilon H$ ist, aber nicht $x \varepsilon J$ ist. Dieses K bezeichnen wir mit $H - J$, und nennen es die Differenz von H und J.*

Satz 6b. *Wenn H eine Menge ist, so ist auch $H - J$ eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ bzw. ψ, welches von H bzw. von H und J unabhängig ist, so daß wenn H bzw. H und J Menge ist,*

$$H - J = [\varphi, H] \text{ bzw. } = [\psi, \langle H, J \rangle]$$

ist.

Beweis. (Für 6a.) Die Eindeutigkeit folgt auch hier aus I. 4., die Existenz des geforderten Bereiches ist klar, denn das II-Ding $\left(\frac{0|H}{J}\right)$ hat die gewünschten Eigenschaften.

(Für 6b.) Auch hier genügt es den Mengencharakter von $H - J$ zu beweisen, da daraus alles übrige durch Anwendung des Satzes 3b folgt.

Diesen sieht man so ein: Es ist offenbar $H - J \lesssim H$, also ist $H - J$ Menge, d. h. I II-Ding, wenn H es ist. — Wir führen nun noch eine Konstruktion durch, die wir im folgenden ebenfalls ziemlich häufig gebrauchen werden.

Satz 7a. *φ sei ein II-Ding. Es gibt einen und nur einen Bereich H, für den $x \varepsilon H$ mit $x \varepsilon \varphi$ gleichbedeutend ist, d. h. $H \sim \varphi$ ist. Dieses H bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}(\varphi)$ und nennen es die Basis von H.*

Satz 7b. *Wenn φ ein I II-Ding ist, so ist $\mathfrak{B}(\varphi)$ eine Menge. Es gibt ein II-Ding ψ, welches von φ unabhängig ist, so daß wenn φ ein I II-Ding ist,*

$$[\psi, \varphi] = \mathfrak{B}(\varphi)$$

ist.

Beweis. (Für 7a.) Die Eindeutigkeit folgt wieder aus I. 4., die Existenz sehen wir so ein: Wir wählen f nach II. 2., mit $u = B$; dann hat $\left(\frac{f|0}{\varphi}\right)$ offenbar alle gewünschten Eigenschaften.

(Für 7b.) Wieder genügt es mit Rücksicht auf Satz 3b den Mengencharakter zu beweisen; dieser aber ist evident: Wegen $\mathfrak{B}(\varphi) \sim \varphi$ ist $\mathfrak{B}(\varphi)$ jedenfalls Menge, d. h. I II-Ding, wenn φ es ist.

6. Rechenregeln.

Auf Grund der Sätze 2 und 4 können leicht alle angeführten Elementarmengen von Zermelo-Fraenkel, d. h. die Mengen mit ein oder zwei Elementen, gebildet werden. Wir definieren:

$$\{u, v\} = \{u\} + \{v\}.$$

$\{u, v\}$ ist nach 2b und 4b eine Menge, und seine Elemente sind u und v. Aus 2b und 4b folgt weiter:

$$\{u, v\} = \{u\} + \{v\} = [f, \langle\{u\}, \{v\}\rangle] = [f, \langle[g, u], [g, v]\rangle] = [h, \langle u, v\rangle].$$

Da $\{u, u\}$ und $\{u\}$ dieselben Elemente haben, und $\{u, v\}$ und $\{v, u\}$ gleichfalls, so ist

$$\{u, u\} = \{u\}, \qquad \{u, v\} = \{v, u\}.$$

Wir bilden noch einen Bereich, den wir im Verlaufe der Untersuchungen brauchen werden, d. i. „der Bereich aller I-Dinge", d. h. einen Bereich, der alle I-Dinge enthält. Nach I. 4. gibt es höchstens einen solchen Bereich, und daß es einen solchen gibt, sehen wir so ein: Wir wählen f nach II. 2., wobei $u = B$ ist, dann hat f die gewünschten Eigenschaften. Diesen Bereich nennen wir Ω. Ω ist übrigens keine Menge, d. h. kein III-Ding. Dies folgt sofort aus IV. 2., denn wenn wir f nach II. 2. wählen, so ist für jedes I-Ding x $[f, x] = x$, $[\Omega, x] \neq A$.[17])

Wir geben nun der Vollständigkeit halber die Rechenregeln für 0, Ω, $+$, $\cdot$, $-$ und $\mathfrak{B}$ an, ohne die trivialen Beweise.

$$0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0 - 0 = 0, \quad \Omega + \Omega = \Omega \cdot \Omega = \Omega, \quad \Omega - \Omega = 0,$$
$$\Omega + 0 = \Omega - 0 = \Omega, \quad \Omega \cdot 0 = 0 - \Omega = 0.$$

$$H + 0 = H - 0 = H, \quad H \cdot 0 = 0, \quad H + \Omega = \Omega,$$
$$H \cdot \Omega = H, \quad H - \Omega = 0.$$

$$H + J = J + H, \quad (H + J) + K = H + (J + K),$$
$$H \cdot J = J \cdot H, \quad (H \cdot J) \cdot K = H \cdot (J \cdot K).$$

$$H + H = H \cdot H = H, \quad H - H = 0.$$

$$(H + J) \cdot K = H \cdot K + J \cdot K, \quad (H - J) \cdot K = H \cdot K - J \cdot K.$$

$$H - (H - J) = H \cdot J, \quad (H - J) + J = H + J,$$
$$(H + J) - J = H - J = H - H \cdot J.$$

---

[17]) Daß Ω keine Menge, d. h. kein III-Ding sein kann, läßt sich auch ohne das Axiom IV. 2. einsehen (oder wenigstens ohne dessen so weitgehende Inanspruchnahme), das ist im wesentlichen der Sinn der Russelschen Antinomie. Vgl. Fußnote [5]). An Stelle von Axiom IV. 2. ist bloß die Bemerkung notwendig, daß mit f auch jedes $g \lesssim f$ ein III-Ding ist (das „Aussonderungsaxiom").

$H \lesssim H+J$, $J \lesssim H+J$. Aus $H \lesssim K$, $J \lesssim K$ folgt $H+J \lesssim K$.

$H \gtrsim H \cdot J$, $J \gtrsim H \cdot J$. Aus $H \gtrsim K$, $J \gtrsim K$ folgt $H \cdot J \gtrsim K$.

Aus $K \lesssim H$, $K \cdot J = 0$ folgt $K \lesssim H - J$.

$f \sim g$ ist mit $\mathcal{B}(f) = \mathcal{B}(g)$ gleichbedeutend.

$f \dot{+} g$ ist mit $\mathcal{B}(f) \dot{+} \mathcal{B}(g)$ gleichbedeutend ($\dot{+}$ ist eine der Relationen $\lesssim$, $\gtrsim$, $<$, $>$).

Schließlich beweisen wir gleich hier einen Satz, den wir später benötigen werden. Er lautet so:

Aus $\{\{u, v\}, \{u\}\} = \{\{u', v'\}, \{u'\}\}$ folgt $u = u'$ und $v = v'$.

Erstens zeigen wir, daß $u = u'$ ist. $\{u\}$ gehört zu $\{\{u, v\}, \{u\}\}$, also auch zu $\{\{u', v'\}, \{u'\}\}$, folglich ist $\{u\} = \{u', v'\}$ oder $= \{u'\}$. Da u' Element beider ist, so ist es jedenfalls Element von $\{u\}$, folglich muß $u' = u$ sein, wie behauptet wurde.

Nehmen wir zweitens an, daß $v \neq v'$ ist. $\{u, v\}$ gehört zu $\{\{u, v\}, \{u\}\}$, also auch zu $\{\{u', v'\}, \{u'\}\}$, also ist $\{u, v\} = \{u', v'\}$ oder $= \{u'\}$. Da v Element von $\{u, v\}$ ist, ist es auch Element von $\{u', v'\}$ oder von $\{u'\}$; folglich ist $v = u'$, oder $v = v'$, oder $v = u'$. Wegen $v \neq v'$ kommt nur $v = u'$ in Frage. Ebenso können wir $v' = u$ beweisen, wegen $u = u'$ muß also doch $v = v'$ sein, entgegen der Annahme. Also ist auch $v = v'$.

III. Die allgemeinen Operationen der Mengenlehre.

1. Vereinigungsbereich und Durchschnitt eines Bereichs von Mengen.

Satz 8a. *H sei ein Bereich, der nur Mengen als Elemente hat. Es gibt einen und nur einen Bereich J, für den $x \varepsilon J$ damit gleichbedeutend ist, daß eine Menge y mit $x \varepsilon y$, $y \varepsilon J$ existiert. Dieses J bezeichnen wir mit $S(H)$ und nennen es den Vereinigungsbereich von H.*

Satz 8b. *Wenn H eine Menge ist, so ist auch $S(H)$ eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H*

$$[\varphi, H] = S(H)$$

ist.

Beweis. (Für 8a.) Wieder folgt die Eindeutigkeit aus I. 4., die Existenz sehen wir wie folgt ein.

$[H, y] \neq A$ bedeutet $y \varepsilon H$, dann ist y jedenfalls eine Menge und $[y, x] \neq A$ bedeutet $x \varepsilon y$. Beides zugleich läßt sich so formulieren (f nach III. 1.):

$$[f, \langle A, [H, y]\rangle] = A, \quad [f, \langle A, [y, x]\rangle] = A.$$

Also

$$\langle [f, \langle A, [H, y]\rangle], [f, \langle A, [y, x]\rangle]\rangle = \langle A, A\rangle,$$

$$[f\langle\langle [f, \langle A, [H, y]\rangle], [f, \langle A, [y, x]\rangle]\rangle, \langle A, A\rangle\rangle] \neq A,$$

und auf die Normalform gebracht:

$$[g, \langle x, y\rangle] \neq A$$

(g hängt nur von H ab). Daß ein solches y existiert, bedeutet (h nach III. 2.):

$$[h, x] = A$$

oder

$$[j, x] \neq A,$$

und wenn wir $J = \mathfrak{B}(j)$ setzen, so wird:

$$[J, x] = \begin{cases} B, & \text{wenn ein solches } y \text{ existiert,} \\ A, & \text{wenn kein solches } y \text{ existiert.} \end{cases}$$

Dies II-Ding J hat also alle gewünschten Eigenschaften.

(Für 8b.) Wenn H eine Menge, d. h. I II-Ding ist, so sehen wir, daß $\mathfrak{S}(H)$ auch Menge, d. h. I II-Ding ist, so ein: Nach V. 2. existiert ein I II-Ding f, für welches $\mathfrak{S}(H) \lesssim f$ ist, folglich ist auch $\mathfrak{S}(H)$ ein I II-Ding.

Wenn H ein I II-Ding ist, so können wir die bei dem Beweise von Satz 8a angestellte Rechnung folgendermaßen abändern: Die erste Reduktion auf die Normalform nach x, y ersetzen wir durch eine nach H, x, y, dann erhalten wir statt $[g, \langle x, y\rangle]$ $[g^*, \langle\langle H, x\rangle, y\rangle]$, wobei g^* auch von H unabhängig ist. Ebenso erhalten wir statt $[h, x]$ $[h^*\langle H, x\rangle]$, und statt $[j, x]$ $[j^*, \langle H, x\rangle]$ (h^*, j^* von H unabhängig). Sodann setzen wir $k^* = \mathfrak{B}(j^*)$, und dann wird offenbar:

$$[k^*, \langle H, x\rangle] = [\mathfrak{S}(H), x].$$

Da $\mathfrak{S}(H)$ ein I II-Ding ist, können wir den Hilfssatz 3 anwenden, und es wird:

$$\mathfrak{S}(H) = [\varphi, H].$$

Satz 9a. *H sei ein Bereich, der nur Mengen als Elemente hat. Es gibt einen und nur einen Bereich J, für den $x \varepsilon J$ damit gleichbedeutend ist, daß für jede Menge y mit $y \varepsilon H$ auch $x \varepsilon y$ ist. Dieses J bezeichnen wir mit $\mathfrak{D}(H)$ und nennen es den Durchschnitt von H.*

Satz 9b. *Wenn $H \neq 0$ ist (und nur dann), so ist $\mathfrak{D}(H)$ eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen $H \neq 0$*

$$\mathfrak{D}(H) = [\varphi, H]$$

ist.

Beweis. (Für 9a.) Die Eindeutigkeit folgt auch hier aus I. 4., die Existenz sehen wir wie folgt ein.

$[H, y] \neq A$ bedeutet $y \varepsilon H$, dann ist y jedenfalls eine Menge, also auch I II-Ding; und $[y, x] = A$ bedeutet, daß nicht $x \varepsilon y$ ist. Beides zusammen können wir auf die gewohnte Art auf die Form

$$[f, \langle x, y \rangle] \neq A$$

(f hängt nur von H ab) bringen. Daß dies nie stattfindet, drückt sich nach III. 2. so aus:

$$[g, x] \neq A.$$

Wenn wir also $J = \mathfrak{B}(g)$ setzen, so ist

$$[J, x] = \begin{cases} B, & \text{wenn es kein solches } y \text{ gibt,} \\ A, & \text{wenn es ein solches } y \text{ gibt.} \end{cases}$$

Dieses II-Ding J hat also die gewünschten Eigenschaften.

(Für 9b.) Für jedes Element y von H ist offenbar $\mathfrak{D}(H) \lesssim y$; wenn also $H \neq 0$ ist, d. h. Elemente hat, so folgt daraus, daß y ein I II-Ding ist (denn ein Element y von H ist offenbar ein I II-Ding), daß auch $\mathfrak{D}(H)$ I II-Ding, d. h. Menge ist. Ist hingegen $H = 0$, so ist $\mathfrak{D}(H) = \Omega$, denn da H keine Elemente y hat, gehört jedes x zu $\mathfrak{D}(H)$, und Ω ist keine Menge.

Wenn H eine Menge und $H \neq 0$ ist, d. h. wenn H und $\mathfrak{D}(H)$ beide I II-Dinge sind, so schließen wir ebenso wie beim Satze 8: Wir verfahren ebenso wie beim Beweise 9a, nur reduzieren wir auf die Normalform nach H und x und erhalten so statt $[f, \langle x, y \rangle]$ und $[g, x]$ $[f^*, \langle\langle H, x \rangle, y \rangle]$ und $[g^*, \langle H, x \rangle]$ (f^*, g^* sind auch von H unabhängig). Sodann setzen wir $h^* = \mathfrak{B}(g^*)$, so daß

$$[h^*, \langle H, x \rangle] = [\mathfrak{D}(H), x]$$

ist, woraus nach Hilfssatz 3

$$\mathfrak{D}(H) = [\varphi, x]$$

folgt.

Es ist leicht, die Operationen $H + J$ und $H \cdot J$ für Mengen H, J (für Bereiche nicht!) auf $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{D}$ zurückzuführen. Es gilt nämlich offenbar

$$H + J = \mathfrak{S}(\{H, J\}), \qquad H \cdot J = \mathfrak{D}(\{H, J\}).$$

Ferner gilt offenbar:

$$\mathfrak{D}(0) = \Omega, \qquad \mathfrak{S}(0) = 0.$$

2. Der Bildbereich.

Satz 10a. *H sei ein Bereich, φ ein II-Ding. Es gibt einen und nur einen Bereich J, für den $x \varepsilon J$ damit gleichbedeutend ist, daß es ein y mit $y \varepsilon H$, $[\varphi, y] = x$ gibt. Dieses bezeichnen wir mit $|[\varphi, H]|$ und nennen es den durch φ vermittelten Bildbereich von H.*

Satz 10b. *Wenn H eine Menge ist, so ist auch $|[\varphi, H]|$ eine Menge.* (Diese Behauptung entspricht dem „Ersetzungsaxiom" von Fraenkel. Vgl. Fußnote [7].) *Es gibt ein II-Ding ψ bzw. χ, welches von H bzw. von H und φ unabhängig ist, so daß, wenn H Menge ist, bzw. H Menge und φ I II-Ding ist,*

$$|[\varphi, H]| = [\psi, H] \quad \text{bzw.} \quad [\chi, \langle H, \varphi \rangle]$$

ist.

Beweis. (Für 10a.) Die Eindeutigkeit folgt aus I. 4., es bleibt übrig die Existenz zu beweisen. Wir müssen ausdrücken, daß es ein y mit $y \varepsilon H$, $[\varphi, y] = x$ gibt. Diese Eigenschaft von y formuliert sich so (f nach III. 1.):

$$[H, y] \neq A, \quad [\varphi, y] = x,$$
$$[f, \langle [H, y], A \rangle] = A, \quad [\varphi, y] = x,$$
$$\langle [f, \langle [H, y], A \rangle], [\varphi, y] \rangle = \langle A, x \rangle,$$
$$[f, \langle \langle [f, \langle [H, y], A \rangle], [\varphi, y] \rangle, \langle A, x \rangle \rangle] \neq A.$$

und auf die Normalform gebracht:

$$[g, \langle x, y \rangle] \neq A$$

(g hängt von H und φ ab). Daß es ein solches y gibt, bedeutet nach III. 2.

$$[h, x] = A,$$
$$[j, x] \neq A.$$

Wenn wir also $J = B(j)$ setzen, so wird

$$[J, x] = \begin{cases} B, & \text{wenn es ein solches } y \text{ gibt,} \\ A, & \text{wenn es kein solches } y \text{ gibt.} \end{cases}$$

Das II-Ding J besitzt also die gewünschten Eigenschaften.

(Für 10b.) Nehmen wir an, H wäre Menge, d. h. I II-Ding, und $|[\varphi, H]|$ nicht. Nach IV. 2. müßte es dann ein II-Ding f geben, so daß für jedes x ein y mit $[|[\varphi, H]|, y] \neq A$, $[f, y] = x$ existierte. Also wäre $y = [\varphi, z]$, $z \varepsilon H$, d. h. $x = [f, [\varphi, x]]$. Wir wählen nun g nach II. 7., so daß

$$[f, [\varphi, z]] = [g, z]$$

ist, dann gibt es zu jedem x ein z mit $z \varepsilon H$, $[g, z] = x$. Also kann auch H kein I II-Ding sein.

Wenn H eine Menge, d. h. I II-Ding ist, und folglich $|[\varphi, H]|$ auch, so können wir $|[\varphi, H]|$ mit derselben Methode auf die Form $[\psi, H]$ bzw. $[\chi, \langle H, \varphi\rangle]$ (je nachdem nur H oder H und φ als I II-Dinge vorausgesetzt sind) bringen, wie bei den Sätzen 3 b, 8 b, 9 b. Beim Reduzieren zur Normalform gewinnen wir statt

$$[g, \langle x, y\rangle], [h, x], [j, x], J = \mathfrak{B}(j)$$

wieder

$$[g^*, \langle\langle H, x\rangle, y\rangle], [h^*, \langle H, x\rangle], [j^*, \langle H, x\rangle], k^* = \mathfrak{B}(j^*)$$

(g^*, h^*, j^*, k^* hängen nur von φ ab) bzw.

$$[g^{**}, \langle\langle\langle H, \varphi\rangle, x\rangle, y\rangle], [h^{**}, \langle\langle H, \varphi\rangle, x\rangle], [j^{**}, \langle\langle H, \varphi\rangle, x\rangle], k^{**} = \mathfrak{B}(j^{**})$$

(g^{**}, h^{**}, j^{**}, k^{**} sind fest). Dann wird

$$[|[\varphi, H]|, x] = [k^*, \langle H, x\rangle] \quad \text{bzw.} \quad = [k^{**}, \langle\langle H, \varphi\rangle, x\rangle]$$

und nach Hilfssatz 3

$$|[\varphi, H]| = [\psi, H] \quad \text{bzw.} \quad = [\chi, \langle H, \varphi\rangle].$$

3. Der Potenzbereich (Bereich aller Teilmengen).

Satz 11 a. *H sei ein Bereich. Es gibt einen und nur einen Bereich J, für den dann und nur dann $x \varepsilon J$ ist, wenn x eine Menge und $x \lesssim H$ ist. Dieses J bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(H)$ und nennen esden Potenzbereich oder Bereich aller Teilmengen von H.*

Satz 11 b. *Wenn H eine Menge ist, so ist auch $\mathfrak{P}(H)$ eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H $\mathfrak{P}(H) = [\varphi, H]$ ist.*

Beweis. (Für 11 a.) Die Eindeutigkeit folgt aus I. 4., es bleibt übrig die Existenz zu beweisen.

Daß x eine Menge und $x \lesssim H$ ist, können wir so ausdrücken: $[f, x] \neq A$ (f nach IV. 1.), für kein y $[x, y] \neq A$, $[x, y] \neq B$, für kein y $[x, y] \neq A$, $[H, y] = A$. Diese Bedingung können wir auf die gewohnte Art auf die Normalform

$$[g, x] \neq A$$

(g hängt nur von H ab) bringen. Wenn wir noch $J = \mathfrak{B}(g)$ setzen, so haben wir das gewünschte II-Ding hergestellt, da

$$[J, x] = \begin{cases} B, & \text{wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind,} \\ A, & \text{wenn die obigen Bedingungen nicht erfüllt sind,} \end{cases}$$

ist.

(Für 11 b.) Wir müssen zuerst beweisen: wenn H Menge, d. h. I II-Ding ist, so ist es auch $\mathfrak{P}(H)$. Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich dann auf die gewohnte Art: statt $[g, x]$ wird $[g^*, \langle H, x\rangle]$ (g^* unabhängig von H) gebildet, $j^* = \mathfrak{B}(g^*)$ gesetzt, woraus wegen

$$[j^*, \langle H, x\rangle] = [\mathfrak{P}(H), x]$$

mit Hilfe von Hilfssatz 3 $\mathfrak{P}(H) = [\varphi, x]$ folgt.

H sei also ein I II-Ding. Wir bilden das I II-Ding f nach V. 3. Wenn $x \varepsilon \mathfrak{P}(H)$ ist, so ist $x \lesssim H$, also gibt es ein y mit $x \sim y$, $y \varepsilon f$. Da $x \sim y$ ist, und x ein Bereich ist, so ist nach Satz 7 $x = \mathfrak{B}(y)$. Wir wählen g nach Satz 7 so, daß $[g, u] = \mathfrak{B}(u)$ ist, dann ist für jedes $x \varepsilon \mathfrak{P}(H)$ $x = [g, y]$, $y \varepsilon f$. Wir bilden nun einen Bereich J, der $J \sim f$ ist; das ist offenbar $\mathfrak{B}(f)$. Da f ein I II-Ding ist, ist J eine Menge.

Wenn $x \varepsilon \mathfrak{P}(H)$ ist, so ist $x = [g, y]$, $y \varepsilon J$, d. h. $x \varepsilon |[g, J]|$; also ist $\mathfrak{P}(H) \lesssim |[g, J]|$. Da J eine Menge ist, so ist es auch $|[g, J]|$, und daraus folgt, daß auch $\mathfrak{P}(H)$ ein I II-Ding, d. h. eine Menge ist.

4. Der Paarbereich.

Satz 12 a. *H, J seien zwei Bereiche. Es gibt einen und nur einen Bereich K, so daß $x \varepsilon K$ damit gleichbedeutend ist, daß es zwei u, v mit $u \varepsilon H$, $v \varepsilon J$, $x = \langle u, v\rangle$ gibt. Dieses K bezeichnen wir mit $|\langle H, J\rangle|$, und nennen es den Paarbereich von H und J.*

Satz 12 b. *Wenn H und J beide Mengen sind, so ist auch $|\langle H, J\rangle|$ eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H, J*

$$|\langle H, J\rangle| = [\varphi, \langle H, J\rangle]$$

ist.

Beweis. (Für 12 a.) Die Eindeutigkeit folgt aus I. 4., es bleibt übrig die Existenz zu beweisen.

Zu diesem Zwecke bringen wir (analog wie bei den Sätzen 3 a, 8 a, 9 a, 10 a, 11 a) die Bedingung: „Es gibt ein u, zu welchen es ein v gibt, so daß $[H, u] \neq A$, $[J, v] \neq A$, $\langle u, v\rangle = x$ ist," auf die Normalform:

$$[f, x] \neq A$$

(f hängt von H, J ab). Dann setzen wir $K = \mathfrak{B}(f)$; K besitzt alle gewünschten Eigenschaften.

(Für 12 b.) Wir müssen zuerst beweisen: Wenn H, J Mengen sind, so ist auch $|\langle H, J\rangle|$ eine Menge. Die Darstellung

$$|\langle H, J\rangle| = [\varphi, \langle H, J\rangle]$$

können wir dann mit genau der gleichen Methode gewinnen, wie die analogen Resultate in den Sätzen 3 b, 8 b, 9 b, 10 b, 11 b.

Also seien H, J Mengen. Wir hatten im Kap. II, § 6 den Satz bewiesen: Aus $\{\{u, v\}, \{u\}\} = \{\{u', v'\}, \{v'\}\}$ folgt $u = u'$, $v = v'$; infolgedessen ist $\{\{u, v\}, \{u\}\} = \{\{u', v'\}, \{u'\}\}$ mit $\langle u, v\rangle = \langle u', v'\rangle$ gleichbedeutend. Nun ist aber

$$\{\{u, v\}, \{u\}\} = [g, \langle [g, \langle u, v\rangle], [h, u]\rangle] = [j, \langle u, v\rangle].$$

Wenn $x = \{\{u, v\}, \{u\}\}$ ist, so gibt es also ein einziges y, für welches $y = \langle u', v'\rangle$ und $x = [j, y]$ ist, nämlich $y = \langle u, v\rangle$. $y = \langle u', v'\rangle$ bedeutet $y \varepsilon |\langle \Omega, \Omega\rangle_1|$, d. h. $[|\langle \Omega, \Omega\rangle|, y] \neq A$, $[k, y] \neq A$. Diese Bedingungen: $[k, y] \neq A$, $[j, y] = x$ können wir ohne weiteres auf die Form

$$[l, \langle x, y\rangle] \neq A$$

bringen; da ein und nur ein y diese Bedingung erfüllt, nämlich $y = \langle u, v\rangle$, so brauchen wir nur m nach III. 3. zu wählen, und es wird

$$[m, x] = y,$$

d. h.

$$[m, \{\{u, v\}, \{u\}\}] = \langle u, v\rangle.$$

Wenn nun $u \varepsilon H$, $v \varepsilon J$ ist, so ist $u \varepsilon H + J$, $v \varepsilon H + J$, also $\{u, v\} \lesssim H + J$, $\{u\} \lesssim H + J$, und da es sich um Mengen handelt, $\{u, v\} \varepsilon \mathfrak{P}(H + J)$, $\{u\} \varepsilon \mathfrak{P}(H + J)$. Also ist weiter $\{\{u, v\}, \{u\}\} \lesssim \mathfrak{P}(H + J)$, $\{\{u, v\}, \{u\}\} \varepsilon \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(H + J))$, und schließlich $[m, \{\{u, v\}, \{u\}\}] \varepsilon |[m, \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(H + J))]|$, d. h. $\langle u, v\rangle \varepsilon |[m, \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(H + J))]|$. Aus dieser Überlegung folgt, daß $|\langle H, J\rangle| \lesssim |[m, \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(H + J))]|$ ist. Da nun H, J Mengen sind, so sind es auch $H + J$, $\mathfrak{P}(H + J)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(H + J))$, $|[m, \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(H + J))]|$; und folglich ist auch $|\langle H, J\rangle|$ ein I II-Ding, d. h. ein Menge.

5. Der allgemeine Potenzbereich.

Satz 13 a. *H, J seien zwei Bereiche. Es gibt einen und nur einen Bereich K, für den $x \varepsilon K$ damit gleichbedeutend ist, daß x ein I II-Ding ist, und daß für jedes u die folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$\text{wenn nicht } u \varepsilon J \text{ ist, } [x, u] = A,$$
$$\text{wenn } u \varepsilon J \text{ ist, } [x, u] \varepsilon H.$$

Dieses K bezeichnen wir mit H^J und nennen es die J-te Potenz von H.

Satz 13 b. *Wenn H und J beide Mengen sind, so ist auch H^J eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H, J*

$$H^J = [\varphi, \langle H, J\rangle]$$

ist.

Beweis. (Für 13 a.) Die Eindeutigkeit folgt aus I. 4., es bleibt übrig, die Existenz zu beweisen. Zu diesem Zwecke bringen wir hier die folgende Bedingung auf die Normalform: „x ist ein I II-Ding, es ist für kein u

$[J, u] = A$, $[x, u] \neq A$, es ist für kein u $[J, u] \neq A$, $[H, [x, u]] = A$." Die Normalform ist

$$[f, x] \neq A$$

(f hängt von H, J ab). Dann setzen wir $K = \mathfrak{B}(f)$; K besitzt alle gewünschten Eigenschaften.

(Für 13 b.) Wir müssen zuerst beweisen: wenn H, J Mengen sind, so ist auch H^J eine Menge. Die Darstellung

$$H^J = [\varphi, \langle H, J\rangle]$$

können wir dann ebenso gewinnen, wie bisher stets bei den analogen Sätzen.

Also seien H, J Mengen. Wenn $x \varepsilon H^J$, $u \varepsilon J$ ist, so bilden wir das Paar $\langle u, [x, u]\rangle$ und bringen es auf die Form $[f, u]$ (f von x abhängig!). Wir bilden den Bereich $L_x = |[f, J]|$, seine Elemente sind die $[f, u]$. Da J eine Menge ist, is es L_x auch.

L_x ist offenbar folgendermaßen zu charakterisieren: es ist das einzige ξ, welches die folgende Bedingung erfüllt: „ξ ist ein I II-Ding. Es gibt kein z, für welches einerseits $[\xi, z] \neq A$ wäre, und andererseits kein u existierte, für welches $[J, u] \neq A$, $\langle u, [x, u]\rangle = z$ ist. Es gibt kein z, für welches $[\xi, z] \neq B$ wäre, und ein u existierte, für welches $[J, u] \neq A$, $\langle u, [x, u]\rangle = z$ ist." Diese Eigenschaft kann aber auf dem gewohnten Wege auf die Form

$$[g, \langle x, \xi\rangle] \neq A$$

(g ist von x unabhängig, ξ wird als I-Ding angesehen) gebracht werden. Nach III. 3. ist dann

$$L_x = [h, x].$$

Wenn nun $x' \varepsilon H^J$ $x'' \varepsilon H^J$ ist, so folgt aus $L_{x'} = L_{x''}$ $x' = x''$. Wegen I. 4. genügt es hierzu zu zeigen, daß stets $[x', u] = [x'', u]$ ist. Wegen $x' \varepsilon H^J$, $x'' \varepsilon H^J$ ist dies für u-s, die nicht zu J gehören, klar: dann ist nämlich $[x', u] = [x'', u] = A$. Wir können also $u \varepsilon J$ annehmen. $\langle u, [x', u]\rangle$ gehört zu $L_{x'}$, also auch zu $L_{x''}$; folglich ist $\langle u, [x', u]\rangle = \langle v, [x'', v]\rangle$. Hieraus folgt aber $u = v$, $[x', u] = [x'', v]$, d. h. $[x', u] = [x'', u]$.

Wir können nun

$$x' \varepsilon H^J, \quad y = L_{x'} = [h, x']$$

auf die Form

$$[j, \langle x', y\rangle] \neq A$$

bringen. Wenn $y = L_x$, $x \varepsilon H^J$ ist, so ist dies nur für ein x' erfüllt, nämlich für $x' = x$, da ja aus $x \varepsilon H^J$. $x' \varepsilon H^J$, $L_x = L_{x'}$ $x = x'$ folgt. Wenn wir also k nach III. 3. wählen, so wird:

$$[k, y] = x, \quad [k, L_x] = x.$$

Jetzt sind wir in der Lage, den Mengencharakter von H^J zu beweisen. Denn für jedes $x \varepsilon H^J$ und $u \varepsilon J$ ist $u \varepsilon J$, $\langle x, u\rangle \varepsilon H$, also $\langle u, [x, u]\rangle \varepsilon |\langle J, H\rangle|$; folglich ist $L_x \lesssim |\langle J, H\rangle|$, also $L_x \varepsilon \mathfrak{P}(|\langle J, H\rangle|)$. Hieraus folgt weiter $[k, L_x] \varepsilon |[k, \mathfrak{P}(|\langle J, H\rangle|)]|$, d. h. $x \varepsilon |[k, \mathfrak{P}|\langle J, H\rangle|)]|$. Also ist $H^J \lesssim |[k, \mathfrak{P}(|\langle J, H\rangle|)]|$. Und da H und J Mengen sind, so sind es auch $|\langle J, H\rangle|$, $\mathfrak{P}(|\langle J, H\rangle|)$, $|[k, \mathfrak{P}(|\langle J, H\rangle|)]|$ und folglich ist H^J ebenfalls ein I II-Ding, d. h. eine Menge.

IV. Grundbegriffe der Wohlordnung.

1. Die unvollständige Ordnung. Abschnitte[18]).

Wir beginnen mit der Definition der unvollständigen Ordnung[19]):

Definition. H, J seien zwei Bereiche. Wir sagen, daß J eine unvollständige Ordnung von H ist, in Zeichen $J \mathcal{UO} H$, wenn es die folgenden Eigenschaften hat:

1. Jedes Element von J ist $= \langle u, v\rangle$, $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$.

2. $\langle u, u\rangle$ ist nie Element von J.

3. Wenn $\langle u, v\rangle$ und $\langle v, w\rangle$ Elemente von J sind, so ist auch $\langle u, w\rangle$ Element von J.

Wenn $J \mathcal{UO} H$ ist, und $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$ ist, so bedeutet

$u \dot{<} v \ldots (J)$, daß $\langle u, v\rangle \varepsilon J$ ist,

$u \dot{>} v \ldots (J)$, daß $\langle v, u\rangle \varepsilon J$ ist,

$u \parallel v \ldots (J)$, daß $u \neq v$ ist, und weder $\langle u, v\rangle \varepsilon J$ noch $\langle v, u\rangle \varepsilon J$ ist.

Wenn kein Mißverständnis möglich ist, so schreiben wir auch einfach $u \dot{<} v$, $u \dot{>} v$ und $u \parallel v$.

Wir stellen zunächst die grundlegenden Eigenschaften der Relationen $\dot{<}$, $\dot{>}$ und $\parallel$ fest:

Wenn $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$ ist, so findet stets eine und nur eine der vier folgenden Relationen statt: $u = v$, $u \dot{<} v \ldots (J)$, $u \dot{>} v \ldots (J)$, $u \parallel v \ldots (J)$. $u \dot{<} v \ldots (J)$ ist mit $v \dot{>} u \ldots (J)$ gleichbedeutend; $u \parallel v \ldots (J)$ mit

---

[18]) Wir wählen hier die transitive unvollständige Ordnung zum Ausgangspunkte, aus dem Grunde, weil dies der Charakter der „echten Teilmengen-Relation“ oder der „Subsumptionsordnung“ [vgl. G. Hessenberg, Kettentheorie und Wohlordnung, Journal f. Mathematik **135** (1910), S. 81–133] ist, die in unseren Untersuchungen eine entscheidende Rolle spielt. Sonst könnten wir auch von der bloßen Nicht-Reflexivität ausgehen, denn aus ihr, sowie aus der Wohlordnungsbedingung, folgt sowohl die Transitivität, wie die Vollständigkeit der Ordnung.

[19]) Unsere Definition der Ordnung (als Bereich) weicht von der ursprünglichen Definition derselben durch Hessenberg [vgl. seine bei [18]) zitierte Arbeit] ab, sie wurde zuerst wohl von Hausdorff verwendet. (Eine weitere Definition der vollständigen Ordnung gibt C. Kuratowski, Fund. Math. 2 (1921), S. 160–171.)

$v \parallel u \ldots (J)$. Aus $u \dot{<} v \ldots (J)$, $v \dot{<} w \ldots (J)$ folgt $u \dot{<} w \ldots (J)$, aus $u \dot{>} v \ldots (J)$, $v \dot{>} u \ldots (J)$ folgt $u \dot{>} w \ldots (J)$.

Die Beweise dieser Aussagen erübrigen sich. Ferner stellen wir die zwei folgenden Sätze über die unvollständigen Ordnungen von Mengen auf:

Satz 14. *Wenn H eine Menge ist, so ist auch jede unvollständige Ordnung von H eine Menge. Es gibt eine und nur eine Menge K, für die $J\, \mathcal{UO}\, H$ mit $J \varepsilon K$ gleichbedeutend ist.*

Dieses K bezeichnen wir mit $\mathcal{UO}(H)$. Es gibt ein II*-Ding φ, so daß für alle Mengen*

$$\mathcal{UO}(H) = [\varphi, H]$$

ist.

Beweis. Aus der Bedingung 1 der Definition folgt, daß für jede unvollständige Ordnung J von H $J \lesssim |\langle H, H\rangle|$ ist. Wenn also H eine Menge ist, so sind es auch $|\langle H, H\rangle|$ und J. Folglich ist $J \varepsilon \mathfrak{P}(|\langle H, H\rangle|)$. Wenn wir also die Existenz eines Bereiches K nachweisen können, dessen Elemente die unvollständigen Ordnungrn von H sind, so muß $K \lesssim \mathfrak{P}(|\langle H, H\rangle|)$ sein, d. h. dieser Bereich ist eine Menge.

Daß es nur einen solchen Bereich geben kann, folgt aus I. 4. Wir müssen also nur noch die Existenz beweisen; und dann die Darstellung $\mathcal{UO}(H) = [\varphi, H]$.

Es handelt sich um die folgende Eigenschaft eines ξ: „ξ ist ein I II-Ding. Es ist für jedes x $[\xi, x] = A$ oder $[\xi, x] = B$. Es ist nie $[\xi, x] \neq A$ und dabei für jedes u und v entweder $[H, u] = A$ oder $[H, v] = A$ oder $\langle u, v\rangle \neq x$. Es ist nie $[\xi, \langle u, u\rangle] \neq A$. Es ist nie $[\xi, \langle u, v\rangle] \neq A$, $[\xi, \langle v, w\rangle] \neq A$, $[\xi, \langle u, w\rangle] = A$." Wir können dies auf die gewohnte Art auf die Form

$$[f, \langle H, \xi\rangle] \neq A$$

bringen (f fest).

Diesen Ausdruck bringen wir zunächst auf die Form

$$[g, \xi] \neq A$$

(g von H abhängig) und setzen $K = \mathfrak{B}(g)$. Dann hat K die gewünschten Eigenschaften.

Wenn wir ferner $h = \mathfrak{B}(f)$ setzen, so ist offenbar

$$[h, \langle H, \xi\rangle] = [\mathcal{UO}(H), \xi],$$

und da $\mathcal{UO}(H)$ ein I II-Ding ist, so können wir den Hilfssatz 3 anwenden:

$$\mathcal{UO}(H) = [\varphi, H].$$

Satz 15. *H, J', J'' seien Bereiche, $J'\, \mathcal{UO}\, H$, $J''\, \mathcal{UO}\, H$. Wenn $u \dot{<} v \ldots (J')$ mit $u \dot{<} v \ldots (J'')$ gleichbedeutend ist, so ist $J' = J''$.*

Dies ist auch dann der Fall, wenn aus $u \dot{<} v \ldots (J')$ $u \dot{<} v \ldots (J'')$ folgt, und aus $u \parallel v \ldots (J')$ $u \parallel v \ldots (J'')$ folgt.

Beweis. Wenn $u \dot{<} v \ldots (J')$ mit $u \dot{<} v \ldots (J'')$ gleichbedeutend ist, so ist $x = \langle u, v \rangle$, $u \dot{<} v \ldots (J')$ mit $x = \langle u', v' \rangle$, $u' \dot{<} v' \ldots (J'')$ gleichbedeutend, d. h. $x \varepsilon J'$ mit $x \varepsilon J''$. Also ist $J' \sim J''$, $J' = J''$.

Wenn aus $u \dot{<} v \ldots (J')$ $u \dot{<} v \ldots (J'')$ folgt, und aus $u \| v \ldots (J')$ $u \| v \ldots (J'')$; so müssen wir noch zeigen, daß aus $u \dot{<} v \ldots (J'')$ $u \dot{<} v \ldots (J')$ folgt. Wäre es nicht so, so wäre entweder $u = v$ oder $u \dot{>} v \ldots (J')$, d. h. $v \dot{<} u \ldots (J')$ oder $u \| v \ldots (J')$; also entweder $u = v$ oder $v \dot{<} u \ldots (J'')$, d. h. $u \dot{>} v \ldots (J'')$ oder $u \| v \ldots (J'')$, entgegen $u \dot{<} v \ldots (J'')$. — Weiter definieren wir die Abschnitte in unvollständig geordneten Bereichen:

Definition. *H, J seien zwei Bereiche, $J \mathfrak{U} \mathfrak{O} H$.* Wir nennen einen Bereich H' einen Abschnitt des nach J geordneten H, in Zeichen $H' \mathfrak{Abs}_{H,J}$, wenn $H' \lesssim H$ ist, und wenn es noch die folgende Eigenschaft besitzt: Aus $x \varepsilon H'$, $y \varepsilon H - H'$ folgt $x \dot{<} y \ldots (J)$.[20] — Wir definieren nun eine Klasse von echten Teilbereichen eines unvollständig geordneten H, die wir die „durch x bestimmten Abschnitte im nach J geordneten H" nennen werden. Diese Bezeichnung ermöglicht insofern Mißverständnisse, als diese Bereiche im allgemeinen weder sämtlich Abschnitte im nach J geordneten H sind noch alle Abschnitte zu ihnen gehören. Wir werden aber in den §§ 5, 6 dieses Kapitels zeigen: für „vollständige Ordnungen" (vgl. dort) sind sie sämtlich Abschnitte, und für „Wohlordnungen" (vgl. dort) sind sie sogar im wesentlichen die einzigen Abschnitte (Satz 31).

Satz 16a. *H, J seien Bereiche $J \mathfrak{U} \mathfrak{O} H$ und $x \varepsilon H$. Es gibt einen und nur einen Bereich H', so daß $y \varepsilon H'$ mit $y \dot{<} x \ldots (J)$ gleichbedeutend ist. Wir bezeichnen dieses H' mit $\mathfrak{Abs}(x; H, J)$ und nennen es den von x bestimmten Abschnitt im nach J geordneten H.*

Satz 16b. *Wenn H (also auch J) eine Menge ist, so ist es auch $\mathfrak{Abs}(x; H, J)$. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H, J und alle $x \varepsilon H$*

$$\mathfrak{Abs}(x; H, J) = [\varphi, \langle\langle H, J \rangle, x \rangle]$$

ist. Es gibt ferner zu jedem H, J, $J \mathfrak{U} \mathfrak{O} H$, ein (nur von H, J abhängiges) II-Ding ψ, so daß für alle $x \varepsilon H$, für die $\mathfrak{Abs}(x; H, J)$ eine Menge ist,

$$\mathfrak{Abs}(x; H, J) = [\psi, x]$$

ist. (Wenn H eine Menge ist, so sind nach dem vorangehenden Satze auch alle $\mathfrak{Abs}(x; H, J)$ Mengen; es gibt aber auch unvollständig geordnete Bereiche, die keine Mengen sind, für welche dies zutrifft. Ja, es gibt sogar zu jedem Bereiche überhaupt eine unvollständige Ordnung — die übrigens

[20] Es käme auch die Bedingung „aus $x \varepsilon H'$, $y \dot{<} x \ldots (J)$ folgt $y \varepsilon H'$" in Frage. Für vollständige Ordnungen (vgl. Kap. IV, § 5) kommt beides auf dasselbe heraus, und hier brauchen wir diese Definition für Satz 17.

eine Wohlordnung ist [vgl. Kap. IV, § 5] — für welche dies zutrifft [vgl. die Sätze 41 und 54]).

Beweis. (Für 16a.) $y \varepsilon H,\ y \dot{<} x \ldots (J)$ bedeutet: $[H, y] \neq A$, $[J, \langle y, x\rangle] \neq A$, was auch so geschrieben werden kann: $[f, y] \neq A$ (f hängt von H, J und x ab). $H' = \mathfrak{B}(f)$ hat offenbar die gewünschten Eigenschaften. Die Eindeutigkeit folgt aus I. 4.

(Für 16b.) Der Mengen-Charakter von $\mathfrak{Abs}(x; H, J)$ folgt aus $\mathfrak{Abs}(x; H, J) < H$. Die beiden Darstellungen von $\mathfrak{Abs}(x; H, J)$ ergeben sich auf die gewohnte Weise. —

Satz 17. *H, J seien zwei Bereiche, es sei $J \mathcal{U} \mathcal{O} H$. Wenn K', K'' zwei Abschnitte des nach J geordneten H sind, so ist $K' = K''$, oder $K' < K''$, oder $K' > K''$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß $K' \lesssim K''$ oder $K'' \lesssim K'$ ist. Wenn nicht $K' \lesssim K''$ ist, so gibt es ein $x \varepsilon K'$, welches nicht Element von K'' ist. Wegen $K' \lesssim H$ ist $x \varepsilon H$, also ist $x \varepsilon H - K''$. Aus $y \varepsilon K''$ folgt also $y \dot{<} x$. Wäre nun y nicht Element von K', so wäre es ein Element von $H - K'$, denn wegen $K'' \lesssim H$ ist $y \varepsilon H$. Folglich müßte $x \dot{<} y$, $y \dot{>} x$ sein. $y \dot{<} x$ und $y \dot{>} x$ sind aber inkopatibel, also folgt aus $y \varepsilon K''$ $y \varepsilon K'$, d. h. es ist $K'' \lesssim K'$.

2. Auferlegte und übertragene Ordnung. Die Subsumptionsordnung.

Wir definieren zwei Arten der Ordnungs-Definition für einen Bereich mit Hilfe eines andern, bereits eine Ordnung besitzenden Bereiches.

Satz 18a. *H, J seien Bereiche, $J \mathcal{U} \mathcal{O} H$. H' sei ein Bereich und $H' \lesssim H$. Es gibt dann ein und nur ein $J' \mathcal{U} \mathcal{O} H'$, für welches bei allen $u \varepsilon H'$, $v \varepsilon H'$ die Relationen $u \dot{\varphi} v \ldots (J')$ ($\dot{\varphi}$ ist eine der Relationen $\dot{<}$, $\dot{>}$, $\|$) bzw. mit $u \dot{\varphi} v \ldots (J)$ gleichbedeutend sind. Dieses J' bezeichnen wir mit $\left(\frac{H'}{H}\right) J$ und nennen es die dem H' durch H, J auferlegte Teilordnung.*

Satz 18b. *Wenn H eine Menge ist, so sind offenbar auch J, H' und $\left(\frac{H'}{H}\right) J$ Mengen $\left(\text{wegen } J \mathcal{U} \mathcal{O} H,\ H' \lesssim H,\ \left(\frac{H'}{H}\right) J \mathcal{U} \mathcal{O} H'\right)$. Es gibt ein II-Ding φ, so daß in diesem Falle stets*

$$\left(\frac{H'}{H}\right) J = [\varphi, \langle\langle H, J\rangle, H'\rangle]$$

ist. Es gibt ferner zu jedem H, J, $J \mathcal{U} \mathcal{O} H$, ein II-Ding ψ, so daß für alle $H' \lesssim H$, die Mengen sind,

$$\left(\frac{H'}{H}\right) J = [\psi, H']$$

ist.

Beweis. (Für 18a.) Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 15. Daß es ein solches J' gibt, sehen wir daran, daß $|\langle H', H'\rangle| \cdot J$ allen Anforderungen genügt.

(Für 18b.) Da $\left(\frac{H'}{H}\right) J = |\langle H', H'\rangle| \cdot J$ ist, so ist es klar, daß alle Bedingungen bezüglich der Darstellbarkeit erfüllt sind.

Satz 19a. *H, J seien Bereiche, $J \mathfrak{U} \mathfrak{O} H$. φ sei ein II-Ding, so daß für alle $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$ aus $u \neq v$ $[\varphi, u] \neq [\varphi, v]$ folgt; ferner sei $H' = |[\varphi, H]|$. Es gibt dann ein und nur ein $J' \mathfrak{U} \mathfrak{O} H'$, für welches bei allen $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u' = [\varphi, u]$, $v' = [\varphi, v]$ (also $u' \varepsilon H'$, $v' \varepsilon H'$) die Relationen $u \blacklozenge v \ldots (J)$ ($\blacklozenge$ eine der Relationen $<, >, \|$) bzw. mit $u' \blacklozenge v' \ldots (J')$ gleichbedeutend sind. Dieses J' bezeichnen wir mit $[\varphi] J$ (wie man leicht sieht, hängt es bloß von φ und J ab, aber nicht direkt von H oder H'), und nennen es die auf H' durch φ von H, J übertragene Ordnung.*

Satz 19b. *Wenn H eine Menge ist, so sind offenbar auch J, H' und $[\varphi] J$ Mengen (wegen $J \mathfrak{U} \mathfrak{O} H$, $H' = |[\varphi, H]|$, $[\varphi] J \mathfrak{U} \mathfrak{O} H'$). Wenn auch φ ein I II-Ding ist, so gibt es ein (von H, J, φ unabhängiges) II-Ding ψ, so daß in diesem Falle stets*

$$[\varphi] J = [\psi, \langle \varphi, J\rangle]$$

ist. Wenn über φ nichts vorausgesetzt wird, so gibt es ein von φ abhängiges (aber von H, J nicht direkt abhängiges) II-Ding χ, so daß

$$[\varphi] J = [\chi, J]$$

ist.

Beweis. (Für 19a.) Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 15. Daß es ein solches J' gibt, sehen wir folgendermaßen ein. Wir setzen

$$\langle [\varphi u], [\varphi v]\rangle = [f, \langle u, v\rangle]$$

(f abhängig von φ), und bilden $J' = |[f, J]|$. J' besitzt offenbar die geforderten Eigenschaften.

(Für 19b.) Der zweite Teil ist evident, da ja

$$[\varphi] J = |[f, J]| = [\chi, J]$$

(f und χ von φ abhängig) ist. Um den ersten Teil zu beweisen, wo φ ein I II-Ding ist, reduzieren wir $\langle (\varphi, u], [\varphi, v]\rangle$ zu

$$[h, \langle \varphi, \langle u, v\rangle\rangle] \text{ [21]}$$

(h fest). $[\varphi] J = J'$ ist offenbar dadurch charakterisiert, daß $x' \varepsilon J'$ mit

---

[21] Der Hilfssatz 1 erlaubt eigentlich nicht, diese Form herzustellen. Wir helfen uns so: wir können jedenfalls auf die Form $[h', \langle\langle u, v\rangle, \varphi\rangle]$ bringen. Dies ist ein Ausdruck von φ und $\langle u, v\rangle$, kann also auf die Form $[h, \langle \varphi, \langle u, v\rangle\rangle]$ gebracht werden.

$x' = [h, \langle \varphi, x \rangle]$, $x \varepsilon J$ gleichbedeutend ist. Wir bringen darum die folgende Bedingung auf die Normalform: „ξ ist ein I II-Ding. Es ist für kein x' $[\xi, x'] \neq A$ und dabei für kein x $x' = [h, \langle \varphi, x \rangle]$, $[J, x] \neq A$. Es ist für kein x' $[\xi, x'] \neq B$ und dabei für ein x $x' = [h, \langle \varphi, x \rangle]$, $[J, x] \neq A$." Die Normalform ist natürlich

$$[j, \langle \langle \varphi, J \rangle, \xi \rangle] \neq A$$

(j fest). Da dieser Bedingung ein einziges ξ genügt, nämlich $[\varphi] J = J'$, so ist nach III. 3.

$$[\varphi] J = [\psi, \langle \varphi, J \rangle].$$

Schließlich geben wir diejenige unvollständige Ordnung an, die uns als Ausgangspunkt bei der Herstellung aller übrigen Ordnungen dienen wird, die sogenannte „Subsumptionsordnung"[22]). Wir definieren zuerst $\mathfrak{P}(\Omega) = \Omega^*$. Elemente von Ω^* sind diejenigen Mengen H, die $\lesssim \Omega$ sind, d. h. alle Mengen überhaupt. Das heißt: Ω^* ist der Bereich aller Mengen. Ω^* ist auch keine Menge, denn es ist offenbar $\mathfrak{S}(\Omega^*) = \Omega$, mit Ω^* müßte also auch Ω eine Menge sein.

Satz 20. *Es gibt ein und nur ein $J \mathfrak{U} \mathfrak{O} \Omega^*$, für welches $u \dot{<} v \ldots (J)$ mit $u < v$ gleichbedeutend ist. Dieses J bezeichnen wir mit Σ und nennen es die Subsumptionsordnung.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 15. Die Existenz sehen wir so ein.

Wir bringen die folgende Bedingung auf die Normalform: „Es gibt ein u, zu dem es ein v gibt, so daß $u \varepsilon \Omega^*$, $v \varepsilon \Omega^*$, $x = \langle u, v \rangle$, $u < v$ (d. h. $u \varepsilon \mathfrak{P}(v) - \{v\}$) ist". Die Normalform ist natürlich

$$[f, x] \neq A.$$

Wir setzen dann $J = \mathfrak{B}(f)$, J besitzt offenbar alle gewünschten Eigenschaften.

3. Eigenschaften der auferlegten und der übertragenen Ordnung.

Wir geben noch einige triviale Eigenschaften der in den letzten Paragraphen aufgestellten Begriffe an. In der „naiven Mengenlehre" ist es meistens gar nicht üblich diejenigen Distinktionen zu treffen, die uns in diesen Paragraphen beschäftigen: so wird z. B. kaum zwischen einer Ordnung und den durch dieselbe den Teilbereichen auferlegten Teilordnungen unterschieden. Die axiomatische Methode zwingt uns zu einer größeren Exaktheit, und so können wir die etwas langwierigen und dabei fast durchwegs trivialen Überlegungen der §§ 1—3 nicht umgehen.

[22]) Dieser Ausdruck stammt von Hessenberg (vgl. seine bei [18]) zitierte Arbeit).

Es gelten die folgenden Sätze:

H, H', H'' und J seien Bereiche, $J \mathcal{U} \mathcal{O} H$ und $H'' \lesssim H' \lesssim H$. Dann ist $\left(\frac{H''}{H}\right) J = \left(\frac{H''}{H'}\right)\left(\frac{H'}{H}\right) J$. — H und J seien Bereiche, φ, ψ II-Dinge. Es sei $J \mathcal{U} \mathcal{O} H$. Ferner setzen wir $H' = |[\varphi, H']|$, $H'' = |[\psi, H']|$. Aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ folge $[\varphi, u] \neq [\varphi, v]$; aus $u' \varepsilon H'$ $v' \varepsilon H'$, $u' \neq v'$ folge $[\psi, u'] \neq [\psi, v']$. Wir setzen $[\chi, u] = [\psi, [\varphi, u]]$. Es ist offenbar $H'' = |[\chi, H]|$, und aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ folgt $[\chi, u] \neq [\chi, v]$. Dann ist $[\chi] J = [\psi][\varphi] J$. — H, H' und J seien Bereiche $H' \lesssim H$; φ sei ein II-Ding. Es sei $J \mathcal{U} \mathcal{O} H$. Aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ folge $[\varphi, u] \neq [\varphi, v]$. Dann ist $[\varphi]\left(\frac{H'}{H}\right) J = \left(\frac{|[\varphi, H']|}{|[\varphi, H]|}\right)[\varphi] J$.

All dies ist mit Hilfe von Satz 15 sofort einzusehen. Ferner gilt: H, H', J seien Bereiche, φ ein II-Ding. Es sei $J \mathcal{U} \mathcal{O} H$. Aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ folge $[\varphi, u] \neq [\varphi, v]$. Wenn $H' \mathcal{A}bs H, J$ ist, so ist auch $[\varphi, H'] | \mathcal{A}bs | [\varphi, H]|, [\varphi] J$. — H und J seien Bereiche, φ ein II-Ding. Es sei $J \mathcal{U} \mathcal{O} H$. Aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ folge $[\varphi, u] \neq [\varphi, v]$. Dann ist $|[\varphi, \mathcal{A}bs(x; H, J)]| = \mathcal{A}bs([\varphi, x]; |[\varphi, H]|, [\varphi] J)$.

Diese Behauptungen sind trivial.

4. Ähnlichkeit.

Die Ähnlichkeit definieren wir folgendermaßen:

Definition. $H, H' J, J'$ seien Bereiche, es sei $J \mathcal{U} \mathcal{O} H$, $J' \mathcal{U} \mathcal{O} H'$. Wir sagen: H, J ist dem H', J' ähnlich, in Zeichen: $H, J \approx H', J'$, wenn es ein II-Ding φ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

Aus $x \varepsilon H$, $y \varepsilon H$, $x \neq y$ folgt $[\varphi, x] \neq [\varphi, y]$. Es ist $H' = |[\varphi, H]|$, $J' = [\varphi] J$. Diese Eigenschaften von φ drücken wir so aus: $H, J \approx H' J' \ldots (\varphi)$.

Vor allem benötigen wir den folgenden Satz:

Satz 21a. *Wenn $H, J \approx H', J'$ ist und H eine Menge ist, so sind es auch J sowie H' und J'. Ferner kann ein I II-Ding φ immer so gewählt werden, daß $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$ ist.*

Satz 21b. *Es gibt ein II-Ding ψ, so daß für alle Mengen H, J, H', J' die Relationen $J \mathcal{U} \mathcal{O} H$, $J' \mathcal{U} \mathcal{O} H'$, $H, J \approx H', J'$ mit der Relation $[\psi, \langle\langle\langle H, J\rangle, H'\rangle, J'\rangle] \neq A$ gleichbedeutend sind.*

Es gibt ein II-Ding χ, so daß für alle Mengen H, J, H', J' und alle I II-Dinge φ die Relationen $J \mathcal{U} \mathcal{O} H$, $J' \mathcal{U} \mathcal{O} H'$, aus $x \varepsilon H$, $y \varepsilon H$, $x \neq y$ folgt $[\varphi, x] \neq [\varphi, y]$, und schließlich $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$ einerseits und die Relation $[\chi, \langle\langle\langle\langle H, J\rangle, H'\rangle, J'\rangle, \varphi\rangle] \neq A$ andererseits gleichbedeutend sind.

Beweis. (Für 21a.) Wegen $J \mathcal{U} \mathcal{O} H$, $H' = |[\varphi, H]|$, $J' \mathcal{U} \mathcal{O} H'$ sind mit H auch J, H', J' Mengen. Aus $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$ folgt, wie man sofort sieht, $H, J \approx H', J' \ldots \left(\frac{\varphi \mid 0}{H}\right)$; und wegen $\left(\frac{\varphi \mid 0}{H}\right) \lesssim H$ ist dieses ein I II-Ding.

(Für 21b.) Der Beweis des zweiten Teiles benötigt keine nähere Erläuterung: Wir können die dort formulierten Bedingungen auf dem bekannten Wege auf die gewünschte Normalform bringen.

Der erste Teil folgt aus dem zweiten auf Grund der Bemerkung in Satz 21a: $H, J \approx H', J'$ ist schon damit gleichbedeutend, daß für ein I II-Ding φ $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$, d. h. $[\chi, \langle\langle\langle H, J\rangle, H'\rangle, J'\rangle, \varphi\rangle] \neq A$ ist. Dies kann auf die gewohnte Art (in diesem Falle hauptsächlich mit Hilfe von Axiom IV. 1. und III. 2.) zu $[\psi, \langle\langle\langle H, J\rangle, H'\rangle J'\rangle] \neq A$ umgeformt werden.

Weiter brauchen wir die identische, die symmetrische und die transitive Eigenschaft der Ähnlichkeit:

Satz 22. *H, J, H', J', H'', J'' seien Bereiche, $J \mathcal{U} \mathcal{O} H$, $J' \mathcal{O} \mathcal{U} H'$. $J'' \mathcal{U} \mathcal{O} H''$.*

Es ist $H, J \approx H, J$. Aus $H, J \approx H' J'$ folgt $H', J' \approx H, J$. Aus $H, J \approx H', J'$, $H', J' \approx H'', J''$ folgt $H, J \approx H'', J''$.

Beweis. Die erste Behauptung ist trivial: denn für $[\varphi, x] = x$ (φ nach II. 1.) ist $H, J \approx H, J \ldots (\varphi)$.

Die zweite Behauptung beweisen wir so: Wenn $H, J \approx H', J'$, d. h. $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$ ist, so ist (wie man leicht sieht) $H', J' \approx H, J \ldots (\psi)$, falls für $x \varepsilon H$, $y \varepsilon H'$ $y = [\varphi, x]$ mit $x = [\psi, y]$ gleichbedeutend ist. Ein solches ψ ist aber leicht herzustellen: denn nach den Annahmen über φ gibt es zu jedem $y \varepsilon H'$ ein und nur ein $x \varepsilon H$ mit $[\varphi, x] = y$, also kann dies auf die bekannte Art auf die Form $[\psi, y]$ gebracht werden.

Die dritte Behauptung ist wieder fast trivial: denn wenn $H, J \approx H', J'$, $H', J' \approx H'', J''$ ist, d. h. $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$ und $H', J' \approx H'', J'' \ldots (\psi)$, so ist (wie man leicht sieht) $H, J \approx H'', J'' \ldots (\chi)$, falls $[\chi, x] = [\psi, [\varphi, x]]$ ist. Ein solches χ existiert aber nach II. 7.

Schließlich beweisen wir noch:

Satz 23. *H, J, H', J' seien Bereiche, $J \mathcal{U} \mathcal{O} H$, $J' \mathcal{U} \mathcal{O} H'$. φ sei ein II-Ding, ferner seien $\overline{H}, \overline{H}'$ Bereiche $\overline{H} \lesssim H$, $\overline{H}' \lesssim H'$ und $H' = |[\varphi, H]|$, $\overline{H}' = |[\varphi, \overline{H}]|$. Dann folgt aus $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$ $\overline{H}, \left(\frac{\overline{H}}{H}\right) J \approx \overline{H}'$, $\left(\frac{\overline{H}'}{H'}\right) J' \ldots (\varphi)$.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Definition der Ähnlichkeit.

5. Vollständige- und Wohlordnung.

Wir sind nun so weit, daß wir die Begriffe der vollständigen und der Wohlordnung aufstellen können.

Definition. H, J seien Bereiche, $J\,\mathcal{UO}\,H$. Wir nennen J eine vollständige Ordnung von H, in Zeichen: $J\,\mathcal{VO}\,H$, wenn es die folgende Eigenschaft hat: Für kein $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$ ist $u \| v \ldots (J)$.

Wir beweisen einige einfache Sätze über die vollständige Ordnung.

Satz 24. *Wenn H eine Menge ist, so gibt es eine und nur eine Menge K, für die $J\,\mathcal{VO}\,H$ mit $J \varepsilon K$ gleichbedeutend ist. Wir bezeichnen dieses K mit $\mathcal{VO}(H)$. Es gibt ein Π-Ding φ, so daß für alle Mengen H*

$$\mathcal{VO}(H) = [\varphi, H]$$

ist.

Beweis. Dies wird analog zu Satz 14 bewiesen. Wir müssen hier die folgende Aussage auf die Normalform

$$[f, \langle H, J\rangle] \neq A$$

bringen: „$J \varepsilon \mathcal{UO}(H)$, und es gibt kein u, zu dem es ein v gibt, so daß $[H, u] \neq A$, $[H, v] \neq A$, $u \neq v$, $[J, \langle u, v\rangle] = A$, $[J, \langle v, u\rangle] = A$ (d. h. $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \| v \ldots (J)$) ist.“ Alles übrige geschieht genau wie bei Satz 14.

Satz 25. *H, J, H', J' seien Bereiche, $J\,\mathcal{UO}\,H$, $J'\,\mathcal{UO}\,H'$, $H, J \approx H', J'$. Dann ist $J\,\mathcal{VO}\,H$ mit $J'\,\mathcal{VO}\,H'$ gleichbedeutend.*

H, J, H' seien Bereiche, $J\,\mathcal{UO}\,H$, $H' \lesssim H$. Aus $J\,\mathcal{VO}\,H$ folgt $\left(\frac{H'}{H}\right) J\,\mathcal{VO}\,H'$.

Beweis. Diese Behauptungen sind evident.

Definition. H, J seien Bereiche, $J\,\mathcal{UO}\,H$. Wenn $u \varepsilon H$ ist und aus $v \varepsilon H$ $u \leqq v \ldots (J)$ bzw. $u \geqq v \ldots (J)$ folgt, so nennen wir u ein erstes bzw. letztes Element des nach J geordnetem H.

Satz 26a. *H, J seien Bereiche, $J\,\mathcal{UO}\,H$. Das nach J geordnete H hat kein oder ein und nur ein erstes bzw. letztes Element.*

Satz 26b. *Wenn H, J Mengen sind, so gibt es zwei Π-Dinge φ, ψ, so daß*

$$[\varphi, \langle H, J\rangle] \neq A$$

damit gleichbedeutend ist, daß das nach J geordnete H ein erstes bzw. letztes Element hat, und wenn das der Fall ist, so ist $[\psi, \langle H, J\rangle]$ dieses erste bzw. letzte Element.

Beweis. (Für 26a.) Diese Behauptung ist evident.

(Für 26b.) Wir können die Bedingung „Es ist $[H, u] \neq A$, und für alle v ist $[H, v] = A$ oder $u = v$ oder $[J, \langle u, v\rangle] \neq A$ bzw. $[J, \langle v, u\rangle] \neq A$“

auf die gewohnte Art auf die Form

$$[f, \langle\langle H, J\rangle, u\rangle] \neq A$$

bringen. Dann liefern III. 2. und III. 3. die Behauptungen.

Satz 27. *H, J, H', J' seien Bereiche, $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$, $J'\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H'$, $H, J \approx H', J'$. Das nach J geordnete H hat dann und nur dann ein erstes bzw. letztes Element, wenn das nach J' geordnete H' eines hat.*

Wenn $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$ ist, und das erstere u ist, so ist das letztere $[\varphi, u]$.

Beweis. Diese Behauptungen sind evident.

Nun definieren wir die Wohlordnung.

Definition. H, J seien Bereiche, $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$. Wir sagen: J ist eine Wohlordnung von H, in Zeichen $J\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H$, wenn für jeden Bereich $H' \lesssim H$, $H' \neq 0$ das nach $\left(\frac{H'}{H}\right) J$ geordnete H' ein erstes Element hat.

Satz 28. *Wenn H eine Menge ist, so gibt es eine und nur eine Menge K, für die $J \varepsilon K$ mit $J\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H$ gleichbedeutend ist.*

Dieses K bezeichnen wir mit $\mathcal{W}\mathcal{O}(H)$. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H

$$\mathcal{W}\mathcal{O}(H) = [\varphi, H]$$

ist.

Beweis. Auch hier wird alles in voller Analogie zu den Sätzen 14 und 24 bewiesen, nur daß hier die folgende Bedingung auf die Normalform

$$[f, \langle H, J\rangle] \neq A$$

gebracht werden muß: „$J \varepsilon \mathcal{U}\mathcal{O}(H)$. Für jedes H' ist entweder nicht $H' \varepsilon \mathfrak{P}(H) - \{0\}$, oder aber besitzt das nach J geordnete H ein erstes Element.“

Satz 29. *H, J, H', J' seien Bereiche, $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$, $J'\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H'$, $H, J \approx H', J'$. Dann ist $J\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H$ mit $J'\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H'$ gleichbedeutend. H, J, H' seien Bereiche, $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$, $H' \lesssim H$. Aus $J\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H$ folgt $\left(\frac{H'}{H}\right) J\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H'$.*

Beweis. Diese Behauptungen sind evident.

6. Abschnitte in vollständig- und in wohlgeordneten Mengen.

Satz 30. *H, J seien zwei Bereiche. Aus $J\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H$ folgt $J\,\mathcal{V}\mathcal{O}\,H$, aus $J\,\mathcal{V}\mathcal{O}\,H$ folgt $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$. Für eine Menge H ist also*

$$\mathcal{W}\mathcal{O}(H) \lesssim \mathcal{V}\mathcal{O}(H) \lesssim \mathcal{U}\mathcal{O}(H).$$

Beweis. Daß aus $J\,\mathcal{V}\mathcal{O}\,H$ $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$ folgt, ist klar. Wir müssen noch zeigen: Aus $J\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H$ folgt $J\,\mathcal{V}\mathcal{O}\,H$.

Es sei also $J\mathcal{W}\mathcal{O}H$. Nehmen wir an, es wäre $u\varepsilon H$, $v\varepsilon H$, $u\|v\ldots(J)$. Dann ist $\{u,v\}\lesssim H$, $\{u,v\}\neq 0$, also hat $\{u,v\}$ ein erstes Element. Dies sei x. Wegen $x\varepsilon\{u,v\}$ ist $x=u$ oder $x=v$. Aus $x=u$ folgt wegen $v\varepsilon\{u,v\}$

$$u\dot{\leqq}v\ldots\left(\frac{\{u,v\}}{H}\right)J,\quad u\dot{\leqq}v\ldots(J),$$

aus $x=v$ wegen $u\varepsilon\{u,v\}$

$$v\dot{\leqq}u\ldots\left(\frac{\{u,v\}}{H}\right)J,\quad v\dot{\leqq}u\ldots(J),\quad u\dot{\geqq}v\ldots(J).$$

Beides ist mit $u\|v\ldots(J)$ unvereinbar. Also ist $J\mathcal{V}\mathcal{O}H$.

Satz 31. *H, J seien Bereiche. Wenn $J\mathcal{V}\mathcal{O}H$ ist, so sind die folgenden Bereiche Abschnitte des nach J geordneten H: H und alle $\mathcal{A}bs(u;H,J)$, $u\varepsilon H$. Wenn sogar $J\mathcal{W}\mathcal{O}H$ ist, so sind diese die einzigen Abschnitte.*

Beweis. Daß H ein Abschnitt ist, ist klar. Für $\mathcal{A}bs(u;H,J)$ sehen wir es so ein: Es sei $x\varepsilon\mathcal{A}bs(u;H,J)$ und $y\varepsilon H-\mathcal{A}bs(u;H,J)$, d. h. $x\varepsilon H$, $y\varepsilon H$ und $x\dot{<}u\ldots(J)$, aber nicht $y\dot{<}u\ldots(J)$. Das letztere bedeutet aber wegen $J\mathcal{V}\mathcal{O}H$ $y\dot{\geqq}u\ldots(J)$, woraus sofort das Gewünschte, $x\dot{<}y\ldots(J)$, folgt.

Damit ist die erste Hälfte unserer Behauptung bewiesen. Es bleibt noch übrig die zweite zu beweisen, d. h. zu zeigen, daß im Falle $J\mathcal{W}\mathcal{O}H$ keine weiteren Abschnitte existieren. Wir können dies so formulieren: Aus $H'\,\mathcal{A}bs\,H,J$ folgt $H'=H$ oder $H'=\mathcal{A}bs(u;H,J)$ mit $u\varepsilon H$. Oder auch: Aus $H'<H$, $H'\,\mathcal{A}bs\,H,J$ folgt $H'=\mathcal{A}bs(u;H,J)$ mit $u\varepsilon H$.

Es ist nämlich $H-H'\lesssim H$, $H-H'\neq 0$, also hat das nach $\left(\frac{H-H'}{H}\right)J$ geordnete $H-H'$ ein erstes Element. Dieses sei u. Wegen $u\varepsilon H-H'$ folgt aus $x\varepsilon H'$ $x\dot{<}u\ldots(J)$, d. h. $x\varepsilon\mathcal{A}bs(u;H,J)$.

Aus $x\varepsilon H-H'$ folgt hingegen $u\dot{\leqq}x\ldots\left(\frac{H-H'}{H}\right)J$, $u\dot{\leqq}x\ldots(J)$. Oder: Aus $x\dot{<}u\ldots(J)$ (d. h. $x\varepsilon\mathcal{A}bs(u;H,J)$) folgt $x\varepsilon H'$. D. h. $x\varepsilon H'$ ist mit $x\varepsilon\mathcal{A}bs(u;H,J)$ gleichbedeutend, also ist $H'\sim\mathcal{A}bs(u;H,J)$, $H'=\mathcal{A}bs(u;H,J)$. Dabei ist $u\varepsilon H-H'$, $u\varepsilon H$.

V. Theorie der Ordnungszahlen.

1. Zählung, Ordnungszahl, Zählbarkeit.

Wir haben nun alle Grundlagen entwickelt, die uns instand setzen das Haupthilfsmittel der allgemeinen Mengenlehre, die Theorie der Ordnungszahlen, zu entwickeln (vgl. die Bemerkung im Kap. I, § 3).

Unser Begriff der „Ordnungszahl" beruht auf dem Hilfsbegriffe der „Zählung". Wir definieren diese zwei Begriffe folgendermaßen:

Definition. H, J seien Bereiche, $J\mathfrak{W}\mathfrak{O}H$. Wir nennen ein II-Ding φ eine Zählung des nach J geordneten H, in Zeichen: $\varphi\,\mathfrak{Z}H, J$, wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Es ist $\varphi \lesssim H$, d. h. wenn nicht $x \varepsilon H$ ist, so ist $[\varphi, x] = A$.
2. Wenn $x \varepsilon H$ ist, so ist $[\varphi, x] = |[\varphi, \mathfrak{Abs}(x; H, J)]|$.

Wenn φ eine Zählung des nach J geordneten H ist, so nennen wir den Bereich $P = |[\varphi, H]|$ eine Ordnungszahl des nach J geordneten H, in Zeichen: $P\mathfrak{O}\mathfrak{Z}H, J$. Ferner nennen wir das nach J geordnete H zählbar, in Zeichen: $\mathfrak{Z}H, J$, wenn es Zählungen (also auch Ordnungszahlen) desselben gibt. Schließlich nennen wir einen Bereich P eine Ordnungszahl, in Zeichen: $P\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$, wenn es zwei Bereiche H, J, $J\mathfrak{W}\mathfrak{O}H$ gibt, so daß $P\mathfrak{O}\mathfrak{Z}H, J$ ist.

Ehe wir diese Begriffe näher untersuchen, sprechen wir einige allgemeine Aussagen über ihre formale Darstellung aus.

Satz 32a. *Wenn H eine Menge ist, so wissen wir, daß jedes $J\mathfrak{W}\mathfrak{O}H$ eine Menge ist. Es ist aber auch jede Zählung φ des nach J geordneten H ein III-Ding, und jede Ordnungszahl P desselben eine Menge.*

Satz 32b. *Wenn H, J, P Mengen sind und φ ein III-Ding ist, so lassen sich vier II-Dinge ψ, χ, ξ, ζ angeben, so daß $\varphi\,\mathfrak{Z}H, J$ mit $[\psi, \langle\langle H, J\rangle, \varphi\rangle] \neq A$ gleichbedeutend ist, $P\mathfrak{O}\mathfrak{Z}H, J$ mit $[\chi, \langle\langle H, J\rangle, P\rangle] \neq A$, $\mathfrak{Z}H, J$ mit $[\xi, \langle H, J\rangle] \neq A$, und $P\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$ mit $[\zeta, P] \neq A$ gleichbedeutend ist.*

Beweis. (Für 32a.) φ ist ein III-Ding, weil $\varphi \lesssim H$ ist, P eine Menge, weil $P = |[\varphi, H]|$ ist.

(Für 32b.) Um $\varphi\,\mathfrak{Z}H, J$ auf die Form $[\psi, \langle\langle H, J\rangle, \varphi\rangle] \neq A$ zu bringen, müssen wir nur die Bedingungen 1. und 2. der Definition derart umformen, was auf dem gewohnten Wege ohne weiteres geht.

$P\mathfrak{O}\mathfrak{Z}H, J$ bedeutet: „Es gibt ein III-Ding φ, für welches $[\psi, \langle\langle H, J\rangle, \varphi\rangle] \neq A$ ist und $P = |[\varphi, H]|$ ist." Auch dies können wir auf die gewohnte Art auf die Form $[\chi, \langle\langle H, J\rangle, P\rangle] \neq A$ bringen.

Die beiden letzten Darstellungen schließlich erhalten wir durch einige einfache Umformungen und Anwendung von III. 2. Es ist klar, wie man dabei zu verfahren hat.

Wenn wir $K = \mathfrak{B}(\zeta)$ setzen, so erhalten wir einen Bereich, der alle Ordnungszahlen enthält, die Mengen sind, und nur diese. Wegen I. 4. gibt es nur ein einziges solches K; wir bezeichnen dasselbe mit Ω^{**}. Da alle Ordnungszahlen Mengen sind, so ist $\Omega^{**} \lesssim \Omega^{*} \lesssim \Omega$. (Wir wissen, daß Ω, Ω^{*} keine Mengen sind, und im § 6 werden wir beweisen, daß auch Ω^{**} keine Menge ist.)

2. Eindeutigkeit der Zählung.

Satz 33. *H, J seien Bereiche, $JW\mathfrak{O}H$. Wenn überhaupt $\mathfrak{Z}\,H, J$ ist, so gibt es ein und nur ein II-Ding φ mit $\varphi\,\mathfrak{Z}\,H, J$.*

Beweis. Wir müssen zeigen: Aus $\varphi'\,\mathfrak{Z}\,H, J$, $\varphi''\,\mathfrak{Z}\,H, J$ folgt $\varphi' = \varphi''$. Nach I. 4. genügt es hierzu nachzuweisen, daß stets $[\varphi', x] = [\varphi'', x]$ ist. Da für alle x, die nicht zu H gehören, $[\varphi', x] = [\varphi'', x] = \Lambda$ ist, können wir uns auf die Elemente x von H beschränken.

Nehmen wir also an, es gebe ein $x \varepsilon H$ mit $[\varphi', x] \neq [\varphi'', x]$. Wir können diese Bedingung unschwer auf die Form $[f, x] \neq \Lambda$ (f unabhängig von x) bringen; dann ist $H^* = \mathfrak{B}(f)$ ein Bereich, dessen Elemente alle x mit $x \varepsilon H$, $[\varphi', x] \neq [\varphi'', x]$ sind. Es ist $H^* \lesssim H$, und nach Annahme ist $H^* \neq 0$.

Also hat das nach $\left(\frac{H^*}{H}\right) J$ geordnete H^* ein erstes Element, d. h. es gibt ein $x \varepsilon H^*$ derart, daß für jedes $y \varepsilon H^*$ $x \overset{\cdot}{\leqq} y \ldots \left(\frac{H^*}{H}\right) J$, $x \overset{\cdot}{\leqq} y \ldots (J)$, $y \overset{\cdot}{\geqq} x \ldots (J)$ folgt. Oder: Aus $y \overset{\cdot}{<} x \ldots (J)$ folgt $y \varepsilon H - H^*$.

Wegen $x \varepsilon H^*$ ist $[\varphi', x] \neq [\varphi'', x]$, also $|[\varphi', \mathfrak{Abs}(x; H, J)]| \neq |[\varphi'', \mathfrak{Abs}(x; H, J)]|$, Da für alle $y \varepsilon \mathfrak{Abs}(x; H, J)$ $y \overset{\cdot}{<} x \ldots (J)$, also $y \varepsilon H - H^*$, also $[\varphi', y] = [\varphi'', y]$ ist, so muß trotzdem $|[\varphi', \mathfrak{Abs}(x; H, J)]| = |[\varphi'', \mathfrak{Abs}(x; H, J)]|$ sein. Das ist ein Widerspruch.

Für zählbare nach J geordnete H sind also Zählung und Ordnungszahl eindeutig festgelegte Begriffe. Wir bezeichnen dieselben mit $\mathfrak{Z}(H, J)$ bzw. $O\mathfrak{Z}(H, J)$.

Wenn H, J Mengen sind, so folgt dann aus Satz 32b (durch Anwendung von III. 3.) die Existenz zweier II-Dinge φ, ψ, für welche in diesem Falle stets $\mathfrak{Z}(H, J) = [\varphi, \langle H, J\rangle]$, $O\mathfrak{Z}(H, J) = [\psi, \langle H, J\rangle]$ ist.

3. Existenz der Zählung.

Satz 34. *H, J seien Bereiche, $JW\mathfrak{O}H$. Wenn $\mathfrak{Z}\,H, J$ ist, so ist auch für jedes $u \varepsilon H$ $\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J$, und es ist*

$$O\mathfrak{Z}\left(\mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J\right) = [\mathfrak{Z}(H, J), u].$$

Beweis. Wir setzen $f = \left(\frac{\mathfrak{Z}(H, J) \mid 0}{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}\right)$ und behaupten: Es ist $f\,\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J$. Es gilt nämlich:

Wenn nicht $x \varepsilon \mathfrak{Abs}(u; H, J)$ ist, so ist

$$[f, x] = [0, x] = \Lambda.$$

Wenn $x \varepsilon \mathfrak{Abs}(u; H, J)$ ist, so ist

$$[f, x] = [\boldsymbol{Z}(H, J), x].$$

Folglich gilt für alle $y \varepsilon \mathfrak{Abs}(x; H, J)$ (da dann auch $y \varepsilon \mathfrak{Abs}(u; H, J)$ ist)

$$[f, y] = [\boldsymbol{Z}(H, J), y],$$

und darum ist:

$$\begin{aligned} &\left|\left[f, \mathfrak{Abs}\left(x; \mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J\right)\right]\right| \\ &\quad = |[f, \mathfrak{Abs}(x; H, J)]| = |[\boldsymbol{Z}(H, J), \mathfrak{Abs}(x; H, J)]| \\ &\quad = [\boldsymbol{Z}(H, J), x] = [f, x]. \end{aligned}$$

Also ist wirklich $f \boldsymbol{Z} \mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J$. Und hieraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OZ}\left(\mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J\right) &= |[f, \mathfrak{Abs}(u; H, J)]| \\ = |[\boldsymbol{Z}(H, J), \mathfrak{Abs}(u; H, J)]| &= [\boldsymbol{Z}(H, J), u]. \end{aligned}$$

Satz 35. *H, J seien Bereiche, $J \mathfrak{WO} H$. Wenn für jedes $u \varepsilon H$ $\mathfrak{Abs}(u; H, J)$ eine Menge ist und $\boldsymbol{Z} \mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J$, so ist auch $\boldsymbol{Z} H, J$.*

Beweis. Nach Annahme existiert für jedes $u \varepsilon H$

$$\boldsymbol{OZ}\left(\mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J\right)$$

und ist eine Menge, wir können es also auf die Form $[f, u]$ bringen (f von H, J abhängig, vgl. den Schluß von § 2). Wir setzen $g = \left(\frac{f \mid 0}{H}\right)$; dann ist für alle u, die nicht Elemente von H sind,

$$[g, u] = [0, u] = \Lambda$$

und für alle u, die Elemente von H sind,

$$[g, u] = [f, u] = \boldsymbol{OZ}\left(\mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J\right).$$

Wir behaupten nun: g ist eine Zählung des nach J geordneten H, womit unser Satz auch bewiesen wäre. Da für alle u die nicht zu H gehören, $[g, u] = \Lambda$ ist, genügt es die Elemente u von H zu betrachten.

Es sei $u \varepsilon H$, wir setzen der Kürze halber $\mathfrak{Abs}(u; H, J) = H^*$. Dann gilt für alle $x \varepsilon H^*$:

$$\left[\boldsymbol{Z}\left(H^*, \left(\frac{H^*}{H}\right) J\right), x\right]$$

$$= \boldsymbol{OZ}\left(\mathfrak{Abs}\left(x; H^*, \left(\frac{H^*}{H}\right) J\right), \left(\frac{\mathfrak{Abs}\left(x; H^*, \left(\frac{H^*}{H}\right) J\right)}{H^*}\right)\left(\frac{H^*}{H}\right) J\right)$$

$$= \boldsymbol{OZ}\left(\mathfrak{Abs}(x; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(x; H, J)}{H}\right) J\right) = [g, x].$$

Und hieraus folgt

$$|[g, \mathfrak{Abs}(u; H, J)]| = |[g, H^*]| = \left|\left[Z\left(H^*, \left(\frac{H^*}{H}\right)J\right), H^*\right]\right|$$

$$= OZ\left(H^*, \left(\frac{H^*}{H}\right)J\right) = OZ\left(\mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right)J\right) = [g, u].$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 36. *H, J seien Bereiche, $JWOH$. Für jedes $x \varepsilon H$ sei $\mathfrak{Abs}(x; H, J)$ eine Menge. Dann ist ZH, J.*

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an. Nach Satz 35 kann dann auch nicht für alle $x \varepsilon H$ $Z\,\mathfrak{Abs}(x; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(x, H, J)}{H}\right)J$ sein.

Wir können diese Eigenschaft: „$x \varepsilon H$ und es ist nicht $Z\,\mathfrak{Abs}(x; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(x; H, J)}{H}\right)J$“ auf die gewohnte Art auf die Form $[f, x] \neq A$ bringen (f ist von H und J abhängig). Wir bilden weiter $H^* = \mathfrak{B}(f)$, dann ist H^* ein Bereich und seine Elemente sind alle $x \varepsilon H$, für die nicht $Z\,\mathfrak{Abs}(x; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(x; H, J)}{H}\right)J$ ist. Es ist $H^* \lesssim H$ und nach Annahme auch $H^* \neq 0$.

Wegen $JWOH$ hat folglich das nach $\left(\frac{H^*}{H}\right)J$ geordnete H^* ein erstes Element. Dieses sei u. Es ist $u \varepsilon H^*$; und aus $x \varepsilon H^*$ folgt $u \dot{\leqq} x \ldots \left(\frac{H^*}{H}\right)J$, $u \dot{\leqq} x \ldots (J)$, $x \dot{\geqq} u \ldots (J)$, d. h. aus $x \dot{<} u \ldots (J)$ folgt $x \varepsilon H - H^*$.

Für alle $x \varepsilon \mathfrak{Abs}(u; H, J)$ ist also $x \dot{<} u \ldots (J)$, $x \varepsilon H - H^*$, d. h. $Z\,\mathfrak{Abs}(x; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(x; H, J)}{H}\right)J$, und dabei ist $\mathfrak{Abs}(x; H, J)$ eine Menge. Wir setzen der Kürze halber $\mathfrak{Abs}(u; H, J) = H'$ und sehen dann: Es ist $\left(\frac{H'}{H}\right)JWOH'$ (wegen $H' \lesssim H$). Für alle $x \varepsilon H'$ ist $\mathfrak{Abs}\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right)J\right) = \mathfrak{Abs}(x; H, J)$ eine Menge. Und für alle $x \varepsilon H'$ ist das nach $\left(\frac{\mathfrak{Abs}\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right)J\right)}{H'}\right)\left(\frac{H'}{H}\right)J$ geordnete $\mathfrak{Abs}\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right)J\right)$, d. h. das nach $\left(\frac{\mathfrak{Abs}(x; H, J)}{H}\right)J$ geordnete $\mathfrak{Abs}(x; H, J)$, zählbar.

Nach Satz 35 ist also auch $ZH', \left(\frac{H'}{H}\right)J$, d. h. $Z\,\mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right)J$. Folglich ist nicht $u \varepsilon H'$. Andererseits wissen wir aber, daß $u \varepsilon H'$ ist, und dies ist ein Widerspruch. Folglich muß ZH, J sein.

4. Subsumptionsordnung von Ordnungszahlen.

Satz 37. *H, J seien Bereiche, $JWOH$, ZH, J. Es ist für kein Element x von H $[Z(H, J), x] \varepsilon [Z(H, J), x]$.*

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an. Wir können diese Eigenschaft: „$x \varepsilon H$ und $[Z(H, J), x] \varepsilon [Z(H, J), x]$“ auf die gewohnte Art auf die Form $[f, x] \neq A$ bringen. Wir bilden weiter $H^* = \mathfrak{B}(f)$, dann ist H^* ein Bereich, und seine Elemente sind alle $x \varepsilon H$, für die $[Z(H, J), x] \varepsilon [Z(H, J), x]$. Es ist $H^* \lesssim H$ und nach Annahme ist auch $H^* \neq 0$.

Wegen $J \mathfrak{WO} H$ hat also das nach $\left(\frac{H^*}{H}\right) J$ geordnete H^* ein erstes Element. Dieses sei u. Wir können wieder leicht einsehen, daß $u \varepsilon H^*$ ist und daß aus $x \dot{<} u \ldots (J)$ $x \varepsilon H - H^*$ folgt.

Wegen $u \varepsilon H^*$ ist $[Z(H, J), u] \varepsilon [Z(H, J), u]$; da aber $[Z(H, J), u] = |[Z(H, J), \mathfrak{Abs}(u; H, J)]|$ ist, so folgt hieraus $[Z(H, J), u] \varepsilon |[Z(H, J), \mathfrak{Abs}(u; H, J)]|$, $[Z(H, J), u] = [Z(H, J), x]$, $x \varepsilon \mathfrak{Abs}(u; H, J)$. Wegen $[Z(H, J), u] \varepsilon [Z(H, J), u]$ wird also auch $[Z(H, J), x] \varepsilon [Z(H, J), x]$ sein, also ist $x \varepsilon H^*$. Andererseits ist $x \varepsilon \mathfrak{Abs}(u; H, J)$, $x \dot{<} u \ldots (J)$, also $x \varepsilon H - H^*$. Dies ist ein Widerspruch.

Satz 38. *H, J seien Bereiche, $J \mathfrak{WO} H$, $Z H, J$. Für alle Elemente u, v von H folgt aus $u \dot{<} v \ldots (J)$* $[Z(H, J), u] < [Z(H, J), v]$.

Beweis. Aus $u \dot{<} v \ldots (J)$ folgt $\mathfrak{Abs}(u; H, J) < \mathfrak{Abs}(v; H, J)$, also $|[Z(H, J, \mathfrak{Abs}(u; H, J)]| \lesssim |[Z(H, J), \mathfrak{Abs}(v; H, J)]|$, d. h. $[Z(H, J), u] \lesssim [Z(H, J), v]$. Andererseits ist wegen $u \dot{<} v \ldots (J)$, $u \varepsilon \mathfrak{Abs}(v; H, J)$ also $[Z(H, J), u] \varepsilon |[Z(H, J), \mathfrak{Abs}(v; H, J)]|$, d. h. $[Z(H, J), u] \varepsilon [Z(H, J), v]$, und nach Satz 37 ist nicht $[Z(H, J), u] \varepsilon [Z(H, J), u]$; folglich kann nicht $[Z(H, J), u] = [Z(H, J), v]$ sein. Also ist $[Z(H, J), u] < [Z(H, J), v]$, wie behauptet wurde.

Satz 39. *H, J seien Bereiche, $J \mathfrak{WO} H$, $Z H, J$. Dann folgt aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$* $[Z(H, J), u] \neq [Z(H, J), v]$ *und es ist*

$$\mathfrak{OZ}(H, J) = |[Z(H, J), H]|, \left(\frac{\mathfrak{OZ}(H, J)}{\Omega^*}\right) \Sigma = [Z(H, J)] J.$$

Beweis. Da $u \neq v$ ist und wegen $J \mathfrak{WO} H$, $J \mathfrak{VO} H$ auch $u \| v \ldots (J)$ ausgeschlossen ist, so muß $u \dot{<} v \ldots (J)$ oder $u \dot{>} v \ldots (J)$, $v \dot{<} u \ldots (J)$ sein. Nach Satz 38 ist also $[Z(H, J), u] < [Z(H, J), v]$ oder $[Z(H, J), v] < [Z(H, J), u]$, aber jedenfalls $[Z(H, J), u] \neq [Z(H, J), v]$.

$\mathfrak{OZ}(H, J) = |[Z(H, J), H]|$ ist definitorisch; um $\left(\frac{\mathfrak{OZ}(H, J)}{\Omega^*}\right) \Sigma = [Z(H, J)] J$ zu beweisen, genügt es nach Satz 15 einzusehen, daß aus $x \dot{<} y \ldots ([Z(H, J)] J)$ bzw. $x \| y \ldots ([Z(H, J)] J)$ $x \dot{<} y \ldots \left(\frac{\mathfrak{OZ}(H, J)}{\Omega^*}\right) \Sigma$ bzw. $x \| y \ldots \left(\frac{\mathfrak{OZ}(H, J)}{\Omega^*}\right) \Sigma$ folgt.

Das erstere ist mit $x = [Z(H, J), u]$, $y = [Z(H, J), v]$ und $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \dot{<} v \ldots (J)$ bzw. $u \| v \ldots (J)$ gleichbedeutend. Wir müssen also nach-

weisen: aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$ und $u \dot{<} v \ldots (J)$ bzw. $u \| v \ldots (J)$ folgt $[Z(H,J), u] < [Z(H,J), v] \ldots \left(\frac{OZ(H,J)}{\Omega^*}\right) \Sigma$ bzw. $[Z(H,J), u] \| [Z(H,J), v] \ldots \left(\frac{OZ(H,J)}{\Omega^*}\right) \Sigma$. Das zweite erübrigt sich, da wegen $J \mathfrak{WO} H$, $J \mathfrak{VO} H$ nie $u \| v \ldots (J)$ ist.

Bezüglich des ersteren ist zu bemerken:

$[Z(H,J), u] \dot{<} [Z(H,J), v] \ldots \left(\frac{OZ(H,J)}{\Omega^*}\right) \Sigma$ ist mit $[Z(H,J), u] \dot{<} [Z(H,J), v] \ldots (\Sigma)$, d. h. mit $[Z(H,J), u] < [Z(H,J), v]$ gleichbedeutend.

Daß jedoch aus $u \dot{<} v \ldots (J)$ $[Z(H,J), u] < [Z(H,J), v]$ folgt, wurde bereits durch Satz 38 ausgesagt.

Satz 40. *H, J seien Bereiche, $J \mathfrak{WO} H$, $Z H, J$. Dann ist*

$$H, J \approx OZ(H,J), \left(\frac{OZ(H,J)}{\Omega^*}\right) \Sigma \ldots (Z(H,J)).$$

Hieraus folgt übrigens $\left(\frac{OZ(H,J)}{\Omega^*}\right) \Sigma \mathfrak{WO} OZ(H,J)$.

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 39.

Auf Grund der Sätze 36 und 40 sind wir in der Lage, das Problem der Zählbarkeit allgemein zu entscheiden:

Satz 41. *H, J seien Bereiche, $J \mathfrak{WO} H$. Es ist dann und nur dann $Z H, J$, wenn für alle $u \varepsilon H$ $\mathfrak{Abs}(u; H, J)$ eine Menge ist. (Wenn H selbst eine Menge ist, so ist dies sicher der Fall.)*

Beweis. Daß diese Bedingung hinreichend ist, sahen wir bereits in Satz 36. Daß sie notwendig ist, beweisen wir so:

Es sei $Z H, J$. Es sei $u \varepsilon H$, wir setzen der Kürze halber $H' = \mathfrak{Abs}(u; H, J)$. Dann ist auch $Z H'$, $\left(\frac{H'}{H}\right) J$, und es ist

$$H', \left(\frac{H'}{H}\right) J \approx OZ\left(H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right), \left(\frac{OZ\left(H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)}{\Omega^*}\right) \Sigma.$$

$$OZ\left(H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right) = [Z(H,J), u].$$

Hieraus folgt aber, da $[Z(H,J), u]$ ein I-Ding ist, das auch $OZ\left(H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)$ I-Ding, d.h. Menge ist und folglich auch $H' = \mathfrak{Abs}(u; H, J)$ eine Menge ist.

5. Charakteristische Eigenschaften der Ordnungszahlen.

Satz 42. *POZ ist damit gleichbedeutend, daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

1. *P ist ein Bereich und $P \lesssim \Omega^*$.*

2. *Es ist* $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma \mathcal{WO} P$.

3. *Es ist für jedes* $u \varepsilon P$ $u = \mathcal{Abs}\left(u; P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right)$.

Beweis. Daß die Bedingungen notwendig sind, beweisen wir zuerst. Wenn $P \boldsymbol{OZ}$ ist, so ist $P \boldsymbol{OZ} H, J$, $J \mathcal{WO} H$. Da $P = |[\boldsymbol{Z}(H, J), H]|$, ist P ein Bereich; da jedes Element von P gleich $[\boldsymbol{Z}(H, J), x] = |[\boldsymbol{Z}(H, J), \mathcal{Abs}(x; H, J)]|$ ist, sind diese auch Bereiche, und weil sie I-Dinge sein müssen, Mengen. Also ist $P \lesssim \Omega^*$. Folglich ist 1. erfüllt. 2. folgt aus Satz 40, und 3. beweisen wir so:

Wenn $x \varepsilon P$, d. h. $x \varepsilon \boldsymbol{OZ}(H, J)$, $x \varepsilon |[\boldsymbol{Z}(H, J), H]|$ ist, so ist $x = [\boldsymbol{Z}(H, J), u]$, $u \varepsilon H$, und hieraus folgt

$$\mathcal{Abs}\left(x; P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = \mathcal{Abs}([\boldsymbol{Z}(H, J), u]; |[\boldsymbol{Z}(H, J), H]|, [\boldsymbol{Z}(H, J)] J)$$
$$= |[\boldsymbol{Z}(H, J), \mathcal{Abs}(u; H, J)]| = [\boldsymbol{Z}(H, J), u] = x,$$

d. h. die Behauptung von 3.

Nun beweisen wir, daß die Bedingungen auch hinreichend sind. P genüge also den Bedingungen 1, 2, 3. Es ist dann $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma \mathcal{WO} P$. Wir wählen f so, daß stets $[f, x] = x$ ist und setzen $g = \left(\frac{f \mid 0}{P}\right)$. Wir behaupten nun: es ist $g \boldsymbol{Z} P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$.

Wenn x nicht Element von P ist, so ist $[g, x] = [0, x] = A$. Ist hingegen $x \varepsilon P$, so ist $[g, x] = [f, x] = x$. Also ist für alle $x \varepsilon P$

$$\left|\left[g, \mathcal{Abs}\left(x; P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right)\right]\right| = \mathcal{Abs}\left(x; P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = x = [g, x].$$

Es ist also wirklich $g \boldsymbol{Z} P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$. Und hieraus folgt weiter

$$\boldsymbol{OZ}\left(P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = \left|\left[\boldsymbol{Z}\left(P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right), P\right]\right| = |[g, P]| = P.$$

Es ist also in der Tat $P \boldsymbol{OZ}$.

Satz 43. *Es sei* $P \boldsymbol{OZ}$. *Dann ist* $Q \varepsilon P$ *damit gleichbedeutend, daß* $Q \boldsymbol{OZ}$ *und* $Q < P$ *ist.* (*Hieraus folgt also auch, daß* Q *ein I-Ding, also eine Menge ist.*)

Beweis. Wenn $P \boldsymbol{OZ}$ ist, so ist $P = \boldsymbol{OZ}(H, J)$, $J \mathcal{WO} H$. Wegen

$$P = \boldsymbol{OZ}(H, J) = |[\boldsymbol{Z}(H, J), H]|$$

folgt dann aus $Q \varepsilon P$, daß $Q = [\boldsymbol{Z}(H, J), u]$, $u \varepsilon H$ ist, also

$$Q = [\boldsymbol{Z}(H, J), u] = \boldsymbol{OZ}\left(\mathcal{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathcal{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J\right),$$

es ist also $Q\,O\,Z$. Da ferner nach Satz 42

$$Q = \mathfrak{Abs}\left(Q; P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) < P$$

ist, ist auch $Q < P$ bewiesen.

Ist umgekehrt $P\,O\,Z$ und $Q\,O\,Z$, $Q < P$, so schließen wir auf die folgende Weise.

Wenn $x \varepsilon Q$, $y \varepsilon P - Q$ ist, so kann keinesfalls $x = y$ sein. Auch $x \| y \ldots \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ ist unmöglich, da ja $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\,W\,O\,P$, $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\,V\,O\,P$ ist. Und aus $x \dot{>} y \ldots \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ würde sich folgendes ergeben: Wegen $x \varepsilon P$, $x \varepsilon Q$, $P\,O\,Z$, $Q\,O\,Z$ ist

$$\mathfrak{Abs}\left(x; P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = x, \mathfrak{Abs}\left(x; Q, \left(\frac{Q}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = x,$$

$$\mathfrak{Abs}\left(x; P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = \mathfrak{Abs}\left(x; Q, \left(\frac{Q}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) < Q.$$

Aus $x \dot{>} y \ldots \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ folgt $y \dot{<} x \ldots \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$, $y \varepsilon \mathfrak{Abs}\left(x; P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right)$, also $y \varepsilon Q$. Dies widerspricht mit $y \varepsilon P - Q$.

Also muß $x \dot{<} y \ldots \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ sein. Folglich ist $Q\,\mathfrak{Abs}\,P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$. Es ist aber $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\,W\,O\,P$, wir können also den Satz 31 anwenden, unter Berücksichtigung von $Q < P$ ergibt er: $Q = \mathfrak{Abs}\left(u; P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right)$, $u \varepsilon P$. Also ist

$$Q = \mathfrak{Abs}\left(u; P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = u,$$

d. h. $Q \varepsilon P$. Damit haben wir unsere Behauptung restlos bewiesen. —

Aus Satz 43 können wir insbesondere die folgenden beiden Konsequenzen ziehen: Wenn $P\,O\,Z$, $Q\,O\,Z$ ist, so ist $P \varepsilon Q$ mit $P < Q$ gleichbedeutend. Wenn $P\,O\,Z$, $Q\,O\,Z$, $P < Q$ ist, so ist Q eine Menge.

6. Der Bereich der Ordnungszahlen.

Satz 44. *Wenn $P\,O\,Z$, $Q\,O\,Z$ ist, so ist immer entweder $P = Q$ oder $P < Q$ oder $P > Q$.*

Beweis. Wir setzen $R = P \cdot Q$ und behaupten: $R\,O\,Z$. Da P ein Bereich ist und $P \lesssim \Omega^*$ ist, so folgt hieraus dasselbe für $R = P \cdot Q$ (d. h. R erfüllt die Bedingung 1 des Satzes 42). Aus $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\,W\,O\,P$ folgt wegen $R \lesssim R$, $\left(\frac{R}{P}\right)\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\,W\,O\,R$, $\left(\frac{R}{\Omega^*}\right)\Sigma\,W\,O\,R$ (d. h. R erfüllt auch 2).

Und wegen $P\,O\,Z$, $Q\,O\,Z$ gilt für alle $x \varepsilon R$, d. h. $x \varepsilon P$, $x \varepsilon Q$:

$$x = \mathfrak{Abs}\left(x;\, P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right), \qquad x = \mathfrak{Abs}\left(x;\, Q, \left(\frac{Q}{\Omega^*}\right)\Sigma\right),$$

$$\mathfrak{Abs}\left(x;\, R, \left(\frac{R}{\Omega^*}\right)\Sigma\right)$$

$$= \mathfrak{Abs}\left(x;\, P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) \cdot \mathfrak{Abs}\left(x;\, Q, \left(\frac{Q}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = x \cdot x = x$$

(d. h. R erfüllt auch 3). Also ist wirklich $R\,O\,Z$.

Nun ist offenbar $R \lesssim P$, $R \lesssim Q$. Wenn $R = P$ oder $R = Q$ ist, so folgt hieraus: $P \lesssim Q$ oder $Q \lesssim P$, also entweder $P \sim Q$, d. h. $P = Q$ oder $P < Q$ oder $Q < P$, $P > Q$. In diesem Falle ist also alles bewiesen.

$R \neq P$, $R \neq Q$ ist aber unmöglich. Denn dann wäre $R < P$, $R < Q$ wegen $R\,O\,Z$, $P\,O\,Z$, $Q\,O\,Z$, also $R \varepsilon P$, $R \varepsilon Q$, und folglich $R \varepsilon P \cdot Q$, $R \varepsilon R$, woraus wegen $R\,O\,Z$ wieder $R < R$ folgte, was ausgeschlossen ist.

Satz 45. *Es ist* $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right)\Sigma\, W\, O\, \Omega^{**}$. ($\Omega^{**}$ ist der am Ende des § 1 definierte Bereich, der alle Ordnungszahlen enthält, die Mengen sind.)

Beweis. Der Ausdruck $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ ist jedenfalls sinnvoll, da ja $\Omega^{**} \lesssim \Omega^*$ ist. Wir müssen nun zeigen: Wenn $\mathfrak{H}$ ein Bereich ist, und $\mathfrak{H} \lesssim \Omega^{**}$, $\mathfrak{H} \neq 0$ ist, so hat das nach $\left(\frac{\mathfrak{H}}{\Omega^{**}}\right)\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete $\mathfrak{H}$, d. h. das nach $\left(\frac{\mathfrak{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete $\mathfrak{H}$, ein erstes Element, d. h. es gibt ein $P \varepsilon \mathfrak{H}$ derart, daß für alle $Q \varepsilon \mathfrak{H}$ stets $P \leqq Q \ldots \left(\frac{\mathfrak{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ ist oder, was dasselbe heißt, $P \leqq Q \ldots (\Sigma)$, also $P \lesssim Q$ ist.

Da $\mathfrak{H} \neq 0$ ist, können wir ein $P \varepsilon \mathfrak{H}$ finden. Sind dann alle $Q \varepsilon \mathfrak{H}$ $P \lesssim Q$, so sind wir schon am Ziele. Wenn nicht, so betrachten wir diejenigen $Q \varepsilon \mathfrak{H}$, für die nicht $P \lesssim Q$ ist.

Wegen $P \varepsilon \mathfrak{H}$, $Q \varepsilon \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} \lesssim \Omega^{**}$ ist $P\,O\,Z$, $Q\,O\,Z$, folglich muß $P > Q$ sein. Also ist $Q < P$, d. h. $Q \varepsilon P$. Jedes solche Q gehört also dem Bereiche $P \cdot \mathfrak{H}$ an. Nach Annahme ist folglich $P \cdot \mathfrak{H} \neq 0$.

Nun ist $P \cdot \mathfrak{H} \lesssim P$, $P \cdot \mathfrak{H} \neq 0$ und $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\, W\, O\, P$; folglich hat das nach $\left(\frac{P \cdot \mathfrak{H}}{P}\right)\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete $P \cdot \mathfrak{H}$, d. h. das nach $\left(\frac{P \cdot \mathfrak{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete $P \cdot \mathfrak{H}$, ein erstes Element. Dieses sei P'.

Es ist $P' \varepsilon P \cdot \mathfrak{H}$, also $P' \varepsilon \mathfrak{H}$. Wenn $Q \varepsilon \mathfrak{H}$ ist, so ist entweder nicht $P \lesssim Q$, oder es ist $P \lesssim Q$. Im ersten Falle muß $Q \varepsilon P \cdot \mathfrak{H}$ sein, also ist $P' \leqq Q \ldots \left(\frac{P \cdot \mathfrak{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma$, $P' \leqq Q \ldots (\Sigma)$, $P' \lesssim Q$. Im zweiten hingegen ist wegen $P' \varepsilon P \cdot \mathfrak{H}$ $P' \varepsilon P$, also $P' < P$ und $P \lesssim Q$ sogar $P' < Q$.

Es ist also jedenfalls $P' \lesssim Q$, und damit ist unser Satz bewiesen.

Satz 46. *$P\,O\,Z$ ist damit gleichbedeutend, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *P ist ein Bereich und $P \lesssim \Omega^{**}$.*

2. *Für jedes $Q \varepsilon P$ ist $Q \lesssim P$.*

Beweis [23]). Daß diese Bedingung notwendig ist, ist klar: denn jede Ordnungszahl P ist ein Bereich, und da aus $Q \varepsilon P$ $Q\,O\,Z$ folgt und dabei Q eine Menge ist, muß $Q \varepsilon \Omega^{**}$ sein. Außerdem folgt aus $Q \varepsilon P$ sogar $Q < P$.

Wir müssen nun noch beweisen, daß die Bedingungen 1, 2 unseres Satzes auch hinreichend sind. P erfülle also diese Bedingungen, wir werden dann zeigen, daß $P\,O\,Z$ ist, d. h. daß die Bedingungen 1, 2 und 3 des Satzes 42 erfüllt sind.

P ist ein Bereich und $P \lesssim \Omega^{**} \lesssim \Omega^{*}$, also ist die Bedingung 1 des Satzes 42 erfüllt. Aus $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^{*}}\right) \Sigma\, W\, O\, \Omega^{**}$ folgt wegen $P \lesssim \Omega^{**}$ auch $\left(\frac{P}{\Omega^{**}}\right)\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^{*}}\right) \Sigma\, W\, O\, P$, d. h. $\left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right) \Sigma\, W\, O\, P$. Also ist auch 2. erfüllt. Wir müssen nun noch das Erfülltsein von 3. beweisen, d. h. zeigen: aus $Q \varepsilon P$ folgt $Q = Abs\left(Q; P, \left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right) \Sigma\right)$.

$x \varepsilon Abs\left(Q; P, \left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right) \Sigma\right)$ bedeutet: es ist $x \varepsilon P$, $x \dot{<} Q \ldots \left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right) \Sigma$. Das letztere können wir auch so formulieren: $x \dot{<} Q \ldots (\Sigma)$ oder auch $x < Q$. Also: $x \varepsilon Abs\left(Q; P, \left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right) \Sigma\right)$ bedeutet $x \varepsilon P$, $x < Q$. Wegen $P \lesssim \Omega^{**}$ folgt aus $x \varepsilon P$ $x\,O\,Z$, wir können also auch schreiben: $x \varepsilon P$, $x\,O\,Z$, $x < Q$. Wegen $Q \varepsilon P$, $P \lesssim \Omega^{**}$ ist aber auch $Q\,O\,Z$, also bedeutet $x\,O\,Z$, $x < Q$ einfach $x \varepsilon Q$. Das ergibt die weitere Formulierung: $x \varepsilon P$ $x \varepsilon Q$. Und wegen $Q \lesssim P$ ist dies mit $x \varepsilon Q$ gleichbedeutend.

Folglich ist $Q \sim Abs\left(Q; P, \left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right) \Sigma\right)$; auf der rechten Seite steht offenbar ein Bereich, und wegen $Q\,O\,Z$ auch auf der linken. Also ist $Q = Abs\left(Q; P, \left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right) \Sigma\right)$, wie behauptet wurde. —

---

[23]) Man sieht leicht ein, daß der Satz 46 auch so formuliert werden kann: Die Ordnungszahlen sind mit den Abschnitten des nach $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^{*}}\right) \Sigma$ geordneten Ω^{**} identisch. Diese Formulierung würde, unter Heranziehung des Satzes 31, einen anderen einfachen Beweis unserer Behauptung ermöglichen.

Die Bedingungen des Satzes 46 lassen sich übrigens offenbar auch so formulieren: P ist ein Bereich, und es ist $P \lesssim \Omega^{**} \cdot \mathfrak{P}(P)$.[24])

Der Satz 46 hat eine Konsequenz, die der Burali-Fortischen Antinomie[25]) der „naiven" Mengenlehre entspricht. Oder um es etwas anders auszudrücken: der nun folgende Satz ist nichts anderes als die unschädlich gemachte Burali-Fortische Antinomie.

Satz 47. *Es gibt eine und nur eine Ordnungszahl, die keine Menge ist, und diese ist* Ω^{**}.

Beweis. Ω^{**} ist eine Ordnungszahl, denn es erfüllt die Bedingungen 1 und 2 des Satzes 46: Es ist ein Bereich, es ist $\Omega^{**} \lesssim \Omega^{**}$ (d. h. 1. ist erfüllt); und aus $P \varepsilon \Omega^{**}$ folgt POZ, also $P \lesssim \Omega^{**}$ (d. h. 2. ist erfüllt). Hieraus folgt aber, daß Ω^{**} keine Menge sein kann: denn dann wäre $\Omega^{**} OZ$, Ω^{**} eine Menge, also $\Omega^{**} \varepsilon \Omega^{**}$, was wegen $\Omega^{**} OZ \; \Omega^{**} < \Omega^{**}$ zur Folge hätte. Und dies ist unmöglich.

Jede von Ω^{**} verschiedene Ordnungszahl ist aber eine Menge. Denn aus POZ, $P \neq \Omega^{**}$ folgt $P \lesssim \Omega^{**}$, $P \neq \Omega^{**}$, also $P < \Omega^{**}$, und wegen POZ, $\Omega^{**} OZ$ muß dann P eine Menge sein (siehe die Bemerkung am Schlusse des § 5). —

Der Satz 46 würde uns schon hier ermöglichen, gewisse allgemeine Operationen zur Herstellung von Ordnungszahlen anzugeben; wir verschieben aber dies bis in die Kapitel VIII und IX: denn bei den Anwendungen, die wir in den folgenden Kapiteln VI und VII von den Ordnungszahlen machen werden, kommt es nur auf die bereits entwickelten Eigenschaften derselben an.

VI. Ähnlichkeit und Ordnungszahlen. Der Wohlordnungssatz.

1. Ähnlichkeit und Ordnungszahlen.

Wir unterbrechen an diesem Orte die weitere Untersuchung der Ordnungszahlen, um uns der wichtigsten Anwendung derselben, der Theorie der Wohlordnungen, zuzuwenden. Die Untersuchung der Ordnungszahlen werden wir in den Kapiteln VII (§ 2), VIII (§ 3, 4) und IX wieder aufnehmen.

---

[24]) Die hier angegebenen charakteristischen Eigenschaften der Ordnungszahlen können nicht als gleichwertige Definitionen derselben angesehen werden, da in sie der Begriff Ω^{**} eingeht, der seinerseits durch die Ordnungszahlen definiert wird. Hingegen ist die Charakterisierung durch Satz 42 eine gleichwertige Definition derselben, sie setzt übrigens ebenso wie die ursprüngliche Definition im § 1 den Begriff der Wohlordnung voraus. Es sei hier erwähnt, daß auch eine einfache direkte Definition unseres Ordnungszahlenbegriffes, unabhängig von der Wohlordnung, möglich ist.

[25]) Die Antinomien der Mengenlehre behandelt z. B. H. Poincaré: Wissenschaft und Methode; übersetzt von H. und L. Lindemann, Leipzig und Berlin 1914.

Wir beginnen mit dem Satze, der die Grundlage der Beschreibung der Ähnlichkeitsverhältnisse durch Ordnungszahlen ist.

Satz 48a. *H, J, H', J' seien Bereiche, $J \mathcal{W} \mathcal{O} H$, $J' \mathcal{W} \mathcal{O} H'$. Wenn $H, J \approx H', J'$, so ist $\boldsymbol{Z} H, J$ mit $\boldsymbol{Z} H', J'$ gleichbedeutend.*

Satz 48b. *Wenn $\boldsymbol{Z} H, J$ und $\boldsymbol{Z} H', J'$ ist, so ist $H, J \approx H', J'$ mit $\boldsymbol{O Z}(H, J) = \boldsymbol{O Z}(H', J')$ gleichbedeutend.*

Beweis. (Für 48a.) Wegen der Symmetrie der Ähnlichkeit genügt es, zu zeigen, daß aus $\boldsymbol{Z} H, J$ $\boldsymbol{Z} H', J'$ folgt.

Es sei also $\boldsymbol{Z} H, J$, $H, J \approx H', J' \ldots (f)$. Dann ist für jedes $x \varepsilon H$ $\mathcal{Abs}(x; H, J)$ eine Menge. Also ist auch

$$\mathcal{Abs}([f, x]; H', J') = \mathcal{Abs}([f, x]; |[f, H]|, [f] J) = |[f, \mathcal{Abs}(x; H, J)]|$$

eine Menge. Da nun jedes $x' \varepsilon H'$ wegen $H' = |[f, H]|$ einem $[f, x]$, $x \varepsilon H$ gleich ist, sind alle $\mathcal{Abs}(x'; H', J')$ Mengen, d. h. es ist $\boldsymbol{Z} H, J$. (Dieser Beweis erfolgt auf Grund des Satzes 41. Wir hätten die Behauptung auch ohne die Benutzung dieses Satzes beweisen können, allerdings etwas umständlicher. Es käme dazu dieselbe Methode in Frage, mit der wir weiter unten beim Beweise des Satzes 48b zeigen werden, daß aus $H, J \approx H' J'$ $\boldsymbol{O Z}(H, J) = \boldsymbol{O Z}(H', J')$ folgt.)

(Für 48b.) Daß aus $\boldsymbol{O Z}(H, J) = \boldsymbol{O Z}(H', J')$ $H, J \approx H', J'$ folgt, ist klar: es ist hier

$$H, J \approx \boldsymbol{O Z}(H, J), \left(\frac{\boldsymbol{O Z}(H, J)}{\Omega^*}\right) \Sigma, \quad H', J' \approx \boldsymbol{O Z}(H', J'), \left(\frac{\boldsymbol{O Z}(H', J')}{\Omega^*}\right) \Sigma.$$

Wir müssen nur noch die Umkehrung beweisen.

Es sei also $H, J \approx H', J' \ldots (f)$. Wir bringen dann $[\boldsymbol{Z}(H', J'), [f, x]]$ auf die Form $[g, x]$ und setzen $h = \left(\frac{g \mid 0}{H}\right)$. Dann ist für alle x, die nicht zu H gehören

$$[h, x] = [0, x] = A,$$

und für alle x, die zu H gehören,

$$[h, x] = [g, x] = [\boldsymbol{Z}(H', J'), [f, x]].$$

Wir werden nun zeigen, daß h eine Zählung des nach J' geordneten H ist.

Wenn nicht $x \varepsilon H$ ist, so ist in der Tat $[h, x] = A$. Wenn hingegen $x \varepsilon H$ ist, so ist:

$$\begin{aligned} |[h, \mathcal{Abs}(x; H, J)]| &= |[\boldsymbol{Z}(H', J'), |[f, \mathcal{Abs}(x; H, J)]|]| \\ &= |[\boldsymbol{Z}(H', J'), \mathcal{Abs}([f, x]; |[f, H]|, [f] J)]| \\ = |[\boldsymbol{Z}(H', J'), \mathcal{Abs}([f, x]; H', J')]| &= [\boldsymbol{Z}(H', J'), [f, x]] = [h, x]. \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $h\,\boldsymbol{Z}\,H, J$. Und hieraus folgt:

$$\boldsymbol{OZ}(H,J) = |[\boldsymbol{Z}(H,J), H]| = |[h,H]|$$
$$= |[\boldsymbol{Z}(H',J'), |[f,H]|]| = |[\boldsymbol{Z}(H',J'), H']| = \boldsymbol{OZ}(H',J'),$$

wie behauptet wurde[26]). —

Ein weiterer Satz über die Ähnlichkeit und Ordnungszahlen ist der folgende:

Satz 49. *H, J, H', J' seien Bereiche, $J\,\mathcal{WO}\,H$, $J'\,\mathcal{WO}\,H'$, und $\boldsymbol{Z}\,H, J$, $\boldsymbol{Z}\,H', J'$. Es gibt dann und nur dann ein $x \varepsilon H'$, so daß*

$$H, J \approx \mathcal{Abs}(x; H', J'), \left(\frac{\mathcal{Abs}(x; H', J')}{H'}\right) J'$$

ist, wenn $\boldsymbol{OZ}(H,J) < \boldsymbol{OZ}(H',J')$ ist.

Beweis. $\boldsymbol{OZ}(H,J) < \boldsymbol{OZ}(H',J')$ ist, wie wir wissen, mit $\boldsymbol{OZ}(H,J)\,\varepsilon\,\boldsymbol{OZ}(H',J')$ gleichbedeutend. Wegen

$$\boldsymbol{OZ}(H',J') = |[\boldsymbol{Z}(H',J'), H']|$$

bedeutet dies; daß $\boldsymbol{OZ}(H,J) = [\boldsymbol{Z}(H,J), x]$, $x \varepsilon H$ ist. Nun ist in diesem Falle

$$\boldsymbol{OZ}(H,J) = [\boldsymbol{Z}(H',J'), x] = \boldsymbol{OZ}\left(\mathcal{Abs}(x; H', J'), \left(\frac{\mathcal{Abs}(x; H', J')}{H'}\right) J'\right).$$

Und dies ist nach Satz 48b in der Tat mit

$$H, J \approx \mathcal{Abs}(x; H', J'), \left(\frac{\mathcal{Abs}(x; H', J')}{H'}\right) J'$$

gleichbedeutend.

Schließlich beweisen wir noch:

Satz 50. *H, J, H' seien Bereiche, $J\,\mathcal{WO}\,H$, $\boldsymbol{Z}\,H, J$ und $H' \lesssim H$. Dann ist auch $\boldsymbol{Z}\,H', \left(\frac{H'}{H}\right) J$ und es ist*

$$\boldsymbol{OZ}\left(H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right) \lesssim \boldsymbol{OZ}(H, J).$$

Beweis. Wegen $\boldsymbol{Z}\,H, J$ sind alle $\mathcal{Abs}(x; H, J)$, $x \varepsilon H$ Mengen; aus $H' \lesssim H$ folgt $\mathcal{Abs}\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right) \lesssim \mathcal{Abs}(x; H, J)$ (für $x \varepsilon H'$), also sind auch die $\mathcal{Abs}\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)$, $x \varepsilon H'$, Mengen. Folglich ist $\boldsymbol{Z}\ H', \left(\frac{H'}{H}\right) J$.

---

[26]) In der „naiven" Mengenlehre ist dieser Satz natürlich trivial, er ist sozusagen definitorisch für den Ordnungszahlenbegriff. Man beachte, daß er sich nicht auf alle wohlgeordnete, sondern bloß auf die zählbaren Mengen bezieht; diesen Umstand werden wir noch in § 2 näher ins Auge fassen.

Wenn nicht $\boldsymbol{OZ}\left(H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right) \lesssim \boldsymbol{OZ}(H, J)$ wäre, so müßte nach Satz 44 $\boldsymbol{OZ}\left(H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right) > \boldsymbol{OZ}(H, J)$ sein, nach Satz 49 wäre also

$$H, J \approx \mathfrak{Abs}\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right), \left(\frac{\mathfrak{Abs}\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)}{H'}\right)\left(\frac{H'}{H}\right) J,$$

d. h.

$$H, J \approx \mathfrak{Abs}\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right), \left(\frac{\mathfrak{Abs}\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)}{H}\right) J.$$

Wir bezeichnen $\mathfrak{Abs}\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)$ der Kürze halber mit H^*, dann wird also

$$H, J \approx H^*, \left(\frac{H^*}{H}\right) J \ldots (f)$$

sein. Wegen $H^* = \mathfrak{Abs}\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)$ ist dabei für alle $y \varepsilon H^*$ $y \dot{<} x \ldots \left(\frac{H'}{H}\right) J$, $y \dot{<} x \ldots (J)$. Es gilt nun zu zeigen, daß dies unmöglich ist. Die Eigenschaft: „$y \varepsilon H$ und $[f, y] \dot{<} y \ldots (J)$“ werde auf die Form $[g, y] \neq A$ gebracht und dann $K = \mathfrak{B}(g)$ gesetzt. K ist ein Bereich und seine Elemente sind alle $y \varepsilon H$, für die $[f, y] \dot{<} y \ldots (J)$ ist. Es ist $K \lesssim H$ und $K \neq 0$. Das letztere darum, weil das vorhin Erwähnte $x \varepsilon K$ ist, es ist nämlich: $x \varepsilon H$, $[f, x] \varepsilon H^*$, also $[f, x] \dot{<} x \ldots (J)$.

Wegen $J \mathcal{W} O H$ hat also das nach $\left(\frac{K}{H}\right) J$ geordnete K ein erstes Element u, d. h. es ist $u \varepsilon K$, und aus $y \varepsilon K$ folgt $u \dot{\leqq} y \ldots \left(\frac{K}{H}\right) J$, $u \dot{\leqq} y \ldots (J)$, also aus $y \dot{<} u \ldots (J)$ $y \varepsilon H - K$.

Wegen $u \varepsilon K$ ist $[f, u] \dot{<} u \ldots (J)$, und infolge von $H, J \approx H^*, \left(\frac{H^*}{H}\right) J \ldots (f)$ folgt hieraus $[f, [f, u]] \dot{<} [f, u] \ldots \left(\frac{H^*}{H}\right) J$, $[f, [f, u]] \dot{<} [f, u] \ldots (J)$. Also ist auch $[f, u] \varepsilon K$. Wegen $[f, u] \dot{<} u \ldots (J)$ muß aber $[f, u] \varepsilon H - K$ sein, und das ist ein Widerspruch.

2. Vergleichbarkeit, Eindeutigkeit der Abbildung.

Aus den Sätzen des § 1 können wir sofort die folgende Konsequenz ziehen:

H, J, H', J' seien Bereiche, $J \mathcal{W} O H$, $J' \mathcal{W} O H'$. Es sei ferner $\boldsymbol{Z} H, J$, $\boldsymbol{Z} H', J'$. Da sind unter den untenstehenden Aussagen die bei A. stehenden, die bei B. stehenden und die bei C. stehenden untereinander gleichbedeutend. Diese Aussagen lauten folgendermaßen:

A. Es ist $H, J \approx H', J'$. Es ist $\boldsymbol{OZ}(H, J) = \boldsymbol{OZ}(H', J')$.

B. Es ist $H, J \approx \mathfrak{Abs}(x; H', J')$, $\left(\frac{\mathfrak{Abs}(x; H', J')}{H}\right) J'$ für ein $x \varepsilon H$. Es ist $\boldsymbol{OZ}(H, J) < \boldsymbol{OZ}(H', J')$. Es ist $\boldsymbol{OZ}(H, J) \varepsilon \boldsymbol{OZ}(H', J')$.

C. Es ist $H', J' \approx \mathfrak{Abs}(x; H, J)$, $\left(\frac{\mathfrak{Abs}(x; H, J)}{H}\right) J'$ für ein $x \varepsilon H$. Es ist $\boldsymbol{OZ}(H, J) > \boldsymbol{OZ}(H', J')$. Es ist $\boldsymbol{OZ}(H', J') \varepsilon \boldsymbol{OZ}(H, J)$.

An der zweiten Formulierung eines jeden der drei Fälle sehen wir sofort, daß stets einer und nur einer der drei Fälle A, B, C besteht.

Definition. Im Falle A. ist $H, J \approx H', J'$. In den Fällen B und C schreiben wir $H, J \ll H', J'$ bzw. $H, J \gg H', J'$.

Damit haben wir ein höchst wichtiges Resultat der „naiven" Mengenlehre gewonnen: den Satz „von der Vergleichbarkeit aller wohlgeordneten Mengen in bezug auf ihren Ordnungstypus". Es ist aber wesentlich und für unser System charakteristisch, daß dieses Resultat nicht für alle wohlgeordneten Bereiche überhaupt, sondern bloß für die zählbaren unter ihnen gewonnen wurde.

Trotzdem ist die erste Formulierung in jedem der Fälle A, B, C auch für nicht zählbare wohlgeordnete Bereiche sinnvoll, da dort von Ordnungszahlen keine Rede ist. Es scheint uns aber unwahrscheinlich, daß ein Beweis der Vergleichbarkeit (d. h. dessen, daß stets einer und nur einer der drei Fälle A, B, C besteht) unabhängig von den Prämissen $\boldsymbol{Z}H, J$, $\boldsymbol{Z}H', J'$ gelingen sollte: jedenfalls versagen alle bekannten Methoden an diesem Punkte[27]).

Indessen ist diese Lücke praktisch belanglos: denn alle wohlgeordneten Mengen sind ja nach Satz 41 zählbar und beim „Vergleichen der wohlgeordneten Bereiche in bezug auf ihre Mächtigkeit" fällt die ganze Schwierigkeit fort (vgl. Kap. VII, § 3).

Wir beweisen noch den folgenden Satz:

Satz 51. *H, J, H' seien Bereiche, $J\,\boldsymbol{WO}\,H$ und $\boldsymbol{Z}\,H, J$. Ferner sei $H' \lesssim H$. Dann ist H', $\left(\frac{H}{H}\right) J \lessapprox H, J$. Wenn $H' = \mathfrak{Abs}(x; H, J)$, $x \varepsilon H$, ist, so gilt sogar stets das $\ll$-Zeichen.*

Beweis. Die zweite Hälfte folgt ohne weiteres aus der Definition, zum Beweise der ersten muß noch der Satz 50 berücksichtigt werden.

---

[27]) Es gibt bekanntlich in der „naiven" Mengenlehre noch eine Methode, um die Vergleichbarkeit der wohlgeordneten Ordnungstypen zu beweisen, die von den Ordnungszahlen keinen Gebrauch macht [G. Cantor, Beitrag zur Begründung der Theorie der transfiniten Mengenlehre II, Math. Annalen **49** (1897), S. 207–215]. Sie kann in unser System übertragen werden, aber interessanterweise nur für solche H, J, für die alle $\mathfrak{Abs}(x; H, J)$, $x \varepsilon H$, Mengen sind, d. h. für genau diejenigen, die zählbar sind.

Über die Eindeutigkeit der ähnlichen Abbildungen gilt der folgende Satz:

Satz 52. *H, J seien Bereiche, $J \mathcal{W} \mathcal{O} H$ und $\mathfrak{Z} H, J$. Die Relationen*

$$H, J \approx P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma, \quad P \mathfrak{O} \mathfrak{Z}$$

bestehen dann und nur dann, wenn

$$P = \mathfrak{O} \mathfrak{Z} (H, J)$$

ist.

Beweis. Daß für dieses $P = \mathfrak{O} \mathfrak{Z} (H, J)$ die genannte Relation gilt, wissen wir aus Satz 40. Wir müssen also nur noch die Umkehrung beweisen.

Es sei $H, J \approx P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma, \; P \mathfrak{O} \mathfrak{Z}$. Dann ist $P = \mathfrak{O} \mathfrak{Z} (H', J')$, $J' \mathcal{W} \mathcal{O} H'$, $\mathfrak{Z} H', J'$. Wegen $H', J' \approx P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma$ (Satz 40) ist $H, J \approx H', J'$, also $\mathfrak{O} \mathfrak{Z} (H, J) = \mathfrak{O} \mathfrak{Z} (H', J') = P$, wie behauptet wurde.

Satz 53. *Für $P \mathfrak{O} \mathfrak{Z}$, $Q \mathfrak{O} \mathfrak{Z}$ ist $P = Q$ mit $P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma \approx Q, \left(\frac{Q}{\Omega^*}\right) \Sigma$ gleichbedeutend.*

Beweis. Nach Satz 52 gilt $P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma \approx Q, \left(\frac{Q}{\Omega^*}\right) \Sigma$ für ein einziges $Q \mathfrak{O} \mathfrak{Z}$. Da P selbst ein solches ist, gilt es für $Q = P$ allein.

3. Die Wohlordnung des Bereiches aller I-Dinge.

In diesem und dem nächsten Paragraphen wird der Wohlordnungssatz bewiesen werden, und zwar auf einem Wege, der von der klassischen Methode Zermelos (vgl. Fußnote [12]) wesentlich abweicht. Man darf natürlich nicht etwa glauben, daß damit ein im Sinne der „naiven" Mengenlehre neuer, vom „Auswahlprinzip" (das wir nun auch zu beweisen in der Lage sind) unabhängiger Beweis des Wohlordnungssatzes gewonnen ist. Diese Methode ist nämlich nur in unserem System gangbar und beruht im wesentlichen auf dem Axiom IV. 2.

Satz 54. *Es gibt einen Bereich W, so daß $W \mathcal{W} \mathcal{O} \Omega$ ist; es gilt sogar: $\Omega, W \approx \Omega^{**}, \left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right) \Sigma$. (Also ist $\mathfrak{Z} \Omega, W$.)*

Beweis. Nach Satz 47 ist der Bereich Ω^{**} ein Bereich, aber keine Menge, also ein II-Ding, aber kein I II-Ding. Nach IV. 2. gibt es also ein II-Ding f, so daß für jedes x ein y mit $y \varepsilon \Omega^{**}$, $[f, y] = x$ existiert.

Wir können diese Eigenschaft: „$y \varepsilon \Omega^{**}$ und $x = [f, y]$" auf die Form $[g, y] \neq \Lambda$ bringen (g von x abhängig, aber von y unabhängig) und dann $H = \mathfrak{B}(g)$ setzen. Dann ist H ein Bereich, dessen Elemente alle $y \varepsilon \Omega^{**}$ mit $[f, y] = x$ sind. Also ist $H \lesssim \Omega^{**}$, und da es ein y mit den genannten Eigenschaften gibt, so ist $H \neq 0$.

Wegen $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^{*}}\right) \Sigma \; \mathfrak{WO}\, \Omega^{**}$ hat also das nach $\left(\frac{H}{\Omega^{**}}\right)\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^{*}}\right)\Sigma$ geordnete H, d. h. das nach $\left(\frac{H}{\Omega^{*}}\right)\Sigma$ geordnete H, ein erstes Element u. Es ist $u \varepsilon H$, d. h. $u \varepsilon \Omega^{**}$, $[f, u] = x$; und aus $y \varepsilon \Omega^{**}$, $[f, y] = x$, d. h. $y \varepsilon H$, folgt $u \dot{\leqq} y \ldots \left(\frac{H}{\Omega^{*}}\right)\Sigma$, $u \dot{\leqq} y \ldots (\Sigma)$, $u \lesssim y$.

Also: es gibt ein u, welches die Eigenschaft: „$u \varepsilon \Omega^{**}$, $[f, u] = x$, und für jedes y folgt aus $y \varepsilon \Omega^{**}$, $[f, y] = x$, daß $u \lesssim y$ ist," besitzt, es ist aber klar, daß auch nur ein u diese Eigenschaft besitzen kann. (Wären u' und u'' so, so müßte $u' \lesssim u''$, $u'' \lesssim u'$ sein, also wäre $u' \sim u''$, $u' = u''$.) Wir können nun diese Eigenschaft unschwer auf die Form $[h, \langle x, u\rangle] \neq A$ bringen (h unabhängig von x und u) und III. 3. anwenden: dann ist dieses einzige u gleich $[j, x]$ (j unabhängig von x).

Das so gewonnene II-Ding j hat die folgenden Eigenschaften: es ist für jedes I-Ding x $[j, x] \varepsilon \Omega^{**}$, $[f, [j, x]] = x$. Wenn wir also $|[j, \Omega]| = \mathfrak{K}$ setzen, so ist $\mathfrak{K} \lesssim \Omega^{**}$ und $|[f, \mathfrak{K}]| = \Omega$. Ferner folgt aus $u \varepsilon \mathfrak{K}$, $v \varepsilon \mathfrak{K}$, $u \neq v$ $[f, u] \neq [f, v]$, denn es ist $u = [j, x]$, $v = [j, y]$, also $[f, u] = [f, [j, x]] = x$, $[f, v] = [f, [j, y]] = y$. D. h. $u = [j, [f, u]]$, $v = [j, [f, v]]$. Wegen $u \neq v$ ist also $[f, u] \neq [f, v]$.

Wir können also $W = [f]\left(\frac{\mathfrak{K}}{\Omega^{*}}\right)\Sigma$ setzen, dann ist $\mathfrak{K}, \left(\frac{\mathfrak{K}}{\Omega^{*}}\right)\Sigma \approx \Omega, W$. Nun ist das nach $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^{*}}\right)\Sigma$ geordnete Ω^{**} wohlgeordnet und zählbar, nach Satz 29 und Satz 50 gilt also wegen $\mathfrak{K} \lesssim \Omega^{**}$ dasselbe für das nach $\left(\frac{\mathfrak{K}}{\Omega^{**}}\right)\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^{*}}\right)\Sigma$ geordnete $\mathfrak{K}$, d. h. das nach $\left(\frac{\mathfrak{K}}{\Omega^{*}}\right)\Sigma$ geordnete $\mathfrak{K}$. Und $\mathfrak{K}, \left(\frac{\mathfrak{K}}{\Omega^{*}}\right)\Sigma \approx \Omega, W$ hat nach Satz 29 und Satz 48 a zur Folge, daß auch das nach W geordnete Ω wohlgeordnet und zählbar ist.

Wir können also $\mathfrak{OZ}(\Omega, W) = P$ bilden. Da $\Omega, W \approx P$, $\left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right)\Sigma$ ist, und Ω keine Menge ist, ist auch P keine Menge. Und da $P\,\mathfrak{OZ}$ ist und dabei P keine Menge ist, so muß nach Satz 47 $P = \Omega^{**}$ sein. Damit ist die Behauptung restlos bewiesen.

4. Die Wohlordnung beliebiger Bereiche.

Der Satz 54 ist eigentlich schon der Wohlordnungssatz, wir wollen ihn aber noch der Form nach etwas allgemeiner gewinnen. Auch das „Auswahlprinzip" werden wir leicht aus diesem Satze herleiten können.

Satz 55. *H sei ein Bereich. Es gibt dann stets einen Bereich J, so daß $J\,\mathfrak{WO}\,H$, $\mathfrak{Z}\,H, J$ ist.*

Wenn H keine Menge ist, so ist für $J \mathfrak{WO} H$, $Z H, J$ stets $OZ(H, J) = \Omega^{**}$. Wenn H eine Menge ist, so ist für $J \mathfrak{WO} H$ stets $Z H, J$ und $OZ(H, J) < \Omega^{**}$.

Beweis. Wir wählen W nach Satz 54, so daß $\Omega, W \approx \Omega^{**}, \left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right) \Sigma$, und setzen $J = \left(\frac{H}{\Omega}\right) W$. Da $W \mathfrak{WO} \Omega$, $Z \Omega, W$ ist, so ist nach Satz 29 und Satz 50 auch $J \mathfrak{WO} H$, $Z H, J$.

Damit ist der erste Teil unserer Behauptung bewiesen.

Wenn H keine Menge ist, so ist für $J \mathfrak{WO} H$, $Z H, J$ wegen $H, J \approx OZ(H, J), \left(\frac{OZ(H, J)}{\Omega^*}\right) \Sigma$ auch $OZ(H, J)$ keine Menge. Also muß $OZ(H, J) = \Omega^{**}$ sein.

Ist hingegen H eine Menge, so ist für jedes $J \mathfrak{WO} H$ auch $Z H, J$ (vgl. die Bemerkung bei Satz 41). Wegen $H, J \approx OZ(H, J), \left(\frac{OZ(H, J)}{\Omega^*}\right) \Sigma$ ist auch $OZ(H, J)$ eine Menge; folglich ist $OZ(H, J) \varepsilon \Omega^{**}$, $OZ(H, J) < \Omega^{**}$.

Man sieht übrigens leicht ein, daß es für solche H, die keine Mengen sind, stets Wohlordnungen J gibt, für die nicht $Z H, J$ ist (hierzu reicht ja nach Satz 41 die Existenz eines $\mathfrak{Abs}(x; H, J)$, $x \varepsilon H$, das nicht Menge ist, aus), wir gehen aber darauf hier nicht näher ein.

Nun werden wir zwei verschiedene Fassungen des Auswahlprinzips beweisen, deren erste mit dem Begriff des Hilbertschen „τ“ eine gewisse Analogie zeigt[28]), während die zweite sich mehr an die ursprünglich Zermelosche Fassung desselben anlehnt.

Satz 56. *φ sei ein II-Ding. Es gibt ein II-Ding ψ, derart, daß für jedes x, zu dem ein y mit $[\varphi, \langle x, y \rangle] \neq \Lambda$ existiert, $[\psi, x]$ einem solchen y gleich ist*[29]).

Beweis. Wir wählen W nach Satz 54: $W \mathfrak{WO} \Omega$. Betrachten wir ein x, zu welchem es ein y gibt, so daß $[\varphi, \langle x, y \rangle] \neq \Lambda$ ist. Wir bringen $[\varphi, \langle x, y \rangle] \neq \Lambda$ auf die Form $[f, y] \neq \Lambda$ (f von x abhängig, von y unabhängig) und setzen $H = \mathfrak{B}(f)$. H ist ein Bereich, seine Elemente sind

---

[28]) Hilbert, Neubegründung der Mathematik I., Abhandlungen a. d. Math. Sem. d. Hamburgischen Universität 1, 1922. Ferner: Die logischen Grundlagen der Mathematik, Math. Annalen 92 (1924).

[29]) Satz 57 kann als eine Verschärfung des Axioms III. 3. angesehen werden: es ermöglicht die Umkehrung von Relationen, die nur lösbar, aber nicht eindeutig lösbar sind. In unserer Axiomatik wäre die einfachste direkte Einführung des Auswahlprinzips die gewesen, statt III. 3. den Satz 56 zu verlangen. Damit wäre eine weitgehende Analogie mit Hilberts Formulierung des Auswahlprinzips erreicht. (Vgl. Fußnote [28]).) Da jedoch das Auswahlprinzip aus IV. 2. allein folgt, war dies überflüssig.

alle y mit $[\varphi, \langle x, y\rangle] \neq A$. Also ist $H \lesssim \Omega$, $H \neq 0$. Wegen $W\mathcal{WO}H$ hat also das nach $\left(\frac{H}{\Omega}\right)W$ geordnete H ein erstes Element. Dasselbe sei u.

u besitzt die folgende Eigenschaft: „$[\varphi, \langle x, u\rangle] \neq A$, und für jedes y folgt aus $[\varphi, \langle x, y\rangle] \neq A$ $u \dot{\leqq} y \ldots (W)$." Es ist außerdem klar, daß u allein diese Eigenschaft besitzt. (Besäßen u' und u'' dieselbe, so müßte $u' \dot{\leqq} u'' \ldots (W)$, $u'' \dot{\leqq} u' \ldots (W)$, also $u' = u''$ sein.)

Wir bringen diese Eigenschaft auf die Form $[g, \langle x, u\rangle] \neq A$ (g von x, u unabhängig), dann haben wir das folgende Resultat erhalten: Wenn es ein y mit $[\varphi, \langle x, y\rangle] \neq A$ gibt, so gibt es ein und nur ein u mit $[g, \langle x, u\rangle] \neq A$, und für dieses u ist auch $[\varphi, \langle x, u\rangle] \neq A$. Auf $[g, \langle x, u\rangle] \neq A$ können wir also III. 3. anwenden, und damit haben wir das gewünschte $[\psi, x]$ hergestellt.

Satz 57. *Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen $H \neq 0$ $[\varphi, H] \varepsilon H$ ist.*

Beweis. Wir bringen $x \varepsilon H$, d. h. $[H, x] \neq A$, auf die Form $[f, \langle H, x\rangle] \neq A$, und wenden dann den Satz 56 an; daraus folgt die Behauptung.

Nach Satz 55 ist für jede Menge $\mathcal{WO}(H) \neq 0$. Wegen $\mathcal{UO}(H) \gtrsim \mathcal{VO}(H) \gtrsim \mathcal{WO}(H)$ ist also auch $\mathcal{VO}(H) \neq 0$, $\mathcal{UO}(H) \neq 0$. ($\mathcal{UO}(H) \neq 0$, und nur dieses, ist übrigens trivial, denn es ist offenbar für jedes H $0\,\mathcal{UO}\,H$, also $0 \varepsilon \mathcal{UO}(H)$.)

VII. Die Äquivalenz und die Kardinalzahlen.

1. Die Äquivalenz.

Wir definieren die Äquivalenz auf die in der „naiven" Mengenlehre übliche Art:

Definition. H, H' seien zwei Bereiche. Wir sagen: H ist mit H' äquivalent, in Zeichen: $H \approx H'$, wenn es ein II-Ding φ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ folgt $[\varphi, u] \neq [\varphi, v]$. Es ist $H' = |[\varphi, H]|$. Diese Eigenschaft von φ drücken wir so aus: $H \approx H' \ldots (\varphi)$.[30])

Wir stellen zunächst fest:

Satz 58a. *H, H' seien Bereiche; wenn $H \approx H'$ ist und H eine Menge ist, so ist auch H' eine Menge. Ferner kann ein III-Ding φ immer so gewählt werden, daß $H \approx H' \ldots (\varphi)$ ist.*

[30]) Diese Definition der Äquivalenz ist wesentlich einfacher als die bei Zermelo, wo die Äquivalenz zuerst für elementfremde Mengen definiert wird, und erst dann allgemein.

Satz 58b. *Es gibt ein II-Ding ψ, so daß für alle Mengen H, H' die Relationen $H \approxeq H'$ und $[\psi, \langle H, H' \rangle] \neq A$ gleichbedeutend sind.*

Es gibt ein II-Ding χ, so daß für alle Mengen H, H' und III-Dinge φ die Relationen $H \approxeq H' \ldots (\varphi)$ und $[\chi, \langle \langle H, H' \rangle, \varphi \rangle] \neq A$ gleichbedeutend sind.

Beweis. (Für 58a.) H ist eine Menge, weil es gleich $|[\varphi, H]|$ ist. Wenn $H' \approxeq H \ldots (\varphi)$ ist, so ist, wie man sofort sieht, auch $H' \approxeq H \ldots \left(\frac{\varphi \mid 0}{H}\right)$, und wegen $\left(\frac{\varphi \mid 0}{H}\right) \lesssim H$ ist $\left(\frac{\varphi \mid 0}{H}\right)$ in der Tat ein III-Ding.

(Für 58b.) Um den zweiten Teil zu beweisen, müssen wir die für $H' \approxeq H \ldots (\varphi)$ definitorischen Bedingungen auf die Form $[\chi, \langle \langle H, H' \rangle, \varphi \rangle] \neq A$ bringen; es ist klar, wie das zu geschehen hat.

Der erste Teil aber folgt hieraus mit Hilfe der folgenden Bemerkung: $H \approxeq H'$ bedeutet, daß es ein II-Ding φ mit $H \approxeq H' \ldots (\varphi)$ gibt, also nach Satz 58a, daß es ein III-Ding φ mit $H \approxeq H' \ldots (\varphi)$, d. h. $[\chi, \langle \langle H, H' \rangle, \varphi \rangle] \neq A$ gibt. Und dies ist unschwer auf die Form $[\psi, \langle H, H' \rangle] \neq A$ zu bringen.

Satz 59. *H, H', H'' seien Bereiche, dann bestehen die folgenden Relationen: Es ist $H \approxeq H$. Aus $H \approxeq H'$ folgt $H' \approxeq H$. Aus $H \approxeq H'$ und $H' \approxeq H''$ folgt $H \approxeq H''$.*

Beweis. Die erforderlichen φ sind hier ganz analog zu wählen wie beim Beweise des entsprechenden Satzes 22 für die Ähnlichkeit. Ein näheres Eingehen hierauf erübrigt sich.

Weitere elementare Sätze über die Äquivalenz sind die folgenden:

Satz 60. *H, H' seien Bereiche, φ ein II-Ding, ferner seien K, K' Bereiche, $K \lesssim H$, $K' \lesssim H'$, und $K' = |[\varphi, K]|$. Wenn $H \approxeq H' \ldots (\varphi)$ ist, so ist auch $K \approxeq K' \ldots (\varphi)$.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Definition der Äquivalenz.

Satz 61. *H, J, H', J' seien Bereiche, $J \mathfrak{U} \mathfrak{O} H$, $J' \mathfrak{U} \mathfrak{O} H'$. Wenn $H, J \approx H', J'$ ist, so ist auch $H \approxeq H'$; ist insbesondere $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$, so ist auch $H \approxeq H' \ldots (\varphi)$.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus den Definitionen der Ähnlichkeit und der Äquivalenz.

Ebenso wie bei der Ähnlichkeit (vgl. die Fälle A, B, C im Kap. VI § 2) liegt auch bei der Äquivalenz die Frage nach der Vergleichbarkeit nahe. Um dieselbe zu erledigen, wollen wir zuerst den Begriff der Kardinalzahlen (bzw. Anfangszahlen, Alephs, Mächtigkeiten) einführen.

2. Die Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, ist es wohl in diesem Paragraph erwünscht, eine Bemerkung über die anzuwendende Terminologie vorauszuschicken.

In der „naiven" Cantorschen Mengenlehre wird zuerst der Begriff der „Mächtigkeit" definiert als das einer Klasse untereinander äquivalenter Mengen gemeinsame Merkmal; sodann der Begriff des „Alephs" oder der „Kardinalzahl" als Mächtigkeit einer wohlordenbaren Menge; und schließlich der der „Anfangszahl" als die kleinste einem gegebenen Aleph äquivalente Ordnungszahl.

Da in unserem Systeme der Wohlordnungssatz bewiesen ist (Satz 55), so fallen die Begriffe „Mächtigkeit" und „Aleph" bzw. „Kardinalzahl" jedenfalls zusammen (wenn sie einmal irgendwie definiert sind), und die unter diesen Begriff fallenden Dinge sind den „Anfangszahlen" eineindeutig zugeordnet. In Anbetracht dieser Lage werden wir bei der Definition der genannten Begriffe noch um einen Schritt weitergehen und alle vier kurzweg identifizieren. Wir definieren nämlich:

Definition. Wir nennen eine Ordnungszahl P eine Kardinalzahl (oder: Anfangszahl, Aleph, Mächtigkeit), in Zeichen: $P\,\mathfrak{KZ}$, wenn für kein $Q\,\mathfrak{OZ}$, $Q < P$, $Q \approx P$ ist.

Satz 62a. *Ω^{**} ist eine Kardinalzahl.*

Satz 62b. *Es gibt einen und nur einen Bereich $\mathfrak{H}$, für den $P \varepsilon \mathfrak{H}$ mit $P\,\mathfrak{KZ}$, $P \neq \Omega^{**}$ gleichbedeutend ist. Dieses $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir mit Γ.*

Beweis. (Für 62a.) Es ist $\Omega^{**}\,\mathfrak{OZ}$. Wenn $P\,\mathfrak{OZ}$, $P < \Omega^{**}$ ist, so ist P eine Menge, während Ω^{**} keine Menge ist, folglich kann nicht $P \approx \Omega^{**}$ sein. Also ist $\Omega^{**}\,\mathfrak{KZ}$.

(Für 62b.) Wenn $P\,\mathfrak{KZ}$, $P \neq \Omega^{**}$ ist, so ist $P\,\mathfrak{OZ}$ und P eine Menge, also $P \varepsilon \Omega^{**}$. $Q\,\mathfrak{OZ}$, $Q < P$ bedeutet $Q \varepsilon P$. Folglich bedeutet $P\,\mathfrak{KZ}$, $P \neq \Omega^{**}$: „$P \varepsilon \Omega^{**}$, und es gibt kein Q mit $Q \varepsilon P$, $Q \approx P$". Diese Bedingung können wir unschwer auf die Form $[f, P] \neq A$ bringen; $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}(f)$ ist dann ein Bereich mit den gewünschten Eigenschaften.

Daß es nur einen solchen Bereich gibt, folgt aus I. 4.

Satz 63. *Wenn $P\,\mathfrak{KZ}$, $Q\,\mathfrak{KZ}$ ist, so ist $P = Q$ mit $P \approx Q$ gleichbedeutend.*

Beweis. Aus $P = Q$ folgt offenbar $P \approx Q$. Ist umgekehrt $P \approx Q$, so ist jedenfalls $P = Q$ oder $P < Q$ oder $P > Q$. Für $P < Q$ wäre: $P\,\mathfrak{OZ}$, $P < Q$ und $P \approx Q$, entgegen $Q\,\mathfrak{KZ}$; für $P > Q$ hingegen: $Q\,\mathfrak{OZ}$, $Q < P$ und $Q \approx P$, entgegen $P\,\mathfrak{KZ}$. Also ist $P = Q$.

Satz 64a. *H sei ein Bereich. Es gibt eine und nur eine Kardinal-*

zahl P, für die $P \approx H$ ist. Dieses P nennen wir die Kardinalzahl (oder Mächtigkeit oder Aleph oder Anfangszahl) von H, und bezeichnen es mit $\boldsymbol{KZ}(H)$.

Satz 64b. *H ist dann und nur dann keine Menge, wenn $\boldsymbol{KZ}(H) = \Omega^{**}$ ist.*

Satz 64c. *Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H*

$$\boldsymbol{KZ}(H) = [\varphi, H]$$

ist.

Beweis. (Für 64a.) Die Eindeutigkeit folgt offenbar aus Satz 63. Wir müssen also nur noch die Existenz beweisen.

Nach Satz 55 gibt es ein J, so daß $J \boldsymbol{WO} H$, $\boldsymbol{Z} H, J$ ist. Wenn $P = \boldsymbol{OZ}(H, J)$ ist, so ist demnach $H, J \approx P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$, also $H \approx P$. Wenn $P = \Omega^{**}$ ist, so sind wir schon fertig: denn nach Satz 62a ist ja $\Omega^{**}\, \boldsymbol{KZ}$.

Andernfalls sei $P \neq \Omega^{**}$. Dann ist P, also auch H eine Menge. Die Eigenschaft: „$P \varepsilon \Omega^{**}$ und $P \approx H$“ können wir leicht auf die Form $[f, P] \neq A$ (f abhängig von H, aber unabhängig von P) bringen, und dann $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}(f)$ setzen. $\mathfrak{H}$ ist ein Bereich, seine Elemente sind alle P mit $P \varepsilon \Omega^{**}$, $P \approx H$. Es ist offenbar $\mathfrak{H} \lesssim \Omega^{**}$, und nach dem soeben Gesagten ist ferner $\mathfrak{H} \neq 0$.

Wegen $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right)\Sigma\, \boldsymbol{WO}\, \Omega^{**}$ hat also das nach $\left(\frac{\mathfrak{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete $\mathfrak{H}$ ein erstes Element, d. h. es gibt ein $P \varepsilon \Omega^{**}$ mit $P \approx H$, derart, daß für jedes $Q \varepsilon \Omega^{**}$ mit $Q \approx H$

$$P \dot{\leqq} Q \ldots \left(\frac{\mathfrak{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma,$$

also

$$P \dot{\leqq} Q \ldots (\Sigma), \quad P \lesssim Q$$

ist.

Es ist $P\, \boldsymbol{OZ}$ und $P \approx H$. Wenn $Q\, \boldsymbol{OZ}$, $Q < P$ und $Q \approx P$ wäre, so wäre jedenfalls $Q \varepsilon \Omega^{**}$ und $Q \approx P$, $P \approx H$, also $Q \approx H$, d. h. $Q \varepsilon \mathfrak{H}$. Also müßte $P \lesssim Q$, $Q \gtrsim P$ sein, entgegen $Q < P$. Damit ist $P\, \boldsymbol{KZ}$ bewiesen und folglich auch unsere Behauptung.

(Für 64b.) Wegen $H \approx \boldsymbol{KZ}(H)$ ist H dann und nur dann keine Menge, wenn $\boldsymbol{KZ}(H)$ keine ist. Dies ist aber offenbar mit $\boldsymbol{KZ}(H) = \Omega^{**}$ gleichbedeutend.

(Für 64c.) $\boldsymbol{KZ}(H) = P$ hat die folgende charakteristische Eigenschaft: „$P\, \boldsymbol{KZ}$ und $P \approx H$“. Wir können dies ohne weiteres in $[g, \langle H, P\rangle] \neq A$ (g von H und P unabhängig) umformen, und dann III. 3. anwenden: es wird dann $P = [\varphi, H]$.

Nach diesen Sätzen allgemeiner Natur beweisen wir noch zwei Sätze, die den Verlauf der Reihe der Kardinalzahlen (d. h. den Bereich Γ) etwas näher umschreiben.

Satz 65. *Γ ist keine Menge*[31]).

Beweis. Es sei $P \varepsilon \Omega^{**}$, sonst aber P beliebig. Da P eine Menge ist, ist auch $Q = \boldsymbol{KZ}(P)$ eine Menge, also $Q \varepsilon \Gamma$. Dabei ist $P \approx Q$, d. h. $P \approx Q \ldots (f)$. Wenn wir also $J = [f] \left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma$ setzen, so wird $P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma \approx Q, J$, also nach Satz 51 $P = \boldsymbol{OZ}(Q, J)$. Wegen $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma \, \mathcal{WO} \, P$ ist dabei $J \mathcal{WO} Q$, d. h. $J \varepsilon \mathcal{WO}(Q)$.

Wir haben also bewiesen: Zu jedem $P \varepsilon \Omega^{**}$ gibt es ein $Q \varepsilon \Gamma$ und ein $J \varepsilon \mathcal{WO}(\Gamma)$, so daß $P = \boldsymbol{OZ}(Q, J)$ ist.

Nun ist $\mathcal{WO}(Q)$ eine Menge und gleich $[f, Q]$ (f fest), also ist $J \varepsilon \mathcal{WO}(Q)$, $\mathcal{WO}(Q) \varepsilon |[f, \Gamma]|$, das heißt $J \varepsilon S(|[f, \Gamma]|)$. Folglich ist $\langle Q, J \rangle \varepsilon |\langle \Gamma, S(|[f, \Gamma]|) \rangle|$. Ferner ist $\boldsymbol{OZ}(Q, J) = [g, \langle Q, J \rangle]$ (g fest), so daß $P \varepsilon |[g, |\langle \Gamma, S(|[f, \Gamma]|) \rangle|]|$ ist.

Dies gilt für jedes P von Ω^{**}, also ist $\Omega^{**} \lesssim |[g, |\langle \Gamma, S(|[f, \Gamma]|) \rangle|]|$. Wäre nun Γ eine Menge, so wären auch $|[f, \Gamma]|$, $S(|[f, \Gamma]|)$, $|\langle \Gamma, S(|[f, \Gamma]|) \rangle|$, $|[g, |\langle \Gamma, S(|[f, \Gamma]|) \rangle|]|$ Mengen und demnach auch Ω^{**} eine Menge, was sicher falsch ist.

Satz 66. *Das nach $\left(\frac{\Gamma}{\Omega^*}\right) \Sigma$ geordnete Γ ist wohlgeordnet und zählbar und seine Ordnungszahl ist Ω^{**}.*

Beweis. Das nach $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right) \Sigma$ geordnete Ω^{**} ist wohlgeordnet und zählbar, nach Satz 29 und Satz 50 muß wegen $\Gamma \lesssim \Omega^{**}$ also auch das nach $\left(\frac{\Gamma}{\Omega^*}\right) \Sigma$ geordnete Γ wohlgeordnet und zählbar sein. Da Γ keine Menge ist, so ist auch $\boldsymbol{OZ}\left(\Gamma, \left(\frac{\Gamma}{\Omega^*}\right) \Sigma\right)$ keine, also muß es gleich Ω^{**} sein.

3. Die Vergleichbarkeit.

Satz 67. *H, H' seien zwei Bereiche. $H \approx H'$ ist mit $\boldsymbol{KZ}(H) = \boldsymbol{KZ}(H')$ gleichbedeutend.*

---

[31]) Wir könnten in diesem Zusammenhange leicht den Satz beweisen, wonach die Kardinalzahl von $\mathcal{P}(H)$ für jede Menge H größer ist als die von H. Wir sehen davon ab, weil der Satz 65 ausreicht um zu beweisen, daß es unter den Kardinalzahlen von Mengen, d. h. $\neq \Omega^{**}$, keine größte gibt: In der Tat, wenn etwa P die größte Kardinalzahl von Mengen wäre, so wären alle Kardinalzahlen von Mengen $\lesssim P$, also Elemente von $\mathcal{P}(P)$; folglich wäre $\Gamma \lesssim \mathcal{P}(P)$, was unmöglich ist, da ja $\mathcal{P}(P)$ eine Menge ist, Γ aber keine.

Beweis. Wegen $H \approx \boldsymbol{KZ}(H)$, $H' \approx \boldsymbol{KZ}(H')$ folgt aus $\boldsymbol{KZ}(H) = \boldsymbol{KZ}(H')$ $H \approx H'$.

Aus $H \approx H'$ folgt hingegen $\boldsymbol{KZ}(H) \approx H$, $H \approx H'$, $H' \approx \boldsymbol{KZ}(H')$, d. h. $\boldsymbol{KZ}(H) \approx \boldsymbol{KZ}(H')$ und nach Satz 63 also $\boldsymbol{KZ}(H) = \boldsymbol{KZ}(H')$.

Satz 68. *H, H' seien zwei Bereiche und φ ein II-Ding. Wenn $H \lesssim |[\varphi, H']|$ ist, so ist $\boldsymbol{KZ}(H) \lesssim \boldsymbol{KZ}(H')$.*[32])

Beweis. Wir können die Relation „$y \varepsilon H', [\varphi, y] = x$“ auf die Form $[f, \langle x, y\rangle] \neq A$ (f von x und y unabhängig) bringen. Für jedes $x \varepsilon H$ existiert (wegen $H \lesssim |[\varphi, H']|$) ein $y \varepsilon H'$ mit $[f, \langle x, y\rangle] \neq A$, wir können also den Satz 56 anwenden und $[g, x]$ bilden. Wir haben also: aus $x \varepsilon H$ folgt $[g, x] \varepsilon H'$ und $[f, [g, x]] = x$.

Aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ folgt also: $[f, [g, u]] \neq [f, [g, v]]$, $[g, u] \neq [g, v]$. Wenn wir $H^* = |[g, H]|$ setzen, so ist nach alledem $H \approx H^*$ und $H^* \lesssim H'$.

Hieraus folgt erstens $\boldsymbol{KZ}(H) = \boldsymbol{KZ}(H^*)$. Es ist also sicher $\boldsymbol{KZ}(H) \lesssim \boldsymbol{KZ}(H')$, wenn $\boldsymbol{KZ}(H^* \lesssim \boldsymbol{KZ}(H')$ ist. Wir müssen demnach zeigen: aus $H^* \lesssim H'$ folgt $\boldsymbol{KZ}(H^*) \lesssim \boldsymbol{KZ}(H')$.

Wir setzen $\boldsymbol{KZ}(H') = P$. Da $H' \approx P$, $P \approx H' \ldots (f)$ ist, können wir $J' = [h]\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ setzen. Dann ist $P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma \approx H', J' \ldots (h)$, also $P = \boldsymbol{OZ}(H', J')$. Nach Satz 50 ist also, wenn wir $Q = \boldsymbol{OZ}\left(H^*, \left(\frac{H^*}{H'}\right)J'\right)$ setzen, $Q \lesssim P$.

Ferner ist $H^*, \left(\frac{H^*}{H'}\right)J' \approx Q, \left(\frac{Q}{\Omega^*}\right)\Sigma$, also $H^* \approx Q$, also $Q \approx H^*$, $H^* \approx \boldsymbol{KZ}(H^*)$, d. h. $Q \approx \boldsymbol{KZ}(H^*)$. Wegen $Q\,\boldsymbol{OZ}, \boldsymbol{KZ}(H^*)\,\boldsymbol{KZ}$ muß folglich $Q \gtrsim \boldsymbol{KZ}(H^*)$ sein.

Zusammenfassend gilt folglich: $\boldsymbol{KZ}(H^*) \lesssim Q \lesssim P = \boldsymbol{KZ}(H')$, $\boldsymbol{KZ}(H^*) \lesssim \boldsymbol{KZ}(H')$. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Wir beweisen noch die Umkehrung des Satzes 68.

Satz 69. *H, H' seien zwei Bereiche. Wenn $\boldsymbol{KZ}(H) \lesssim \boldsymbol{KZ}(H')$ ist, so gibt es ein II-Ding φ, so daß $H \lesssim |[\varphi, H']|$ ist.*

Beweis. Es ist $H' \approx \boldsymbol{KZ}(H')$ $\boldsymbol{KZ}(H) \approx H$; wir wählen also die II-Dinge f, g so, daß $H' \approx \boldsymbol{KZ}(H') \ldots (f)$, $\boldsymbol{KZ}(H) \approx H \ldots (g)$ gilt.

---

[32]) Im wesentlichen ist es dieser Satz, der (in Verbindung mit dem fast trivialen Satze 67) die Umgehung des Bernsteinschen „Äquivalenzsatzes“ ermöglicht. Es kommt dabei im wesentlichen auf die folgende Teilbehauptung desselben an: Wenn $H^* \lesssim H'$ ist, so ist auch $\boldsymbol{KZ}(H^*) \lesssim \boldsymbol{KZ}(H')$. Diese fußt ihrerseits auf dem Satze 50 über Ordnungszahlen. — Unsere, auf den Ordnungszahlenbegriff gegründete, Überlegungsweise schaltet die spezifisch ordnungszahlen-freien Gedankengänge der „naiven“ Mengenlehre (beim Beweise der Vergleichbarkeit wohlgeordneter Mengen, des Wohlordnungssatzes, des Äquivalenzsatzes) aus.

Dann ist $\boldsymbol{KZ}(H') = |[f, H']|$, $H = |[g, \boldsymbol{KZ}(H)]|$ also $H \lesssim |[f, |[g, H']|]|$. Wenn wir also φ nach $[\varphi, x] = [f, [g, x]]$ wählen, so wird $H \lesssim |[\varphi, H']|$, wie gewünscht wurde.

Nun können wir, ebenso wie bei der Ähnlichkeit (Kap. VI, § 2) feststellen, daß zwei beliebige Bereiche in bezug auf ihre Äquivalenz-Eigenschaften nur dreierlei Charakter zeigen können.

H, H' seien zwei Bereiche. Mit Hilfe der Sätze 68 und 69 sieht man sofort, daß unter den untenstehenden Aussagen die bei A stehenden, die bei B stehenden und die bei C stehenden untereinander gleichbedeutend sind[33]).

A. Es gibt ein II-Ding φ mit $H \lesssim |[\varphi, H']|$, und es gibt ein II-Ding ψ mit $H' \lesssim |[\psi, H]|$. Es ist $\boldsymbol{KZ}(H) = \boldsymbol{KZ}(H')$.

B. Es gibt ein II-Ding φ mit $H \lesssim |[\varphi, H']|$, und es gibt kein II-Ding ψ mit $H' \lesssim |[\psi, H]|$. Es ist $\boldsymbol{KZ}(H) < \boldsymbol{KZ}(H')$.

C. Es gibt kein II-Ding φ mit $H \lesssim |[\varphi, H']|$, und es gibt ein II-Ding ψ mit $H' \lesssim |[\psi, H]|$. Es ist $\boldsymbol{KZ}(H) > \boldsymbol{KZ}(H')$.

Aus der zweiten Formulierung einer jeden Zeile folgt sofort, daß stets einer und nur einer der drei Fälle A, B, C besteht. (Der a priori denkbare vierte Fall hingegen, bei dem es kein II-Ding φ mit $H \lesssim |[\varphi, H']|$ und kein II-Ding ψ mit $H' \lesssim |[\psi, H]|$ gibt, tritt also niemals ein. Dies ist eben die „allgemeine Vergleichbarkeit".) Ferner ist der Fall A, nach Satz 67, mit $H \approx H'$ gleichbedeutend.

Definition. Im Falle A ist $H \approx H'$. In den Fällen B und C schreiben wir $H \ll H'$ bzw. $H \gg H'$.

Wir bemerken noch eines. Da $\Omega^{**}\,\boldsymbol{KZ}$ und $\Omega^{**} \approx \Omega^{**}$ ist, ist $\boldsymbol{KZ}(\Omega^{**}) = \Omega^{**}$. Nach Satz 64 b ist ein Bereich H dann und nur dann keine Menge, wenn $\boldsymbol{KZ}(H) = \Omega^{**}$ ist. Dies können wir auch so ausdrücken: $\boldsymbol{KZ}(H) = \boldsymbol{KZ}(\Omega^{**})$, d. h. $H \approx \Omega^{**}$. Nun ist aber Ω keine Menge, so daß $\Omega \approx \Omega^{**}$ sein muß. Also ist $H \approx \Omega^{**}$ mit $H \approx \Omega$ gleichbedeutend, d. h. ein Bereich H ist dann und nur dann keine Menge, wenn $H \approx \Omega$ ist. Wir können dies als eine Verschärfung der Aussage des Axioms IV. 2. ansehen.

---

[33]) Unsere Fallunterscheidung A, B, C (d. h. jeweils die erste Formulierung) ist der sog. „Trichotomie" in der „naiven" Mengenlehre nachgebildet. Immerhin wurde dort in der Regel nicht unsere Relation festgestellt, sondern die ihrer Form nach etwas engeren Relationen $H \approx H^*$, $H^* \lesssim H'$ benützt. Indessen sind beide Relationen miteinander gleichbedeutend (vgl. den ersten Teil des Beweises von Satz 68), die Zurückführung aufeinander gelingt aber bloß mit Hilfe des Auswahlprinzips. (Dies ist wohl eine der frühesten Gelegenheiten gewesen, bei denen die „naive" Mengenlehre das Auswahlprinzip, unbewußt, wesentlich benutzte.)

Da für alle Bereiche $H \lesssim \Omega$ gilt, also $H \lesssim |[\varphi, \Omega]|$ (man wähle φ so, daß stets $[\varphi, x] = x$ sei), so besteht zwischen H und Ω stets einer der beiden Fälle A und B, d. h. es ist $H \lessapprox \Omega$. Da für Nicht-Mengen $H \approx \Omega$ charakteristisch ist, ist für Mengen $H \ll \Omega$ charakteristisch.

VIII. Die Endlichkeit. Die ersten Ordnungszahlen.

1. Die Endlichkeit.

Wir beginnen diesen Paragraphen mit der Definition der endlichen Bereiche. Für die Endlichkeit wurden in der „naiven" Mengenlehre mehrere, der Form nach ziemlich verschiedene Definitionen benützt, die größtenteils den Begriff der Wohlordnung oder der Äquivalenz benützen[34]). Wir werden hier eine Definition anwenden, bei der dies nicht der Fall ist, was ihre Anwendung wesentlich erleichtert.

Definition. H sei ein Bereich. Wir nennen H endlich, in Zeichen: $H\,\mathfrak{E}$, wenn es die folgende Eigenschaft besitzt: es gibt keinen Bereich $K \lesssim \mathfrak{P}(H)$, $K \neq 0$, für welchen zu jedem $x \varepsilon K$ ein $y \varepsilon K$ mit $x < y$ existiert.

Wir nennen H unendlich, in Zeichen: $H\,\mathfrak{U}$, wenn nicht $H\,\mathfrak{E}$ ist.

Es gilt zunächst der folgende Satz:

Satz 70a. *Jeder endliche Bereich H ist eine Menge.*

Satz 70b. *Es gibt einen und nur einen Bereich L, so daß eine Menge H dann und nur dann endlich ist, wenn sie Element von L ist. Dieses L bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{E}}$.*

Beweis. (Für 70a.) H sei ein Bereich, aber keine Menge; wir müssen dann zeigen, daß $H\,\mathfrak{U}$ ist, d. h. einen Bereich K angeben, der die in der Definition genannten Eigenschaften besitzt.

Ein solches K ist nun $\mathfrak{P}(H)$ selbst. Es ist in der Tat $\mathfrak{P}(H) \lesssim \mathfrak{P}(H)$, $\mathfrak{P}(H) \neq 0$ (das letztere weil z. B. $0 \varepsilon \mathfrak{P}(H)$ ist). Und wenn $x \varepsilon \mathfrak{P}(H)$ ist, so ist $x \lesssim H$ und x eine Menge. Da aber H keine Menge ist, ist $x \neq H$, also $x < H$. Wir wählen nun u so, daß $u \varepsilon H$ ist, aber nicht $u \varepsilon x$ ist. Dann ist auch $x + \{u\}$ eine Menge und es ist $x + \{u\} \lesssim H$, also ist $x + \{u\} \varepsilon \mathfrak{P}(H)$. Ferner ist $x < x + \{u\}$. Wir haben also ein $y \varepsilon \mathfrak{P}(H)$ mit $x < y$ gefunden.

(Für 70b.) $H\,\mathfrak{E}$ bedeutet „$H \varepsilon \Omega^*$ und es gibt kein $K \varepsilon \mathfrak{P}(H) - \{0\}$, bei dem zu jedem $x \varepsilon K$ ein $y \varepsilon K$ mit $x < y$ existiert". Dies ist auf die gewohnte Art ohne weiteres auf die Form $[f, H] \neq A$ zu bringen. Wenn

[34]) Eine Zusammenstellung gibt A. Tarsky: Sur les ensembles finis. Fundamenta Mathematicae **6** (1924), S. 45–95.

wir dann $L = \mathfrak{B}(f)$ setzen, so ist L ein Bereich und besitzt die gewünschte Eigenschaft. Daß es nur einen solchen Bereich gibt, folgt aus I. 4.

Weiter beweisen wir einen Satz, bei dem das Axiom V. 1. zum ersten (und einzigen) Male benutzt wird. Es ist überhaupt nur um dieses Satzes willen, daß wir das Axiom V. 1 eingeführt haben. (Freilich hängen die Sätze von Kap. VIII, § 4 und teilweise auch zu Kap. IX, § 2 von diesem Satze ab.)

Satz 71. *Es gibt eine unendliche Menge* (*d. h. es ist* $\overline{E} < \Omega^*$).

Beweis. Wir betrachten das I II-Ding f in V. 1. und wählen g nach IV. 1 (so daß $[g, x] \neq A$ bedeutet, daß x ein I II-Ding ist); und dann setzen wir $h = \left(\frac{f \mid 0}{g}\right)$, $H = \mathfrak{B}(h)$. H ist offenbar ein Bereich, seine Elemente sind alle $x \varepsilon f$, die I II-Dinge sind. Es ist $h \lesssim f$ und f ist ein I II-Ding, also ist es auch h, d. h. H ist eine Menge.

Die in V. 1 formulierten Eigenschaften von f besagen dann für H: es ist $H \neq 0$, und zu jedem $x \varepsilon H$ gibt es ein $y \varepsilon H$, so daß $x < y$ ist.

Jetzt wählen wir j so, daß für alle I II-Dinge x

$$[j, x] = \mathfrak{B}(x)$$

ist. Wir setzen $|[j, H]| = K$. Da H eine Menge ist, ist auch K eine Menge, wegen $H \neq 0$ ist $K \neq 0$.

Wenn $u \varepsilon K$ ist, so ist $u = [j, x] = \mathfrak{B}(x)$, $x \varepsilon H$, also insbesondere $u \sim x$. Da $x \varepsilon H$ ist, gibt es ein $y \varepsilon H$, so daß $x < y$ ist. Für $v = [j, y] = \mathfrak{B}(y)$ ist dann $v \varepsilon K$, $v \sim y$. Da $u \sim x < y \sim v$, also $u < v$ ist, können wir sagen: Zu jedem $u \varepsilon K$ gibt es ein $v \varepsilon K$ mit $u < v$. Dabei ist aber K eine Menge, und alle seine Elemente sind es ebenfalls.

Wir setzen $M = \mathfrak{S}(K)$. Da K eine Menge ist, ist es auch M. Und M ist unendlich, denn es ist $K \lesssim \mathfrak{P}(\mathfrak{S}(K))$ (weil alle Elemente von K Mengen sind), d. h. $K \lesssim \mathfrak{P}(M)$, und $K \neq 0$; und zu jedem $u \varepsilon K$ gibt es ein $v \varepsilon K$ mit $u < v$.

Damit haben wir eine unendliche Menge angegeben.

Man beachte, daß der Kernpunkt des Beweises der Mengencharakter des unendlichen M ist, nur hierzu mußte das Axiom V. 1. herangezogen werden; die Existenz unendlicher Bereiche hingegen ist trivial: Ω oder Ω^{**} sind keine Mengen, also nach Satz 70 unendlich.

2. Eigenschaften der Endlichkeit.

Satz 72a. *Es ist* $0\, E$.

Satz 72b. *H sei eine Menge, u ein I-Ding. Aus* $H\, E$ *folgt* $H + \{u\}\, E$.

Beweis. (Für 72a.) Wir müssen zeigen: Zur Menge 0 gibt es kein K mit den in der Definition im § 1 angegebenen Eigenschaften.

Wegen $\mathcal{P}(0) = \{0\}$ folgt aus $K \lesssim \mathcal{P}(O)$, $K \neq 0$ offenbar $K = \{0\}$; also ist $x \varepsilon K$ mit $x = 0$ gleichbedeutend. Für $u \varepsilon K$ haben wir also $u = 0$, und es ist für jedes $v \varepsilon K$ $v = 0 = u$, also niemals $u < v$.

(Für 72b.) Nehmen wir an, es wäre $H + \{u\}\ \boldsymbol{U}$, d. h. es gäbe einen Bereich K' mit $K' \lesssim \mathcal{P}(H + \{u\})$, $K' \neq 0$, so daß zu jedem $x' \varepsilon K'$ ein $y' \varepsilon K'$ mit $x' < y'$ existierte. Wir wählen ein II-Ding f so, daß stets $[f, x] = x - \{u\}$ ist, und setzen $K = |[f, K']|$.

Wegen $K' \neq 0$ ist $K \neq 0$. Wenn $x \varepsilon K$ ist, so ist $x = [f, x'] = x' - \{u\}$, $x' \varepsilon K'$. Also ist $x' \varepsilon \mathcal{P}(H + \{u\})$, $x' \lesssim H + \{u\}$, und $x \lesssim H + \{u\} - \{u\} \lesssim H$, $x \varepsilon \mathcal{P}(H)$. Folglich ist $K \lesssim \mathcal{P}(H)$.

Wenn $x \varepsilon K$ ist, so ist $x = [f, x'] = x' - \{u\}$, $x' \varepsilon K'$ Es gibt ein $y' \varepsilon K'$ mit $x' < y'$ und ein $z' \varepsilon K'$ mit $y' < z'$. Für $y = [f, y'] = y' - \{u\}$ und $z = [f, z'] = z' - \{u\}$ ist dann auch $y \varepsilon K$, $z \varepsilon K$.

Aus $x' < y' < z'$ folgt $x \lesssim y \lesssim z$. Wir behaupten: Es ist $x < z$. Sonst wäre nämlich $x \sim z$, $x \lesssim y \lesssim z \sim x$, also $x = y = z$. Dies bedeutet aber: $x' - \{u\} = z' - \{u\}$, also ist $z' \lesssim z' - \{u\} + \{u\} = x' - \{u\} + \{u\} \lesssim x' + \{u\}$, und weiter $x' < y' < z' \lesssim x' + \{u\}$, $x' < y' < x' + \{u\}$. Dies ist aber offenbar unmöglich.

Also gibt es zu jedem $x \varepsilon K$ ein $z \varepsilon K$ mit $x < z$. Folglich ist auch $H\boldsymbol{U}$. Wenn also $H\boldsymbol{E}$ ist, so ist auch $H + \{u\}\ \boldsymbol{E}$.

Satz 73. *L sei ein Bereich. Wenn $0 \varepsilon L$ ist und für jede Menge H und für jedes I-Ding u aus $H \varepsilon L$ $H + \{u\} \varepsilon L$ folgt, so gehört jede endliche Menge zu L, d. h. es ist $\overline{\boldsymbol{E}} \lesssim L$.*

Beweis. H sei eine Menge, die nicht zu L gehört. Wir bilden $K = \mathcal{P}(H) \cdot L$. Es ist offenbar $K \lesssim \mathcal{P}(H)$, und da z. B. $0 \varepsilon \mathcal{P}(H)$, $0 \varepsilon L$ ist, also $O \varepsilon K$ ist, so ist $K \neq 0$.

Es sei $x \varepsilon K$. Dann ist erstens $x \varepsilon \mathcal{P}(H)$, $x \lesssim H$. Zweitens ist $x \varepsilon L$, also $x \neq H$. Folglich ist $x < H$. Wir wählen u so, daß $u \varepsilon H$ sei, aber nicht $u \varepsilon x$. Dann ist $x + \{u\} \lesssim H$, und weil es x ist, auch $x + \{u\}$ eine Menge, also $x + \{u\} \varepsilon \mathcal{P}(H)$, und weil $x \varepsilon L$ ist, auch $x + \{u\} \varepsilon L$. Also ist $x + \{u\} \varepsilon K$. Und da u nicht zu x gehört, ist $x < x + \{u\}$.

Es gibt also zu jedem $x \varepsilon K$ ein $y \varepsilon K$ (nämlich $y = x + \{u\}$) mit $x < y$. Also ist $H\boldsymbol{U}$. Aus $H\boldsymbol{E}$ folgt dann $H \varepsilon L$.

Dieser Satz 73 ist eine Form des Prinzips des Beweises durch vollständige Induktion, welche den Begriff der Zahl nicht voraussetzt. Die andere, eigentliche und den Begriff der Zahl voraussetzende Form desselben werden wir beim Betrachten der „natürlichen Zahlen“ im § 4 aufstellen.

Wir gehen nun daran, mit Hilfe der Sätze 72a, b und 73 ausgedehntere Klassen von endlichen Mengen anzugeben.

Satz 74. *Wenn H, H' Mengen sind und $H' \lesssim H$ ist, so folgt aus $H\,E$ auch $H'\,E$.*

Beweis. Wäre $H'\,U$, so gäbe es ein $K \lesssim \mathfrak{P}(H')$, $K \neq 0$, bei dem es zu jedem $x \varepsilon K$ ein $y \varepsilon K$ mit $x < y$ gibt. Aus $H' \lesssim H$ folgt $\mathfrak{P}(H') \lesssim \mathfrak{P}(H)$, also ist $K \lesssim \mathfrak{P}(H)$; d. h. aus der Existenz dieses K folgt auch $H\,U$.

Aus $H\,E$ folgt also $H'\,E$.

Satz 75. *Wenn H eine Menge und φ ein II-Ding ist, so folgt aus $H\,E$ auch $|[\varphi, H]|\,E$.*

Beweis. Wir können leicht ein II-Ding f konstruieren, so daß die Bedingung „H ist eine Menge und $|[\varphi, H]|$ ist endlich“ mit $[f, H] \neq A$ (f ist von φ abhängig, aber nicht von H!) gleichbedeutend ist. Wir setzen $L = \mathfrak{B}(f)$, L ist ein Bereich, und seine Elemente sind alle H mit der obigen Eigenschaft.

0 ist eine Menge, und $|[\varphi, 0]| = 0$ ist endlich, also ist $0 \varepsilon L$. Wenn $x \varepsilon L$ ist und u ein I-Ding ist, so ist x eine Menge, also auch $x + \{u\}$; und $|[\varphi, x]|$ ist endlich, also auch $|[\varphi, x + \{u\}]| = |[\varphi, x]| + \{[\varphi, u]\}$. Also ist $x + \{u\} \varepsilon L$. Nach Satz 73 ist also für jedes endliche H $H \varepsilon L$, d. h. $|[\varphi, H]|$ endlich.

Satz 76. *Wenn H, K zwei endliche Mengen sind, so ist auch $H + K$ endlich.*

Beweis. H sei eine endliche Menge. Wir bringen die Bedingung „K ist eine Menge, und $H + K$ ist endlich“ auf die Form $[f, K] \neq A$ (f von K unabhängig, aber nicht von H!) und setzen $L = \mathfrak{B}(f)$. L ist ein Bereich, seine Elemente sind alle K mit der obigen Eigenschaft.

0 ist eine Menge, und $H + 0 = H$ ist endlich, also ist $0 \varepsilon L$. Wenn $x \varepsilon L$ ist und u ein I-Ding ist, so ist x eine Menge, also auch $x + \{u\}$; und $H + x$ ist endlich, also auch $H + x + \{u\} = H + x + \{u\}$. Also ist $x + \{u\} \varepsilon L$.

Nach Satz 73 ist also für jedes endliche K $K \varepsilon L$, d. h. $H + K$ endlich.

Satz 77. *Wenn H eine endliche Menge ist und $H \lesssim \overline{E}$ ist, so ist auch $S(H)$ endlich.*

Beweis. Wir bringen die Bedingung „H ist eine Menge, und entweder ist nicht $H \lesssim \overline{E}$, oder es ist $S(H)$ endlich“ auf die Form $[f, H] \neq A$ (f unabhängig von H!), und setzen $L = \mathfrak{B}(f)$. L ist ein Bereich, und seine Elemente sind alle H mit der obigen Eigenschaft.

0 ist eine Menge, und $S(0) = 0$ ist endlich, also ist $0 \varepsilon L$. Wenn $x \varepsilon L$ ist und u ein I-Ding ist, so ist erstens x eine Menge, also auch

$x + \{u\}$. Zweitens ist entweder nicht $x + \{u\} \lesssim \overline{E}$, oder aber dies ist der Fall, dann ist aber auch $x \lesssim \overline{E}$, $u \varepsilon \overline{E}$. In diesem Falle ist wegen $x \varepsilon L$, $x \lesssim E$ $S(x)$ endlich und wegen $u \varepsilon \overline{E}$ auch u endlich, also ist es $S(x + \{u\}) = S(x) + u$ ebenfalls. D. h. es ist $x + \{u\} \varepsilon L$.

Nach Satz 73 ist also für jedes endliche H $H \varepsilon L$; wenn folglich $H \lesssim \overline{E}$ ist, so muß $S(H)$ endlich sein.

Satz 78. *Wenn H eine endliche Menge ist, so ist auch $\mathfrak{P}(H)$ endlich.*

Beweis. Wir bringen die Bedingung „H ist eine Menge und $\mathfrak{P}(H)$ ist endlich“ auf die Form $[f, H] \neq A$ (f ist unabhängig von H!) und setzen $L = \mathfrak{B}(f)$. L ist ein Bereich, und seine Elemente sind alle H mit der obigen Eigenschaft.

0 ist eine Menge, und $\mathfrak{P}(0) = \{0\}$ ist endlich (weil 0 und folglich auch $\{0\} = 0 + \{0\}$ es ist), also ist $0 \varepsilon L$.

Wenn $x \varepsilon L$ ist und u ein I-Ding ist, so ist erstens x eine Menge, also ist es auch $x + \{u\}$. Zweitens ist $\mathfrak{P}(x)$ endlich; wir wollen zeigen, daß daraus auch die Endlichkeit von $\mathfrak{P}(x + \{u\})$ folgt.

Wenn $y \varepsilon \mathfrak{P}(x + \{u\})$ ist, so ist $y \lesssim x + \{u\}$. Wenn nicht $u \varepsilon y$ ist, so folgt hieraus $y \lesssim x$, d. h. $y \varepsilon \mathfrak{P}(x)$. Wenn im Gegenteil $u \varepsilon y$ ist, so ist $y = y - \{u\} + \{u\}$, $y - \{u\} \lesssim x$, d. h. $y - \{u\} \varepsilon \mathfrak{P}(x)$. D. h. in diesem Falle ist $y = y' + \{u\}$, $y' \varepsilon \mathfrak{P}(x)$.

Wir wählen nun g so, daß für alle Mengen y' $[g, y'] = y' + \{u\}$ (g von y' unabhängig, aber nicht von u!) ist. Dann folgt aus $y \varepsilon \mathfrak{P}(x + \{u\})$, daß entweder $y \varepsilon \mathfrak{P}(x)$ ist, oder $y = [g, y']$, $y' \varepsilon \mathfrak{P}(x)$, d. h. $y \varepsilon |[g, \mathfrak{P}(x)]|$. Also ist $\mathfrak{P}(x + \{u\} \lesssim \mathfrak{P}(x) + |[g, \mathfrak{P}(x)]|$.

Aus der Endlichkeit von $\mathfrak{P}(x)$ folgt auch die von $|[g, \mathfrak{P}(x)]|$, $\mathfrak{P}(x) + |[g, \mathfrak{P}(x)]|$, und also auch die Endlichkeit von $\mathfrak{P}(x + \{u\})$.

Somit dürfen wir schließen, daß $x + \{u\} \varepsilon L$ ist. Nach Satz 73 ist also für jedes Endliche H $H \varepsilon L$, d. h. $\mathfrak{P}(H)$ endlich.

Satz 79. *H, J seien zwei endliche Mengen. Da sind auch die Mengen $|\langle H, J\rangle|$, H^J endlich.*

H sei eine endliche Menge. Dann sind auch die Mengen $\mathfrak{UO}(H)$, $\mathfrak{VO}(H)$ und $\mathfrak{WO}(H)$ endlich. Ferner ist für jedes $J \mathfrak{UO} H$ (also auch für jedes $J \mathfrak{VO} H$ oder $J \mathfrak{WO} H$) J endlich und (falls $J \mathfrak{WO} H$ ist) $\mathfrak{OZ}(H, J)$ endlich. Ferner ist auch $\mathfrak{KZ}(H)$ endlich.

Beweis. Beim Beweise von Satz 12 b sahen wir, daß $|\langle H, J\rangle| \lesssim |[m, \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(H + J))]|$ ist. Also folgt aus $H \mathfrak{E}$, $J \mathfrak{E}$ die Endlichkeit von $|\langle H, J\rangle|$. Beim Beweise von Satz 13 b sahen wir, daß $H^J \lesssim |[k, \mathfrak{P}(\langle H, J\rangle)]|$. Aus $H \mathfrak{E}$, $J \mathfrak{E}$ folgt also die Endlichkeit von H^J.

Wie wir wissen, ist $\mathfrak{WO}(H) \lesssim \mathfrak{VO}(H) \lesssim \mathfrak{UO}(H) \lesssim \mathfrak{P}(|\langle H, H\rangle|)$. Aus $H\boldsymbol{E}$ folgt also die Endlichkeit von $\mathfrak{UO}(H)$, $\mathfrak{VO}(H)$, $\mathfrak{WO}(H)$. Wenn $J\mathfrak{UO}H$ ist, so ist $J \lesssim |\langle H, H\rangle|$, also folgt aus $H\boldsymbol{E}$ die Endlichkeit von J.

Wegen $\boldsymbol{OZ}(H, J) = |[\boldsymbol{Z}(H, J), H]|$ folgt aus $H\boldsymbol{E}$ auch $\boldsymbol{OZ}(H, J)\,\boldsymbol{E}$; und wegen $H \approx \boldsymbol{KZ}(H)$, d. h. $\boldsymbol{KZ}(H) = [f, H]$ folgt aus $H\boldsymbol{E}$ auch $\boldsymbol{KZ}(H)\,\boldsymbol{E}$.

Schließlich beweisen wir noch einen Satz über das Verhältnis von Endlichkeit und Äquivalenz.

Satz 80a. *H, H' seien zwei Mengen, $H \approx H'$. Dann ist $H\boldsymbol{E}$ mit $H'\boldsymbol{E}$, und $H\boldsymbol{U}$ mit $H'\boldsymbol{U}$ gleichbedeutend.*

Satz 80b. *H, H' seien zwei Mengen. Wenn $H\boldsymbol{E}$, $H'\boldsymbol{U}$ ist, so ist $H \ll H'$.*

Beweis. (Für 80a.) Aus $H \approx H'$ folgt $H' = |[f, H]|$, aus $H\boldsymbol{E}$ folgt also $H'\boldsymbol{E}$. Da ebenso $H' \approx H$ ist, folgt auch aus $H'\boldsymbol{E}$ $H\boldsymbol{E}$. D. h. $H\boldsymbol{E}$ ist mit $H'\boldsymbol{E}$ gleichbedeutend. Also gilt auch dasselbe für die Negation der Endlichkeit, die Unendlichkeit.

(Für 80b.) $H' \overset{\ll}{\approx} H$ ist nach Satz 68 mit $H' \lesssim |[f, H]|$ gleichbedeutend. In diesem Falle folgt aus $H\boldsymbol{E}$ die Endlichkeit von $|[f, H]|$ und H'. Wegen $H'\boldsymbol{U}$ muß also $H' \gg H$, $H \ll H'$ sein.

3. Grundoperationen mit Ordnungszahlen.

Satz 81a. *Es ist $0 \varepsilon \Omega^{**}$.*

Satz 81b. *Wenn $P \varepsilon \Omega^{**}$ ist, so ist auch $P + \{P\} \varepsilon \Omega^{**}$. Wir bezeichnen $P + \{P\}$ auch mit $P + 1$.*

Satz 81c. *Wenn $\mathfrak{M} \lesssim \Omega^{**}$ ist, so ist $S(\mathfrak{M}) \varepsilon \Omega^{**}$ oder $S(\mathfrak{M}) = \Omega^{**}$, je nachdem ob $\mathfrak{M}$ eine Menge ist oder nicht. Folglich ist jedenfalls $S(\mathfrak{M})\,\boldsymbol{OZ}$.*

Beweis. (Für 81a.) 0 ist eine Menge, wir müssen also nur noch $0\,\boldsymbol{OZ}$ beweisen, d. h. daß 0 den Bedingungen des Satzes 46 genügt. Dies ist aber sicher der Fall, weil 0 überhaupt keine Elemente hat.

(Für 81b.) P ist eine Menge, $\{P\}$ ebenfalls, also ist es auch $P + \{P\}$; wir müssen also nur noch $P + \{P\}\,\boldsymbol{OZ}$ beweisen, d. h. daß $P + \{P\}$ den Bedingungen des Satzes 46 genügt.

Aus $P \varepsilon \Omega^{**}$ folgt $P \lesssim \Omega^{**}$ und $\{P\} \lesssim \Omega^{**}$, also $P + \{P\} \lesssim \Omega^{**}$. Wenn $Q \varepsilon P + \{P\}$ ist, so ist entweder $Q \varepsilon P$, also $Q < P \lesssim P + \{P\}$, oder $Q \varepsilon \{P\}$, $Q = P \lesssim P + \{P\}$. Es ist also jedenfalls $Q \lesssim P + \{P\}$. D. h.: $P + \{P\}$ erfüllt in der Tat die Bedingungen des Satzes 46.

(Für 81c.) Wir zeigen zuerst, daß $S(\mathfrak{M})\,\boldsymbol{OZ}$ ist, d. h. daß $S(\mathfrak{M})$ den Bedingungen des Satzes 46 genügt.

Aus $P \varepsilon S(\mathcal{M})$ folgt $P \varepsilon Q$, $Q \varepsilon \mathcal{M}$, wegen $\mathcal{M} \lesssim \Omega^{**}$ ist $Q \boldsymbol{OZ}$, also auch $P \boldsymbol{OZ}$; folglich ist $S(\mathcal{M}) \lesssim \Omega^{**}$. Ferner folgt aus $P \varepsilon S(\mathcal{M})$: $P \varepsilon Q$, $Q \varepsilon \mathcal{M}$, also wegen $P \boldsymbol{OZ}$, $Q \boldsymbol{OZ}$ $P < Q$. Da aber wegen $Q \varepsilon \mathcal{M}$ $Q \lesssim S(\mathcal{M})$ ist, ist auch $P < S(\mathcal{M})$. Damit ist $S(\mathcal{M}) \boldsymbol{OZ}$ bewiesen.

Also ist $S(\mathcal{M}) \neq \Omega^{**}$ oder $= \Omega^{**}$, d. h. $\varepsilon \Omega^{**}$ oder $= \Omega^{**}$, je nachdem ob $S(\mathcal{M})$ eine Menge ist oder nicht. Wir müssen also nun noch beweisen: $S(\mathcal{M})$ ist dann und nur dann eine Menge, wenn $\mathcal{M}$ eine ist.

Ist $\mathcal{M}$ eine Menge, so ist es jedenfalls auch $S(\mathcal{M})$. Ist hingegen $S(\mathcal{M})$ eine Menge, so ist es auch $\mathcal{P}(S(\mathcal{M}))$, und wegen $\mathcal{M} \lesssim \mathcal{P}(S(\mathcal{M}))$ auch $\mathcal{M}$. ($\mathcal{M} \lesssim \mathcal{P}(S(\mathcal{M}))$ gilt offenbar für jeden Bereich $\mathcal{M}$, dessen Elemente Mengen sind.)

Satz 82. *Es sei* $P \varepsilon \Omega^{**}$, $Q \varepsilon \Omega^{**}$. *Dann bestehen die folgenden Relationen*: $P < Q$ *ist mit* $P + 1 \lesssim Q$ *gleichbedeutend.* $P < Q + 1$ *ist mit* $P \lesssim Q$ *gleichbedeutend.* $P \gtrless Q$ *ist bzw. mit* $P + 1 \gtrless Q + 1$ *gleichbedeutend.*

Beweis. Da $P \varepsilon P + \{P\}$, $P \varepsilon P + 1$ ist, und $P \boldsymbol{OZ}$, $P + 1 \boldsymbol{OZ}$ ist, so gilt $P < P + 1$. Aus $P + 1 \lesssim Q$ folgt also $P < Q$. Aus $P < Q$ hingegen folgt $P + 1 \lesssim Q$; denn sonst wäre $P + 1 > Q$, $Q < P + 1$, also $P < Q < P + \{P\}$, was offenbar unmöglich ist. Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Wir beweisen nun die dritte. Aus $P = Q$ folgt $P + 1 = Q + 1$. Aus $P < Q$ folgt $P + 1 \lesssim Q < Q + 1$, $P + 1 < Q + 1$. Aus $P > Q$ folgt $Q < P$, $Q + 1 < P + 1$, also $P + 1 > Q + 1$. Also: aus $P \gtrless Q$ folgt bzw. $P + 1 \gtrless Q + 1$. Und da es sich hier jeweils um vollständige Disjunktionen handelt, gilt auch die Umkehrung.

Schließlich beweisen wir die zweite Behauptung. $P < Q + 1$ bedeutet $P + 1 \lesssim Q + 1$, und dies $P \lesssim Q$.

Satz 83. *Es sei* $P \boldsymbol{OZ}$. *Dann ist entweder* $P = Q + 1$, $Q \boldsymbol{OZ}$ *oder es ist* $P = S(P)$, *und beides zugleich findet nie statt. Im letzteren Falle nennen wir* P *eine Limeszahl, in Zeichen*: $P \boldsymbol{LZ}$.

Beweis. Wenn $P = Q + 1$ ist, so folgt aus $R \varepsilon S(P)$: $R \varepsilon T$, $T \varepsilon P$, d. h. $R \varepsilon T$, $T < P$. Also ist $T < Q + 1$, $T \lesssim Q$, und folglich $R \varepsilon Q$. Also ist $S(P) \lesssim Q < Q + 1 = P$, $S(P) < P$.

Ist umgekehrt $S(P) \neq P$, so schließen wir so. Aus $R \varepsilon S(P)$ folgt $R \varepsilon T$, $T \varepsilon P$, also $R \varepsilon T$, $T < P$, d. h. $R \varepsilon P$. Also ist $S(P) \lesssim P$. Wegen $S(P) \neq P$ muß $S(P) < P$ sein. Es gibt also ein R, welches Element von P, aber nicht von $S(P)$ ist.

Also ist $R < P$, es kann aber nicht $R < T < P$ ($T \boldsymbol{OZ}$) sein, da dann $R \varepsilon T$, $T \varepsilon P$ also $R \varepsilon S(P)$ wäre. Folglich zieht $R < T$, $T \boldsymbol{OZ}$

$T \gtrsim P$ nach sich. Nun hat $R < P$ die Konsequenz $R + 1 \lesssim P$; und wegen $R < R + 1$ muß $R + 1 \gtrsim P$ sein. Also ist $R + 1 = P$.

Zwei Limeszahlen können wir sofort angeben: 0 und Ω^{**}. $S(0) = 0$ ist nämlich trivial, und $S(\Omega^{**}) = \Omega^{**}$ folgt z. B. aus Satz 81 c, weil Ω^{**} keine Menge ist.

4. Die natürlichen Zahlen, ω.

Wir sind jetzt in der Lage, die natürlichen Zahlen (d. h. die nichtnegativen ganzen rationalen Zahlen) zu definieren.

Definition. Wir nennen P eine natürliche Zahl, in Zeichen: $P\,\boldsymbol{NZ}$, wenn $P\,\boldsymbol{OZ}$ und $P\,\boldsymbol{E}$ ist. D. h. wenn $P \varepsilon \overline{\boldsymbol{E}} \cdot \Omega^{**}$ ist.

Satz 84. *Den Bereich $\overline{\boldsymbol{E}} \cdot \Omega^{**}$, dessen Elemente alle natürliche Zahlen sind, nennen wir ω. Es ist $\omega \varepsilon \Omega^{**}$.*

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß $\omega\,\boldsymbol{OZ}$ ist, d. h. daß es den Bedingungen des Satzes 46 genügt.

Aus $P \varepsilon \omega$ folgt $P\,\boldsymbol{OZ}$, $P\,\boldsymbol{E}$, also ist $P \varepsilon \Omega^{**}$, und folglich $\omega \lesssim \Omega^{**}$. Wenn $P \varepsilon \omega$ ist, so ist $P\,\boldsymbol{E}$, aus $Q \varepsilon P$ folgt aber $Q\,\boldsymbol{OZ}$ und $Q < P$. Also ist auch $Q\,\boldsymbol{E}$, d. h. $Q\,\boldsymbol{NZ}$, $Q \varepsilon \omega$. Also ist $P \lesssim \omega$. Damit ist $\omega\,\boldsymbol{OZ}$ bewiesen.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, daß ω eine Menge ist. Nach Satz 47 genügt es hierzu nachzuweisen, daß $\omega \neq \Omega^{**}$ ist; also daß es eine nicht zu ω gehörende, d. h. unendliche Ordnungszahl gibt, die zu Ω^{**} gehört, d. h. eine Menge ist. Nun gibt es nach Satz 71 jedenfalls eine unendliche Menge, H, also ist $\boldsymbol{KZ}(H)$ eine Ordnungszahl, die wegen $H \approx \boldsymbol{KZ}(H)$ sowohl unendlich als auch eine Menge ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 85 a. *Es ist $0 \varepsilon \omega$. Aus $P \varepsilon \omega$ folgt $P + 1 \varepsilon \omega$.*

Satz 85 b. *M sei ein Bereich. Wenn $0 \varepsilon M$ ist, und aus $P \varepsilon M$, $P \varepsilon \Omega^{**}$ $P + 1 \varepsilon M$ folgt, so ist $\omega \lesssim M$.*

Beweis. (Für 85 a.) Es ist $0\,\boldsymbol{OZ}$, $0\,\boldsymbol{E}$, also $0\,\boldsymbol{NZ}$, $0 \varepsilon \omega$. Wenn $P \varepsilon \omega$, d. h. $P\,\boldsymbol{NZ}$, d. h. $P\,\boldsymbol{OZ}$, $P\,\boldsymbol{E}$ ist, so ist auch $P + 1\,\boldsymbol{OZ}$, $P + 1\,\boldsymbol{E}$ (wegen $P + 1 = P + \{P\}$), also $P + 1\,\boldsymbol{NZ}$, $P + 1 \varepsilon \omega$.

(Für 85 b.) Wenn nicht $\omega \lesssim M$ wäre, so gäbe es ein $P \varepsilon \omega$, für welches nicht $P \varepsilon M$ ist. Wegen $P \varepsilon \omega$ ist $P\,\boldsymbol{NZ}$, d. h. $P\,\boldsymbol{OZ}$ und $P\,\boldsymbol{E}$.

Wir bilden nun den Bereich $\mathfrak{M} = P \cdot M$. Aus $x \varepsilon \mathfrak{M}$ folgt $x \varepsilon P$, also $x < P$, also $x \varepsilon \mathfrak{P}(P)$; folglich ist $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{P}(P)$. Ferner ist $0 \varepsilon M$, und da nicht $P \varepsilon M$ ist, $0 \neq P$, d. h. $0 < P$. Hieraus folgt aber $0 \varepsilon P$, also $0 \varepsilon P \cdot M$, $0 \varepsilon \mathfrak{M}$. Also ist $\mathfrak{M} \neq 0$.

Schließlich gilt für jedes $x \varepsilon \mathfrak{M}$ offenbar: $x \varepsilon P$, $x \varepsilon M$. Also ist $x\,\boldsymbol{OZ}$, $x < P$, $x \varepsilon M$; und da $x \varepsilon P$, $P \lesssim \Omega^{**}$, ist auch $x \varepsilon \Omega^{**}$. Wegen $x \varepsilon M$,

$x \varepsilon \Omega^{**}$ ist nun $x + 1 \varepsilon M$. Aus $x < P$ folgt andererseits $x + 1 \lesssim P$, da aber $x + 1 \varepsilon M$, aber nicht $P \varepsilon M$ ist, so ist $x + 1 \neq P$. Also ist $x + 1 < P$, $x + 1 \varepsilon P$. Aus alledem folgt $x + 1 \varepsilon P \cdot M$, $x + 1 \varepsilon \mathfrak{M}$. Und da $x < x + 1$ ist, so können wir sagen: es gibt zu jedem $x \varepsilon \mathfrak{M}$ ein $y \varepsilon \mathfrak{M}$ mit $x < y$.

Nach der Definition der Endlichkeit muß also PU sein, was mit PE im Widerspruch steht.

Der Satz 85 b ist die zweite und eigentliche Fassung des Prinzips vom Beweisen durch finite (vollständige) Induktion. Das *Definieren* durch finite (vollständige) Induktion ist damit natürlich noch nicht erledigt, es soll uns erst im Kap. IX, § 2 beschäftigen.

Wir beweisen noch einige Sätze vom Verhältnis der Ordnungszahl ω zur Äquivalenz.

Satz 86. *Es ist ωLZ und ωKZ. Es ist ωU.*

Beweis. Es kann nicht $\omega = P + 1$, POZ, sein. Denn dann wäre $P < P + 1 = \omega$, $P \varepsilon \omega$. Also wäre auch $P + 1 \varepsilon \omega$, $\omega \varepsilon \omega$. D. h. $\omega < \omega$, was unmöglich ist.

Es ist ωU, denn aus ωE folgte ωNZ, $\omega \varepsilon \omega$, $\omega < \omega$.

Aus POZ, $P < \omega$ folgt $P \varepsilon \omega$, PNZ, PE, wegen ωU kann also nicht $P \approx \omega$ sein. Also ist ωKZ.

Satz 87. *H sei ein Bereich. HE ist mit $H \ll \omega$ gleichbedeutend (oder was dasselbe ist: mit $KZ(H) \varepsilon \omega$, oder mit $KZ(H) NZ$, oder mit $KZ(H) < \omega$).*

Beweis. Wegen $H \approx KZ(H)$ ist HE mit $KZ(H) E$ gleichbedeutend. Es ist aber $KZ(H) OZ$, also bedeutet $KZ(H) E$ $KZ(H) NZ$. Dies ist seinerseits mit $KZ(H) \varepsilon \omega$ oder auch, da ω als Kardinalzahl seine eigene Kardinalzahl ist, mit $KZ(H) < KZ(\omega)$, d. h. $H \ll \omega$ gleichbedeutend.

Satz 88. *H sei ein Bereich. HE ist damit gleichbedeutend, daß für kein $H' < H$ $H \approx H'$ ist.*

Beweis. Nehmen wir zuerst an, es sei $H' < H$, $H \approx H'$, es ist dann zu beweisen, daß HU ist. Wir können H als Menge voraussetzen, sonst ist sowieso HU. Wegen $H \approx H'$ ist $H \approx H' \ldots (f)$. Wir bringen die Bedingung „$x \varepsilon \mathfrak{P}(H)$ und $H - x > |[f, H - x]|$“ auf die Form $[g, x] \neq A$ und setzen $K = \mathfrak{B}(g)$. K ist ein Bereich und seine Elemente sind alle x mit der obigen Eigenschaft.

Es ist offenbar $K \lesssim \mathfrak{P}(H)$. Für die Menge 0 gilt: $0 \varepsilon \mathfrak{P}(H)$, $H - 0 = H > H' = |[f, H]| = |[f, H - 0]|$, also $0 \varepsilon K$; folglich ist $K \neq 0$.

Es sei $x \varepsilon K$. Wir setzen $y = H - |[f, H - x]|$. Wegen $y \lesssim H$ ist $y \varepsilon \mathfrak{P}(H)$. Aus $x \varepsilon K$ folgt $H - y = |[f, H - x]| < H - x$, $x < y$. Ferner

folgt aus $H-x>H-y$ $|[f, H-x]|>|[f, H-y]|$ (weil für $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ stets $[f, u] \neq [f, v]$ ist), d. h. $H-y>|[f, H-y]|$.

Also ist $y \varepsilon K$. D. h.: zu jedem $x \varepsilon K$ gibt es ein $y \varepsilon K$ mit $x<y$. Damit ist HU bewiesen.

Nun sei umgekehrt HU. Dann ist $KZ(H) \gtrsim \omega$. Wir setzen $KZ(H)-\omega=\pi$, $KZ(H)=\omega+\pi$. Es ist $KZ(H) \approx H \ldots (h)$, also $H=|[h, KZ(H)]|=|[h, \omega]|+|[h, \pi]|$. Dabei haben $|[h, \omega]|$ und $|[h, \pi]|$ kein gemeinsames Element, weil ω und π keines haben, und aus $u \varepsilon KZ(H)$, $v \varepsilon KZ(H)$, $u \neq v$ $[h, u] \neq [h, v]$ folgt. Wir können auch schreiben: $H=|[h, \omega]|+H^*$, $|[h, \omega]|$ und H^* haben kein gemeinsames Element.

Die Bedingung: „Entweder ist $x \varepsilon |[h, \omega]|$, und dabei $x=[h, z]$, $z \varepsilon \omega$ und $y=[h, z+1]$; oder es ist $x \varepsilon H^*$ und $y=x$“ können wir auf die Form $[j, \langle x, y\rangle] \neq A$ bringen. Da für $x \varepsilon |[h, \omega]|$ oder $x \varepsilon H^*$, d. h. für $x \varepsilon H$, ein einziges y dieser Bedingung genügt, so wenden wir III. 3. an: Dieses y ist $=[k, x]$.

Für $x \varepsilon |[h, \omega]|$ ist also $x=[h, z]$, $z \varepsilon \omega$, $[k, x]=[h, z+1]$. Für $x \varepsilon H^*$ ist $[k, x]=x$. Aus dieser Eigenschaft des k schließen wir leicht zweierlei. Erstens, daß aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ $[k, u] \neq [k, v]$ folgt. Zweitens, daß $|[k, |[h, \omega]|]| \lesssim |[h, \omega-\{0\}]|<|[h, \omega]|$ und $|[k, H^*]|=H^*$ ist. Hieraus folgt aber $H \approx |[k, H]|$ und $|[k, H]|=|[k, |[h, \omega]|]|+|[k, H^*]|$ $<|[h, \omega]|+H^*=H$.

Wir haben also ein $H'<H$ mit $H \approx H'$ gefunden: nämlich $|[k, H]|$. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Satz 89. *Aus PNZ folgt PKZ. Hingegen ist außer 0 kein PNZ auch PLZ.*

Beweis. Wäre nicht PKZ, so gäbe es eine Ordnungszahl Q mit $Q<P$, $Q \approx P$, was mit PE, d. h. mit PNZ, nach Satz 88 unvereinbar ist.

Wenn $P \neq 0$, PLZ ist, so ist erstens $0<P$, d. h. $0 \varepsilon P$. Zweitens folgt aus $Q \varepsilon P$ QOZ, $Q<P$, also $Q+1 \lesssim P$. Nun ist P nicht $=Q+1$, also $Q+1<P$, $Q+1 \varepsilon P$. Nach Satz 85b ist also $\omega \lesssim P$, was mit PNZ, $P<\omega$ im Widerspruche steht.

IX. Induktionssätze.

1. Die transfinite Induktion.

In diesem Kapitel werden wir die Zulässigkeit (d. h. die Möglichkeit und Eindeutigkeit) der Definition durch transfinite bzw. finite (gewöhnliche vollständige) Induktion beweisen. Diese Art des Definierens wurde in der „naiven“ Mengenlehre allgemein als etwas Selbstverständliches, unmittelbar Anschauliches angesehen. Innerhalb eines axiomatischen Systems

kann von einer Selbstverständlichkeit dieser Definitionsprozesse keine Rede sein: es muß vielmehr streng aus den Axiomen deduziert werden, daß die durch sie herzustellenden Funktionen existieren. Außerdem ist der unmittelbar anschauliche Charakter wenigstens der Definition durch transfinite Induktion gar nicht so unanfechtbar, als man zunächst anzunehmen geneigt sein könnte[35]).

Das Prinzip der Definition durch transfinite Induktion formulieren wir zunächst möglichst allgemein.

Satz 90. *φ sei ein II-Ding. Es gibt ein und nur ein II-Ding ψ, welches die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. *Wenn nicht $x \varepsilon \Omega^{**}$ ist, so ist $[\psi, x] = A$ (d. h. $\psi \lesssim \Omega^{**}$).*
2. *Wenn $x \varepsilon \Omega^{**}$ ist, so ist*

$$[\psi, x] = \left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{\psi \mid 0}{x}\right)\right\rangle\right]$$

$\left(\text{wegen } \left(\frac{\psi \mid 0}{x}\right) \lesssim x \text{ ist } \left(\frac{\psi \mid 0}{x}\right) \text{ ein I II-Ding}\right)$. Dieses ψ bezeichnen wir mit $\mathfrak{J}(\varphi)$.

Bemerkung. Die Formulierung des eigentlichen induktiven Definitionsprinzips ist die Bedingung 2. Da es der Form nach etwas ungewohnt sein mag, ist es vielleicht gut, einige erläuternde Worte hinzuzufügen.

$\left(\frac{\psi \mid 0}{x}\right)$ charakterisiert den Wertverlauf des II-Dinges (d. h. der Funktion) ψ im Bereiche x. Man sieht dies sofort, wenn man beachtet, daß dann und nur dann $\left(\frac{\psi' \mid 0}{x}\right) = \left(\frac{\psi'' \mid 0}{x}\right)$ ist, wenn für alle $u \varepsilon x$ $[\psi', u] = [\psi'', u]$ ist. Also drückt die Bedingung 2 das Folgende aus: $[\psi, x]$ berechnet sich auf eindeutige Weise aus x und dem Wertverlauf von ψ in x, d. h. für alle Ordnungszahlen $< x$.

Beweis[36]). Der besseren Übersicht halber werden wir den Beweis in fünf Absätze A bis E zergliedert führen. Ehe wir aber zu diesen Überlegungen übergehen, stellen wir noch das Bestehen von zwei Identitäten fest, nämlich:

Wenn $\psi \lesssim x$ ist, so ist $\left(\frac{\psi \mid 0}{x}\right) = \psi$. Wenn für alle $u \varepsilon x$ $[\psi', u] = [\psi'', u]$ ist (und nur dann), so ist $\left(\frac{\psi' \mid 0}{x}\right) = \left(\frac{\psi'' \mid 0}{x}\right)$. Man verifiziert beide ohne jede Schwierigkeit durch Anwenden von I. 4., denn diese II-Dinge haben für jedes u denselben Wert.

---

[35]) Vgl. den Schluß im Kap. I 3., sowie die Fußnote [15]) daselbst.

[36]) Man beachte die Analogie dieses Beweisganges mit der Theorie der Zählbarkeit in Kap. V, §§ 1–3.

A. Wir betrachten die folgende Eigenschaft von P: „Es ist $P\,\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$. Es gibt ein II-Ding χ, so daß

1. wenn nicht $x \varepsilon P$ ist, so ist $[\chi, x] = A$ (d. h. es ist $\chi \lesssim P$),

2. wenn $x \varepsilon P$ ist, so ist $[\chi, x] = \left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{\chi \mid 0}{x}\right)\right\rangle\right]$."

Wenn P diese Eigenschaft hat, so nennen wir es normal. χ bezeichnen wir dann als ein $\mathfrak{J}$-Element von P. Wenn $P \neq \Omega^{**}$ ist, d. h. $P \varepsilon \Omega^{**}$, P eine Menge, so ist wegen $\chi \lesssim P$ auch χ ein I II-Ding. Wir nennen dann

$$u = \left[\varphi, \left\langle P, \left(\frac{\chi \mid 0}{P}\right)\right\rangle\right] = [\varphi, \langle P, \chi\rangle]$$

einen $\mathfrak{J}$-Wert von P.

Es ist nicht schwer, für Mengen P die Bedingung „P ist normal" auf die Form $[f, P] \neq A$ zu bringen; und weiter die Relationen „χ ist ein $\mathfrak{J}$-Element von P" und „u ist ein $\mathfrak{J}$-Wert von P" auf die Formen $[g, \langle P, \chi\rangle] \neq A$ bzw. $[h, \langle P, u\rangle] \neq A$ zu bringen.

Wenn wir $\mathfrak{N} = \mathfrak{B}(f)$ setzen, so ist $\mathfrak{N}$ ein Bereich, dessen Elemente alle normalen Mengen P sind; und nach I. 4. ist $\mathfrak{N}$ der einzige derartige Bereich.

B. Wir behaupten: Wenn P normal ist, so gibt es ein und nur ein $\mathfrak{J}$-Element von P. Hieraus folgt für normale Mengen P sofort, daß es auch einen und nur einen $\mathfrak{J}$-Wert von P gibt.

Es genügt offenbar zu zeigen, daß wenn χ' und χ'' zwei $\mathfrak{J}$-Elemente von P sind, $\chi' = \chi''$ sein muß. Nach I. 4. trifft dies zu, wenn für alle x $[\chi', x] = [\chi'', x]$ ist. Wenn nicht $x \varepsilon P$ ist, so ist nach 1. $[\chi', x] = [\chi'', x] = A$, wir brauchen uns also bloß mit den $x \varepsilon P$ zu beschäftigen. Nehmen wir also an, es wäre für ein $x \varepsilon P$ $[\chi', x] \neq [\chi'', x]$.

Wir können die Eigenschaft „$x \varepsilon P$ und $[\chi', x] \neq [\chi'', x]$" auf die Form $[j, x] \neq A$ bringen und $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}(j)$ setzen. Dann ist $\mathfrak{H}$ ein Bereich und seine Elemente sind die x mit der genannten Eigenschaft. Es ist offenbar $\mathfrak{H} \lesssim P$ und nach Annahme ist $\mathfrak{H} \neq 0$.

Wegen $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma \mathfrak{W}\mathfrak{O} P$ hat also das nach $\left(\frac{\mathfrak{H}}{\Omega^*}\right) \Sigma$ geordnete $\mathfrak{H}$ ein erstes Element, etwa z. Es ist also $z \varepsilon \mathfrak{H}$, und aus $y \varepsilon \mathfrak{H}$ folgt $z \lesssim y$. Wegen $z \varepsilon \mathfrak{H}$ ist $z \varepsilon P$ also $z\,\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$ und $[\chi', z] \neq [\chi'', z]$.

Aus $y \varepsilon z$ folgt $y\,\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$, $y < z$; also kann nicht $y \varepsilon \mathfrak{H}$ sein, da dann $z \lesssim y$, $y \gtrsim z$ wäre. Wegen $z \varepsilon P$, $z < P$ ist aber $y \varepsilon P$, also muß $[\chi', y] = [\chi'', y]$ sein. Da das für alle $y \varepsilon z$ gilt, so ist $\left(\frac{\chi' \mid 0}{z}\right) = \left(\frac{\chi'' \mid 0}{z}\right)$, was

$$\left[\varphi, \left\langle z, \left(\frac{\chi' \mid 0}{z}\right)\right\rangle\right] = \left[\varphi, \left\langle z, \left(\frac{\chi'' \mid 0}{z}\right)\right\rangle\right]$$

und wegen 2. $[\chi', z] = [\chi'', z]$ zur Folge hat. Da wir vorhin das Gegenteil bewiesen hatten, ist das ein Widerspruch. Unsere Behauptung ist also bewiesen.

Für ein normales P gibt es also ein einziges $\mathcal{J}$-Element, das wir mit $\mathcal{JE}(P)$ bezeichnen, und wenn P dabei eine Menge ist, auch einen einzigen $\mathcal{J}$-Wert, den wir mit $\mathcal{JW}(P)$ bezeichnen. Wenn folglich P normal und dabei eine Menge ist, so gibt es ein einziges χ bzw. u mit $[g, \langle P, \chi\rangle] \neq A$ bzw. $[h, \langle P, u\rangle] \neq A$, nämlich $\mathcal{JE}(P)$ bzw. $\mathcal{JW}(P)$. Wir wenden III. 3. an: dann wird $\mathcal{JE}(P) = [k, P]$ und $\mathcal{JW}(P) = [l, P]$ (k, l von P unabhängig!).

C. Wir wollen nun die Ordnungszahlen in bezug auf ihre Normalität untersuchen. Wenn wir nachweisen können, daß Ω^{**} normal ist, so sind wir am Ziele: denn dann gibt es ein und nur ein $\mathcal{J}$-Element von Ω^{**}; und das ψ unseres Satzes ist offenbar ganz genau dasselbe, wie ein $\mathcal{J}$-Element von Ω^{**}.

Die Normalität des Ω^{**} werden wir in der Tat im Absatz E beweisen; die Absätze C und D enthalten die notwendigen Vorbereitungen.

Wir behaupten: Wenn P normal ist, so ist auch jedes $Q \varepsilon P$ normal und es ist stets $\mathcal{JW}(Q) = [\mathcal{JE}(P), Q]$.

Wir setzen $m = \left(\frac{\mathcal{JE}(P) \mid 0}{Q}\right)$ und zeigen, daß m ein $\mathcal{J}$-Element von Q ist. Aus $Q \varepsilon P$ folgt nämlich (da $P\,\boldsymbol{OZ}$ ist) $Q\,\boldsymbol{OZ}$, $Q < P$. Wenn nicht $x \varepsilon Q$ ist, so ist

$$[m, x] = [0, x] = A.$$

Also ist 1. erfüllt. Ist hingegen $x \varepsilon Q$, so ist

$$[m, x] = [\mathcal{JE}(P), x].$$

Nun folgt aus $x \varepsilon Q$ (wegen $Q\,\boldsymbol{OZ}$) $x\,\boldsymbol{OZ}$, $x < Q$; also aus $y \varepsilon x$, $x \varepsilon Q$ $y \varepsilon Q$, d. h.

$$[m, y] = [\mathcal{JE}(P), y].$$

Folglich ist

$$\left(\frac{m \mid 0}{x}\right) = \left(\frac{\mathcal{JE}(P) \mid 0}{x}\right).$$

Da $\mathcal{JE}(P)$ 2. erfüllt, so ist für alle $x \varepsilon Q$, da wegen $Q < P$ auch $x \varepsilon P$ ist,

$$[\mathcal{JE}(P), x] = \left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{\mathcal{JE}(P) \mid 0}{x}\right)\right\rangle\right]$$

und nach dem Vorigen

$$[m, x] = \left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{m \mid 0}{x}\right)\right\rangle\right].$$

Also ist auch 2. erfüllt.

Wir sehen also: Q ist normal und es ist $\mathcal{JE}(Q) = m = \left(\frac{\mathcal{JE}(P) \mid 0}{Q}\right)$.

Also ist weiter (wegen $Q \varepsilon P$ ist ja Q sicher eine Menge)

$$\mathcal{JW}(Q) = [\varphi, \langle Q, \mathcal{JE}(Q)\rangle] = \left[\varphi, \left\langle Q, \left(\frac{\mathcal{JE}(P) \mid 0}{Q}\right)\right\rangle\right] = [\mathcal{JE}(P), Q].$$

D. Unsere nächste Behauptung ist diese: Wenn $P\,O\,Z$ ist und alle $Q \varepsilon P$ normal sind, so ist auch P normal.

Um dies zu beweisen, nehmen wir das II-Ding l, für welches stets $\mathcal{JW}(Q) = [l, Q]$ ist (Q normal und eine Menge), und setzen $n = \left(\frac{l \mid 0}{P}\right)$. Wir behaupten: n ist ein $\mathcal{J}$-Element von P; dann ist die Normalität von P bewiesen.

Es ist $P\,O\,Z$. Wenn nicht $x \varepsilon P$ ist, so ist

$$[n, x] = [0, x] = A.$$

Also ist 1. erfüllt. Wenn $x \varepsilon P$ ist, so ist x normal und eine Menge, folglich ist

$$[n, x] = [l, x] = \mathcal{JW}(x).$$

Da aus $x \varepsilon P$ (wegen $P\,O\,Z$) $x\,O\,Z$, $x < P$ folgt, so folgt aus $y \varepsilon x$, $x \varepsilon P$ auch $y \varepsilon P$, also

$$[n, y] = \mathcal{JW}(y), \quad [\mathcal{JE}(x), y] = \mathcal{JW}(y),$$

d. h.

$$[n, y] = [\mathcal{JE}(x), y].$$

Also ist

$$\left(\frac{n \mid 0}{x}\right) = \left(\frac{\mathcal{JE}(x) \mid 0}{x}\right) = \mathcal{JE}(x),$$

woraus weiter

$$[n, x] = \mathcal{JW}(x) = [\varphi, \langle x, \mathcal{JE}(x)\rangle] = \left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{n \mid 0}{x}\right)\right\rangle\right]$$

folgt. Also ist auch 2. erfüllt.

Wir sehen also: P ist normal, wie behauptet wurde.

E. Mit Hilfe des Resultates in D könnten wir nun die Normalität des Ω^{**} analog beweisen, wie wir es bei der Zählbarkeit von wohlgeordneten Bereichen bei Satz 36 (Kap. V, § 3) getan haben. Die Kenntnis der Theorie der Ordnungszahlen ermöglicht uns aber einen etwas kürzeren Beweis.

Wenn $P \varepsilon \mathcal{N}$ ist, so ist $P \varepsilon \Omega^{**}$, also ist $\mathcal{N} \lesssim \Omega^{**}$. Ferner ist P normal, also ist jedes $Q \varepsilon P$ nach C eine normale Menge, d. h. $Q \varepsilon \mathcal{N}$. Also ist $P \lesssim \mathcal{N}$. Nach Satz 46 ist also $\mathcal{N}\,O\,Z$. Und weil jedes $P \varepsilon \mathcal{N}$ normal ist, so ist nach D auch $\mathcal{N}$ normal. Wäre $\mathcal{N}$ eine Menge, so müßte demnach $\mathcal{N} \varepsilon \mathcal{N}$ sein, was wegen $\mathcal{N}\,O\,Z$ die Unmöglichkeit $\mathcal{N} < \mathcal{N}$ zur Folge hätte.

Also ist $\mathcal{N}$ keine Menge, wegen $\mathcal{N}\,O\,Z$ muß $\mathcal{N} = \Omega^{**}$ sein; also ist Ω^{**} normal. Dann ist aber, wie wir am Anfange von C bereits feststellten, unsere Behauptung vollständig bewiesen.

2. Ein Spezialfall. Die finite (gewöhnliche vollständige) Induktion.

Mit Satz 90 haben wir das Prinzip der Definition durch transfinite Induktion in seiner allgemeinsten Form bewiesen. Wir wollen nun noch gewisse Beschränkungen hinzufügen. So werden wir uns jetzt dem Falle zuwenden, in dem es nicht auf den Bereich aller Ordnungszahlen, sondern auf Teilbereiche desselben bezogen wird.

Satz 91a. *φ sei ein II-Ding, POZ. Es gibt ein und nur ein II-Ding ψ, welches die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. *Wenn nicht $x \varepsilon P$ ist, so ist $[\psi, x] = A$ (d. h.: $\psi \lesssim P$).*
2. *Wenn $x \varepsilon P$ ist, so ist*

$$[\psi, x] = \left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{\psi \mid 0}{x}\right)\right\rangle\right].$$

Dieses ψ bezeichnen wir mit $\mathfrak{J}(\varphi, P)$. (Es ist offenbar $\mathfrak{J}(\varphi, \Omega^{**}) = \mathfrak{J}(\varphi)$.)

Satz 91b. *Wenn φ ein III-Ding ist, und P eine Menge ist, so ist auch $\mathfrak{J}(\varphi, P)$ ein III-Ding. Es gibt ein II-Ding χ, so daß in diesem Falle stets*

$$\mathfrak{J}(\varphi, P) = [\chi, \langle \varphi, P \rangle]$$

ist.

Beweis. (Für 91a.) Wir bringen die Bedingung: „Es gibt ein $x \varepsilon P$ und ein beliebiges y, so daß $u = \langle x, y \rangle$ ist“ auf die Form $[f, u] \neq A$ und setzen dann $g = \left(\frac{\varphi \mid 0}{f}\right)$. Da sieht man sofort, daß die Bedingungen 1, 2 in Satz 91a mit φ für ψ genau das gleiche besagen wie die Bedingungen 1, 2 im Satz 90 mit g für ψ. Also genügt ihnen in der Tat ein und nur ein ψ.

(Für 91b.) Es ist $\psi \lesssim P$, also ist auch ψ ein III-Ding. Die Bedingung „ψ ist ein III-Ding, und es genügt den Bedingungen 1, 2 in Satz 91a“ ist unschwer auf die Form $[h, \langle \langle \varphi, P \rangle, \psi \rangle] \neq A$ zu bringen (h von φ, P, ψ unabhängig). Da für jedes φ, P diese Bedingung für ein und nur ein ψ, nämlich $\mathfrak{J}(\varphi, P)$, erfüllt wird, so können wir III. 3. anwenden; es ist dann

$$[\chi, \langle \varphi, P \rangle] = \mathfrak{J}(\varphi, P),$$

wie behauptet wurde.

Schließlich wenden wir uns der finiten (gewöhnlichen, vollständigen) Induktion zu. In ihrer allgemeinsten Form wird sie durch Satz 91 für $P = \omega$ dargestellt. 1. bezieht sich dann auf alle x, die nicht natürliche Zahlen sind, 2. auf alle $x NZ$. Es ist aber wohl motiviert noch eine etwas engere Fassung derselben näher zu betrachten, weil diese die meistangewandte Form der Definition durch vollständige Induktion ist.

Satz 92a. *u sei ein I-Ding und φ sei ein II-Ding. Es gibt ein und nur ein II-Ding ψ, welches die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. *Wenn nicht $x\,\boldsymbol{NZ}$ ist, so ist* $[\psi, x] = A$ (d. h.: $\psi \lesssim \omega$).

2′. *Es ist* $[\psi, 0] = u$.

2″. *Wenn $x\,\boldsymbol{NZ}$ ist, so ist* $[\psi, x \dotplus 1] = [\varphi, \langle x, [\psi, x]\rangle]$.

Dieses ψ ist wegen 1. ($\psi \lesssim \omega$) *ein III-Ding, wir bezeichnen es mit* $\mathfrak{J}(\varphi, u)$.

Satz 92b. *Wegen $\mathfrak{J}(\varphi, u) \lesssim \omega$ ist $\mathfrak{J}(\varphi, u)$ stets ein III-Ding. Es gibt ein II-Ding χ, so daß für alle III-Dinge φ*

$$\mathfrak{J}(\varphi, u) = [\chi, \langle \varphi, u\rangle]$$

ist.

Beweis. (Für 92a.) Wir setzen in 91a $P = \omega$ und versuchen 92a auf diesen Fall zurückzuführen.

Es sei nun ψ ein III-Ding. Wir bringen diese Bedingungen: „Entweder ist $x = 0$ und $y = u$; oder es gibt ein $t\,\boldsymbol{NZ}$ mit $x = t \dotplus 1$, $y = [\varphi, \langle t, [\psi, t]\rangle]$“ auf die Form $[f, \langle\langle x, \psi\rangle, y\rangle] \neq A$ (f abhängig von u und φ, aber unabhängig von ψ, x und y). Für $x = 0$ genügt denselben ein einziges y: $y = u$; und für $x = t \dotplus 1$, $t\,\boldsymbol{NZ}$ auch ein einziges: $y = [\varphi, \langle t, [\psi, t]\rangle]$. Wir können also III. 3. anwenden, dieses y ist gleich $[g, \langle x, \psi\rangle]$. Dann wird für $x = 0$ $[g, \langle 0, \psi\rangle] = u$, und für $x = t \dotplus 1$, $t\,\boldsymbol{NZ}$ $[g, \langle t \dotplus 1, \psi\rangle] = [\varphi, \langle t, [\psi, t]\rangle]$.

Dies können wir auch so schreiben:

$$\left[g, \left\langle 0, \left(\frac{\psi \mid 0}{0}\right)\right\rangle\right] = u,$$

$$\left[g, \left\langle t \dotplus 1, \left(\frac{\psi \mid 0}{t \dotplus 1}\right)\right\rangle\right] = \left[\varphi, \left\langle t, \left[\left(\frac{\psi \mid 0}{t \dotplus 1}\right), t\right]\right\rangle\right] = [\varphi, \langle t, [\psi, t]\rangle].$$

Nun ist jedes $x\,\boldsymbol{NZ}$ $= 0$ oder $= t \dotplus 1$, $t\,\boldsymbol{NZ}$ (dann ist $t < x$, also $t\,\boldsymbol{NZ}$), da 0 die einzige $\boldsymbol{LZ}$ unter den $\boldsymbol{NZ}$ ist (Satz 89). Also sind 2′. und 2″. des Satzes 92a mit den folgenden Bedingungen gleichbedeutend:

$$[\psi, 0] = \left[g, \left\langle 0, \left(\frac{\psi \mid 0}{0}\right)\right\rangle\right],$$

$$[\psi, t \dotplus 1] = \left[g, \left\langle t \dotplus 1, \left(\frac{\psi \mid 0}{t \dotplus 1}\right)\right\rangle\right], \quad t\,\boldsymbol{NZ},$$

d. h.

$$[\psi, x] = \left[g, \left\langle x, \left(\frac{\psi \mid 0}{x}\right)\right\rangle\right]$$

für alle $x\,\boldsymbol{NZ}$. Damit haben wir aber bereits die Bedingung 2 des Satzes 91a gewonnen.

Wir sehen: Ein ψ befriedigt die Bedingungen des Satzes 92a mit φ dann und nur dann, wenn es den Bedingungen des Satzes 91a mit dem soeben hergestellten g genügt. Also gibt es ein und nur ein solches ψ.

(Für 92b.) Dieser Satz ist mit genau denselben Überlegungen zu beweisen wie Satz 91b. Man bringt die Eigenschaft: „ψ ist ein III-Ding und genügt den Bedingungen 1 sowie 2′ und 2″ in Satz 92a“ auf die Form $[h, \langle\langle\varphi, u\rangle, \psi\rangle] \neq A$; dieser Bedingung genügt dann ein einziges ψ, nämlich $\mathcal{J}(\varphi, u)$. Nach Anwendung von III. 3. wird also:

$$\mathcal{J}(\varphi, u) = [\chi, \langle\varphi, u\rangle].$$

Schluß.

Nach den Entwicklungen der Kapitel I bis IX bereitet es keine besonderen Schwierigkeiten, die verschiedenen Disziplinen der allgemeinen Mengenlehre in unsere Axiomatik zu übertragen.

In erster Linie wäre das Addieren, Multiplizieren und Potenzieren von Ordnungszahlen zu definieren, was mit Hilfe des Prinzips der transfiniten Induktion (Satz 90) ohne weiteres geht. Sodann ist die Theorie der „normalen Ordnungszahlen-Funktionen“ und die der „kritischen Stellen“ zu entwickeln[37]). Ferner könnte (in teilweiser Anlehnung an die entsprechenden Operationen mit Ordnungszahlen) der Kalkül mit Kardinalzahlen (Mächtigkeiten) entwickelt werden, wobei natürlich vom Auswahlprinzip Gebrauch gemacht werden muß.

Eine andere Richtung der Fortsetzung ist die nähere Untersuchung der Mengen ω (in erster Linie mit Hilfe des in Satz 92a aufgestellten Prinzips der Definition durch vollständige Induktion) und $\mathcal{P}(\omega)$. Die letztere entspricht offenbar dem Linearkontinuum zwischen 0 und 1, oder auch (bei geeigneter Deutung) der Menge der reellen oder komplexen Zahlen, hier ergibt sich also die mengentheoretische Begründung der Mathematik.

Auf diese Fragen einzugehen liegt aber bereits außerhalb des Rahmens unserer Darstellung; denn von dieser Stelle an bietet die Übertragung der klassischen Gedankengänge der allgemeinen Mengenlehre und der Mathematik in unsere Axiomatik keine neuen Gesichtspunkte mehr.

---

[37]) Über die „normalen Ordnungszahlen-Funktionen“ und ihre „kritischen Stellen“, sowie andere verwandte Probleme, vgl. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 114ff.

(Eingegangen am 13. Juli 1927.)